

Alonzo Church

María Manzano
Universidad de Salamanca

Septiembre 2007

Abstract

A Alonzo Church le debemos el cálculo lambda, la tesis que lleva su nombre y la solución al *Entscheidungsproblem*. Suyo es también *Introduction to Mathematical Logic*, vol. I, el libro que definió qué era la lógica, el enfoque y los temas básicos. Finalmente, él fue el impulsor del *Journal of Symbolic Logic*, la revista más conocida del área de la que fue editor durante décadas.

Pretendo mostrar que el gran descubrimiento de Church fue el cálculo lambda, y que a ese acierto inicial debemos muchas de sus posteriores inspiraciones, tanto como las de sus discípulos, incluyendo la Teoría de la Recursión de Kleene y la prueba de completud de Henkin.

Basado en el artículo "Vida, Obra y Milagros de Alonzo Church" [4]

Fechas y datos relevantes 1



- ▶ Nació en 1903 en Washington DC
- ▶ Estudió en Princeton (discípulo de Oswald Veblen)
- ▶ 1924 terminó su licenciatura
- ▶ Se casó con Mary Kuczinski en 1925

Fechas y datos relevantes 2

- ▶ En 1927 realizó su doctorado
- ▶ Dos años con una *National Research Fellowship*
 1. Harvard (con Birkhoff y Huntington)
(concentración de lógicos: Sheffer, Lewis y Whitehead)
 2. Göttingen (con Hilbert y Bernays)
 3. Amsterdam (con Brouwer)
- ▶ 1929, comenzó a enseñar en Princeton
- ▶ 1967, se fue a Los Angeles para evitar retirarse
- ▶ En activo hasta 1990, ¡tenía 87 años!

Homenaje

- ▶ Volumen de homenaje en su 90 cumpleaños. Nunca se publicó
 1. Compilado por Anthony Anderson y Mikhail Zeleny.
 2. Contribuyeron, entre otros, Shepherson, Shapiro, Paulson, Meyer, Kripke, Henkin y Feferman.
 - ▶ Dos de los artículos de este volumen, el de Martin Davis [2] y el de Henkin [3], se publicaron en el **Bulletin of Symbolic Logic**
- ▶ Murió el 11 de Agosto de 1995.
 - ▶ **New York Times** *Alonzo Church, 92, Theorist of the limits of Mathematics.*
 - ▶ **Independent** de Londres (pie de foto: *A truly rational mind*).

Docente

- ▶ Carrera docente de 61 años.
- ▶ Profunda huella en discípulos.
- ▶ Características:
 1. Como docente era modesto, paciente y poco expresivo (algunos le achacan carencia de pasión).
 2. Trabajo muy minucioso, análisis de gran calado y detalles cuidados al extremo.
 3. David Kaplan dice que él recomendaba a sus alumnos que hicieran un curso con Church asegurándoles que los cambiaría (al menos, contar a sus nietos).
 4. Henkin cuenta que en 1941, como parte del programa de doctorado, hizo un curso de Lógica con Church y destaca:
 - ▶ estilo de su maestro para transmitir su concepción de la lógica
 - ▶ *método logístico* (lenguaje/metalinguaje, lenguaje formal: completamente efectivo, limitar metalinguaje)
 - ▶ **Introduction to Mathematical Logic [1].**

Tesis dirigidas

A lo largo de su dilatada vida Church dirigió 31 tesis doctorales, entre otras:

- ▶ Alan Turing, Stephen Kleene y Barkley Rosser en los años 30.
- ▶ Enrique Bustamante, Leon Henkin y John Kemeny en los años 40.
- ▶ Martin Davis, Dana Scott, Hartley Rogers, Norman Shapiro, Maurice L'Abbé y Raymond Smullyan en los 50.
- ▶ Peter Andrews en los 60.
- ▶ Richard Malitz y Anthony Anderson en los 70.
- ▶ Gary Mar en los 80.
- ▶ La última tesis la dirigió cuando sobrepasaba los 80.
- ▶ The Mathematics Genealogy Project

Primeros escritos

El primer artículo de Church se publicó en 1924 y el último en 1995.

- ▶ [1926]. *Alternatives to Zermelo's assumption*. **Transaction of the American Mathematical Society**, vol. 29, pp. 178-208. (Naturaleza no constructiva del axioma de elección, no derivable en el cálculo lambda)
- ▶ [1928]. *On the law of the excluded middle*. **Bulletin of the American Mathematical Society**. Vol. 34. pp. 75-78. (Posibilidad de eliminar la ley del tercio excluso)
- ▶ En general, su actitud hacia los principios de la lógica no es dogmática.
- ▶ 1928, se plantea problema de la **decidibilidad** de la lógica de primer orden (en alemán Entscheidungsproblem). Church (en su [2]) y Turing lo resuelven negativamente.

Introduction to Mathematical Logic 1

El libro de Church, **Introduction to Mathematical Logic**, vol. I, es el libro de lógica por antonomasia.

Publicado en 1956. Versión previa en 1944, como volumen de **Annals of Mathematical Studies**. En 1946 ya estaba el manuscrito depositado en la biblioteca.

A destacar: capítulo introductorio, de 70 páginas.

León Henkin me comenta al respecto:

I have several times in recent decades re-read the long Introductory chapter of the book, and each time was excited by the richness of its ideas. It contains the basis for much future work by logicians, I am sure.

Introduction to Mathematical Logic 2

Temas que se debaten allí

- ▶ Supuestos ontológicos y semánticos que asumimos al elegir la lógica clásica
- ▶ Conceptos matemáticos y lingüísticos, pilares del análisis lógico: nombres, funciones, constantes, variables y proposiciones
- ▶ Otros propiamente lógicos; a saber, los conectores y cuantificadores.
- ▶ De especial interés es el apartado 07 de dicha introducción, que está precisamente dedicado a la exposición del método logístico.

Introduction to Mathematical Logic 3

Requisitos de efectividad del lenguaje y del sistema lógico

1. Al especificar los signos primitivos (dado un signo hay que poder determinar si es o nó un signo primitivo).
2. Al definir fórmulas (dada una sucesión de signos hay que poder determinar si es o nó una fórmula).
3. Al especificar los axiomas (dada una fórmula hay que poder determinar si es o nó un axioma).
4. Al definir las reglas de inferencia (cuando se propone una fórmula como conclusión de una inferencia inmediata se debe poder determinar si es correcta, conforme a las reglas).

Introduction to Mathematical Logic 4

Church señala que así:

- ▶ el concepto de prueba es efectivo (lo contrario nos llevaría a una infinita recurrencia)
- ▶ prueba debe hacerse en lenguaje objeto (sin usar interpretación)
 - ▶ forma/contenido
 - ▶ sólo axiomas y reglas de inferencia
 - ▶ seguridad sistemas lógicos
- ▶ ser un teorema no es necesariamente efectivo

Introduction to Mathematical Logic 5

Concepto intuitivo de efectividad

- ▶ algoritmo (criba de Eratóstenes)
 - ▶ conjunto decidable
 - ▶ función computable
 - ▶ no basta concepto intuitivo para demostrar indecidibilidad
- ▶ Es curioso que en el libro no se desarrolle ninguna de las tres grandes contribuciones de Church a la lógica y a la informática: el cálculo lambda, la tesis que lleva su nombre y la demostración de la indecidibilidad de la lógica de primer orden.

Artículos de especial interés en el curso

- ▶ [1940]. *A formulation of the simple theory of types*. **The Journal of Symbolic Logic**. vol. 5. pp. 56-68.
- ▶ [1941]. *The calculi of lambda conversion*. **Annals of Mathematical Studies**. number 6, 1941. Princeton University Press- Oxford University Press.
- ▶ [1951]. *A formulation of the logic of sense and denotation*. **Structure, Methods and Meaning**, Essays in Honor of Henry M. Sheffer, New York. pp. 3-24. (Revisado en NOUS: vol. 7 (1973), pp. 24-33; vol. 8 (1974), pp. 135-156; and vol. 27 (1993), pp. 141-157.)
- ▶ [1976] *Comparison of Russell's resolution of the semantical antinomies with that of Tarski*. **The Journal of Symbolic Logic**. vol. 41. núm. 4.

El cálculo lambda

MI TESIS: Gran descubrimiento de Church: cálculo lambda.

- ▶ Sistema lógico propio.
- ▶ Base: el concepto de función.
- ▶ Se distingue: $F(x)$ y $\lambda xF(x)$.
- ▶ Característica: permite que una función anide a otras.
(Lenguaje preparado para expresar la recursión)
- ▶ Tan compacto y tan adecuado para expresar funcionalidad que se convirtió en lenguaje de programación (LISP, desarrollado por John Mc Carthy).

Da pie a:

1. Definición de computabilidad efectiva.
2. Con Kleene: origen de la teoría de la recursión. Pero también...
3. Equivalencia: definibilidad mediante lambda, recursividad y computabilidad mediante máquinas de Turing (argumento a favor de tesis de Church).
4. Tesis de Church: tomar cualquiera de ellas como una definición posible de computabilidad efectiva o algoritmo. Usando esta tesis, Church demostró la indecidibilidad de la lógica de primer orden.
5. Base para Teoría de tipos.
6. Henkin: Prueba de completud

Entscheidungsproblem

- ▶ Tema de actualidad: el de la decidibilidad.
- ▶ Escuela de Hilbert: esperaba solución positiva. Respuesta negativa, tras la demostración de Gödel de la incompletud.
- ▶ Mostrar que un conjunto es decidable no requiere más que señalar el algoritmo que lo genera, sin una definición matemática de computabilidad.
- ▶ *Mostrar que no es decidable, se necesita una definición en regla.*
- ▶ Imprescindible: precisar y definir la noción de **computabilidad efectiva**.
- ▶ Una tal definición podía ser precisamente la λ —definibilidad

Computabilidad: recursividad

Varios conceptos (años 30):

1. Gödel, funciones definidas mediante recursión
 2. Church y Kleene, función definible con el operador λ
 3. Turing, función computable mediante una máquina abstracta
- ▶ Pronto se demostró que los tres nociones definían las mismas funciones.
 - ▶ Si bien estaba claro que todas las funciones definidas mediante cualquiera de los procesos anteriores era efectivamente computable, este resultado seguía sin servir para demostrar que un conjunto es indecidible; necesitamos la conversa. Podría presentarse como definición, pero si no se considera adecuado que lo sea, habría que proporcionarle otro status.

Tesis de Church

TESIS: El concepto matemático preciso de recursión, tal y como lo había definido Turing, se corresponde exactamente con el concepto intuitivo de computabilidad efectiva.

- ▶ Surgió de forma natural.
- ▶ Por su propia naturaleza esta afirmación no puede ser demostrada.
- ▶ ¿Cómo se demuestra que un concepto intuitivo y uno formal son equivalentes?
- ▶ Razones poderosas para aceptarla

Argumentos a favor de la Tesis de Church

- ▶ Similar al dado por Church, *The Step-by step Argument*.

He considers the evaluation of a value fm of a function either by the application of an algorithm, or by the derivation of $fm = n$ from axioms about f in some formal system. In each case the evaluation proceeds in a series of steps. If each step is recursive then f will be recursive. As evidence for the premise he points out that Gödel had shown that the steps in a proof in Gödel system P are primitive recursive.

- ▶ La razón que convenció a Kleene: la del fracaso del argumento diagonal. (Sobre este problema recomiendo [1])

Referencias

-  María Manzano y Enrique Alonso [2005] “Diagonalization and Church’s Thesis: Kleene’s Homework” **HPL** (History and Philosophy of Logic), volumen 26, número 2, páginas 93-113
-  Alonzo Church. [1936]. *A note on the Entscheidungsproblem.* **The Journal of Symbolic Logic.** vol. 1, Number 1. Marzo de 1936. pp 40-41.
-  Alonzo Church. [1940]. *A formulation of the simple theory of types.* **The Journal of Symbolic Logic.** vol. 5. pp. 56-68.
-  Alonzo Church. [1941]. *The calculi of lambda conversion.* **Annals of Mathematical Studies.** number 6, 1941. Princeton University Press- Oxford University Press.

Referencias

-  Alonzo Church. [1956]. **Introduction to Mathematical Logic**. vol I. Princeton: Princeton University Press.
-  Martin Davis—[1995]. *American Logic in the 1920s*. **Bulletin of Symbolic Logic**, vol. 1, Number 3, Sept. 1995.
-  Leon Henkin—[1996]. *The discovery of my completeness proofs*, Dedicated to my teacher, Alonzo Church, in his 91st year, **Bulletin of Symbolic Logic**, vol. 2, Number 2, June 1996. (presentado el 24 de Agosto de 1993 en el XIX International Congress of History of Science, Zaragoza, Spain).
-  María Manzano [1997]. “Life, Work and some Miracles of Alonzo Church” En **HPL**. Volumen 18, Páginas, 211-232