

Semántica Lógica Proposicional

María Manzano

Universidad de Salamanca

Curso 2009-2010

- 1 Introducción
- 2 Lógica como ciencia de la consecuencia
 - EJEMPLOS
- 3 Tablas de verdad
 - Clasificación de fórmulas
- 4 Interpretación de L_0
- 5 Conceptos clave
- 6 Métodos para determinar propiedades semánticas

Introducción

Objetivos

$\Gamma \models \varphi$ equivale a $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible

Nota: Durante el curso manejaremos varios métodos diferentes para verificar la consistencia de enunciados y la consecuencia de ciertos enunciados a partir de otros:

- **Directo:** usando simplemente las definiciones pertinentes.

Introducción

Objetivos

$\Gamma \models \varphi$ equivale a $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible

Nota: Durante el curso manejaremos varios métodos diferentes para verificar la consistencia de enunciados y la consecuencia de ciertos enunciados a partir de otros:

- **Directo:** usando simplemente las definiciones pertinentes.
- **Tablas de verdad**

Introducción

Objetivos

$\Gamma \models \varphi$ equivale a $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible

Nota: Durante el curso manejaremos varios métodos diferentes para verificar la consistencia de enunciados y la consecuencia de ciertos enunciados a partir de otros:

- **Directo:** usando simplemente las definiciones pertinentes.
- **Tablas de verdad**
- **Árboles (Tableaux semánticos)**

Introducción

Objetivos

$\Gamma \models \varphi$ equivale a $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible

Nota: Durante el curso manejaremos varios métodos diferentes para verificar la consistencia de enunciados y la consecuencia de ciertos enunciados a partir de otros:

- **Directo:** usando simplemente las definiciones pertinentes.
- **Tablas de verdad**
- **Árboles (Tableaux semánticos)**
- **Cálculo de deducción natural.**

Ciencia de la consecuencia

- Lenguaje formal: L_0 (que nos sirve para formalizar en él las sentencias del castellano)
- Lógica = Ciencia de la consecuencia (o del razonamiento válido)
- ¿Qué queremos decir cuando afirmamos que una fórmula C es una consecuencia de un conjunto de fórmulas Γ ?

Utilizando la Formalización

Retraducción

Comentario

Un razonamiento es válido (por ejemplo, $p \wedge q \models p$) porque con independencia de cómo retraduzcamos p y q al castellano, si la traducción de $p \wedge q$ es verdadera, también lo será la de p . Es decir, es inconcebible una situación que haciendo verdadera a $p \wedge q$ haga falsa a p ; signifiquen lo que signifiquen p y q

EJEMPLO I

La oscuridad de la noche: Una prueba de la Teoría del Big Bang

El gran descubrimiento de este siglo es que el universo no es inmóvil ni eterno, como supuso la mayoría de los científicos del pasado. El universo tiene una historia, no ha cesado de evolucionar, enrareciéndose, enfriándose, estructurándose. Esta evolución sucede desde un pasado distante que se sitúa, según las estimaciones, hace diez o quince mil millones de años, cuando el universo está completamente desorganizado, no posee galaxias, ni estrellas, ni moléculas, ni tan siquiera núcleos de átomos...Es lo que se ha llamado el BIG BANG. Una de las pruebas indirectas de esta teoría se puede plantear así:

Si las estrellas fueran eternas (p), entonces la cantidad de luz emitida sería infinita (q). Si la cantidad de luz emitida fuera infinita, entonces el cielo debería ser extremadamente luminoso (r). El cielo es oscuro.

LUEGO: Las estrellas no existieron siempre

EJEMPLO II

Retrotraducción

Si el esquema anterior corresponde a un razonamiento correcto; es decir, si $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), \neg r\} \models \neg p$, lo seguirá siendo cuando retraduzcamos al castellano p , q y r . Veremos después que este esquema corresponde al del razonamiento de **Lucrecio, siglo I a.c**

Utilizad ahora la retraducción siguiente:

p = **Pedro es culpable**

q = **Quintín es cómplice**

r = **Juan es culpable**

Nos sale así el siguiente razonamiento (sacado de los archivos del inspector Craig, realizado con ayuda del sargento Mc Pherson)

Si Pedro es culpable, entonces Quintín es cómplice.

Si Quintín es cómplice, entonces Juan no es inocente. Juan es inocente.

LUEGO: *Pedro es inocente*

EJEMPLO III

Lucrecio, filósofo romano. siglo I antes de Cristo

Lucrecio afirmaba que el universo aún estaba en su juventud. Razonó así: He comprobado desde mi infancia, se dijo, que las técnicas se han ido perfeccionando. Han mejorado el velamen de nuestros barcos, inventado armas más y más eficaces, fabricado instrumentos musicales más refinados...¡Si el universo fuera eterno, todos estos progresos habrían tenido tiempo de realizarse cien, mil, un millón de veces!

Si el **universo fuera eterno** (p), entonces **todos los progresos se habrían realizado ya** (q). Si todos los progresos se hubieran producido ya, **el mundo estaría acabado, no cambiaría** (r). El mundo cambia.

LUEGO El mundo no existe desde siempre

Tablas de verdad I

Conectivas básicas

C	D	$(C \wedge D)$	$(C \vee D)$	$(C \rightarrow D)$	$(C \leftrightarrow D)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

(Tabla de los conectores binarios usados en nuestro lenguaje formal; los conectores binarios se interpretan como funciones binarias sobre el conjunto de los valores de verdad $\{1, 0\}$.)

C	$\neg C$
1	0
0	1

(Tabla del conector monario de negación.)

Tablas de verdad II

Tabla de verdad de una fórmula cualquiera

p	$(p \wedge \neg p) \rightarrow \neg p$	$(p \vee \neg p) \rightarrow p$	$(p \wedge p)$	$(p \vee \neg p)$
1				
0				

p	q	$p \rightarrow (p \vee q)$	$(p \vee \neg q) \rightarrow p$	$p \wedge (q \wedge \neg q)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Tablas de verdad III

p	q	r	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$	$p \vee \neg r$
1	1	1		
1	1	0		
1	0	1		
1	0	0		
0	1	1		
0	1	0		
0	0	1		
0	0	0		

Clasificación de fórmulas I

Tautologías (o válidas) son las fórmulas cuya tabla de verdad tiene como columna principal una formada exclusivamente de 1's.

p	q	...	C
1	1		1
$\vdots$			$\vdots$
			1
$\vdots$			$\vdots$

Contingentes son las fórmulas cuya tabla de verdad tiene como columna principal una formada por 1's y 0's

p	q	...	C
1	1	...	$\vdots$
		...	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			0

Clasificación de fórmulas II

Contradicciones (o antilogías) son las fórmulas cuya tabla de verdad tiene como columna principal una formada exclusivamente de 0's

p	q	...	C
1	1		0
$\vdots$			$\vdots$
			0
$\vdots$			$\vdots$

Satisfacibles son las fórmulas cuya tabla de verdad tiene como columna principal una formada por al menos un valor 1

p	q	...	C
1	1		0
$\vdots$			$\vdots$
			1
$\vdots$			$\vdots$

Interpretación I

Una **asignación** es una función f que otorga un valor de verdad a cada letra proposicional

$$f : LS \longrightarrow \{1, 0\}$$

Una **interpretación** es una función que otorga un valor de verdad para cada fórmula

$$\mathfrak{I} : FORM(L_0) \longrightarrow \{1, 0\}$$

La definición se hará mediante recursión:

F1. Para letras proposicionales el valor es el de la asignación.

$$\mathfrak{I}(p) = f(p)$$

para $\perp$ tiene un valor fijo

$$\mathfrak{I}(\perp) = 0$$

F2. Para fórmulas con conectores se respeta el significado de los mismos.

$$\mathfrak{I}(\neg C) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 0$$

$$\mathfrak{I}(C \wedge D) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 1 \quad \text{y} \quad \mathfrak{I}(D) = 1$$

$$\mathfrak{I}(C \vee D) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 1 \quad \text{o} \quad \mathfrak{I}(D) = 1$$

$$\mathfrak{I}(C \rightarrow D) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 0 \quad \text{o} \quad \mathfrak{I}(D) = 1$$

$$\mathfrak{I}(C \leftrightarrow D) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = \mathfrak{I}(D)$$

Satisfacibilidad y consecuencia

- Una fórmula C es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(C) = 1$. (Decimos que $\mathcal{I}$ satisface a la fórmula C ; o también, que $\mathcal{I}$ es **modelo** de la fórmula C . Escribimos: $\mathcal{I} \models C$)

Satisfacibilidad y consecuencia

- Una fórmula C es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(C) = 1$. (Decimos que $\mathcal{I}$ satisface a la fórmula C ; o también, que $\mathcal{I}$ **es modelo** de la fórmula C . Escribimos: $\mathcal{I} \models C$)
- Un conjunto de fórmulas Γ es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(G) = 1$ para cada fórmula $G \in \Gamma$. (Decimos que $\mathcal{I}$ **es modelo de** Γ . Escribimos $\mathcal{I} \models \Gamma$)

Satisfacibilidad y consecuencia

- Una fórmula C es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(C) = 1$. (Decimos que $\mathcal{I}$ satisface a la fórmula C ; o también, que $\mathcal{I}$ **es modelo** de la fórmula C . Escribimos: $\mathcal{I} \models C$)
- Un conjunto de fórmulas Γ es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(G) = 1$ para cada fórmula $G \in \Gamma$. (Decimos que $\mathcal{I}$ **es modelo de** Γ . Escribimos $\mathcal{I} \models \Gamma$)
- Si el conjunto de fórmulas es finito, $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$, Γ es satisfacible syss $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ es satisfacible

Satisfacibilidad y consecuencia

- Una fórmula C es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(C) = 1$. (Decimos que $\mathcal{I}$ satisface a la fórmula C ; o también, que $\mathcal{I}$ **es modelo** de la fórmula C . Escribimos: $\mathcal{I} \models C$)
- Un conjunto de fórmulas Γ es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(G) = 1$ para cada fórmula $G \in \Gamma$. (Decimos que $\mathcal{I}$ **es modelo de** Γ . Escribimos $\mathcal{I} \models \Gamma$)
- Si el conjunto de fórmulas es finito, $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$, Γ es satisfacible syss $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ es satisfacible
- Un conjunto de fórmulas Γ es **insatisfacible** syss no hay ninguna interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(G) = 1$ para cada fórmula $G \in \Gamma$

Satisfacibilidad y consecuencia

- Una fórmula C es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(C) = 1$. (Decimos que $\mathcal{I}$ satisface a la fórmula C ; o también, que $\mathcal{I}$ es **modelo** de la fórmula C . Escribimos: $\mathcal{I} \models C$)
- Un conjunto de fórmulas Γ es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(G) = 1$ para cada fórmula $G \in \Gamma$. (Decimos que $\mathcal{I}$ es **modelo de** Γ . Escribimos $\mathcal{I} \models \Gamma$)
- Si el conjunto de fórmulas es finito, $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$, Γ es satisfacible syss $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ es satisfacible
- Un conjunto de fórmulas Γ es **insatisfacible** syss no hay ninguna interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(G) = 1$ para cada fórmula $G \in \Gamma$
- Una fórmula C es **consecuencia** de un conjunto de fórmulas Γ -y escribimos $\Gamma \models C$ - syss todo modelo de Γ lo es también de C ; es decir, toda interpretación que hace verdadera a cada fórmula de Γ , hace verdadera a C

- Una fórmula C es **válida** -y escribimos $\models C$ - syss $\emptyset \models C$; es decir, toda interpretación hace verdadera a C

- Una fórmula C es **válida** -y escribimos $\models C$ - syss $\emptyset \models C$; es decir, toda interpretación hace verdadera a C
- Una fórmula C es **independiente** de un conjunto de fórmulas Γ -y escribimos $\Gamma \not\models C$ - syss C no es consecuencia de Γ ; es decir, hay modelos de Γ que no lo son de C

- Una fórmula C es **válida** -y escribimos $\models C$ - syss $\emptyset \models C$; es decir, toda interpretación hace verdadera a C
- Una fórmula C es **independiente** de un conjunto de fórmulas Γ -y escribimos $\Gamma \not\models C$ - syss C no es consecuencia de Γ ; es decir, hay modelos de Γ que no lo son de C
- Un conjunto Δ de fórmulas es **independiente** syss para cada $C \in \Delta$ se cumple: $\Gamma \not\models C$

- Una fórmula C es **válida** -y escribimos $\models C$ - syss $\emptyset \models C$; es decir, toda interpretación hace verdadera a C
- Una fórmula C es **independiente** de un conjunto de fórmulas Γ -y escribimos $\Gamma \not\models C$ - syss C no es consecuencia de Γ ; es decir, hay modelos de Γ que no lo son de C
- Un conjunto Δ de fórmulas es **independiente** syss para cada $C \in \Delta$ se cumple: $\Gamma \not\models C$
- Dos fórmulas C y D son **lógicamente equivalentes** si y sólo si

$$C \models D \text{ y } D \models C$$

SATISFACIBILIDAD

- *Directo*: Encontrar una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(G) = 1$ para cada $G \in \Gamma$
- *Mediante tablas de verdad*: Ver si la tabla de verdad del conjunto Γ contiene una fila formada exclusivamente por 1's. Sea $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$

p	q	...	G_1	G_2	...	G_n
1	1					
$\vdots$						
			1	1	...1...	1
$\vdots$						

Nota: Obviamente, esto equivale a hacer la conjunción $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$

INSATISFACIBILIDAD (OBVIO)

- *Directo (no tanto)*: Demostrar que no hay ninguna interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(G) = 1$ para cada $G \in \Gamma$
- *Mediante tablas de verdad*: Ver si la tabla de verdad del conjunto Γ contiene en cada fila al menos un 0. Sea $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$

p	q	$\dots$	G_1	G_2	$\dots$	G_n
1	1					0
$\vdots$					0	
				0	$\dots$	
$\vdots$			0			

Nota: *Reducción a una fórmula*: Haces la conjunción, $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ y... ¿qué debe darte?

CONSECUENCIA E INDEPENDENCIA

Para determinar consecuencia e independencia usaremos el

MÉTODO MATEMÁTICO

¿Quereis conocerlo?

(REDUCCIÓN AL CASO ANTERIOR)

Es decir, usaremos:

$\Gamma \models C$ syss $\Gamma \cup \{\neg C\}$ es insatisfacible

$\models C$ syss $\{\neg C\}$ es insatisfacible

$\Gamma \not\models C$ syss $\Gamma \cup \{\neg C\}$ es satisfacible

C es válida C es una tautología	$\models C$
C no es válida	$\not\models C$
C es una contradicción C es insatisfacible	$\models \neg C$
C es satisfacible $\neg C$ no es válida	$\not\models \neg C$
C es contingente	$\not\models C$ y $\not\models \neg C$