

Semántica de la Lógica de Primer Orden

Mara Manzano

USAL

Curso 2009-2010

El esquema abstracto de esta parte de la lógica podría plantearse de esta manera: tenemos un lenguaje L_1 y una clase de objetos $\mathcal{R}$ que son las denominadas estructuras —o modelos—, y entre estos dos tipos de realidades tendemos un puente, **la noción de verdad**

Por supuesto que por él circularemos en los dos sentidos:

- de las estructuras a las fórmulas del lenguaje que intentan describirlas
- y de las sentencias del lenguaje a las realizaciones o modelos matemáticos.

Interpretación de fórmulas

Para interpretar fórmulas del lenguaje de primer orden debemos:

- explicitar nuestro dominio de cuantificación
- precisar cómo se asocian los objetos de la estructura con los elementos del lenguaje

individuos destacados	$\rightsquigarrow$	constantes
funciones sobre el universo	$\rightsquigarrow$	functores
relaciones sobre el universo	$\rightsquigarrow$	relatores

- Concepto fundamental va a ser el de **verdad en una estructura**; a partir de él se define el de **consecuencia**.

Una perspectiva semántica

Este planteamiento, aparentemente tan simple, proporciona una gran flexibilidad y alcance a la lógica. El gran impulsor de estas investigaciones fue Tarski (1902-1983), que habiendo precisado y definido los conceptos semánticos de verdad y consecuencia, posibilitó esta modernización y generalización de la semántica que conocemos como **teoría de modelos**.



Figure: *Alfred Tarski*

Ejemplo de estructura

Lanzarote del Lago

El universo lo contienen diversos personajes de la novela. Hay tres individuos destacados correspondientes a los personajes mencionados en las fórmulas del día anterior (Lenguaje de LPO); tres relaciones binarias: amor, odio y amistad.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \langle \mathbf{A}, a^{\mathcal{A}}, i^{\mathcal{A}}, e^{\mathcal{A}}, A^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, O^{\mathcal{A}} \rangle \\ \mathbf{A} &= \{\text{Arturo, Ginebra, Lanzarote, B, C}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^{\mathcal{A}} &= \text{Arturo} & i^{\mathcal{A}} &= \text{Ginebra} & e^{\mathcal{A}} &= \text{Lanzarote} \\ A^{\mathcal{A}} &= \{\langle \text{Arturo, Ginebra} \rangle, \langle \text{Ginebra, Lanzarote} \rangle, \langle \text{C, B} \rangle\} \\ Q^{\mathcal{A}} &= \{\langle \text{Arturo, Ginebra} \rangle, \langle \text{Ginebra, Lanzarote} \rangle\} \\ O^{\mathcal{A}} &= \{\langle \text{Ginebra, Arturo} \rangle, \langle \text{Lanzarote, Arturo} \rangle\}\end{aligned}$$

Ejemplo de estructura

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{U}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, c_3^{\mathcal{A}}, c_4^{\mathcal{A}}, c_5^{\mathcal{A}}, A^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}} \rangle$$

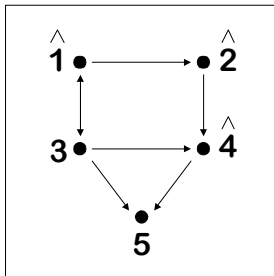
$$\mathbf{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A^{\mathcal{A}} = \{i \mid i \text{ tiene un acento circunflejo}\}$$

$$R^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$$

$$S^{\mathcal{A}} = \{\langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$$

$$c_i^{\mathcal{A}} = i \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, 5\}$$



Definición de estructura

$\mathcal{A}$ es una estructura adecuada para un lenguaje

$$L \langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{f}, \overrightarrow{c} \rangle$$

syss $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}; \overrightarrow{R^{\mathcal{A}}}, \overrightarrow{f^{\mathcal{A}}}, \overrightarrow{c^{\mathcal{A}}} \rangle$, donde:

- 1 $\mathbf{A} \neq \emptyset$ es el universo o dominio de la estructura.
- 2 Para cada relator n -ario $R \in \overrightarrow{R}$ su interpretación es $R^{\mathcal{A}} \subseteq \mathbf{A}^n$.
- 3 Para cada functor n -ario $f \in \overrightarrow{f}$ su interpretación es $f^{\mathcal{A}} : \mathbf{A}^n \longrightarrow \mathbf{A}$.
- 4 Para cada $c \in \overrightarrow{c}$ su interpretación $c^{\mathcal{A}} \in \mathbf{A}$.

Conceptos clave

Satisfacibilidad

Las fórmulas se interpretan en estructuras adecuadas

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \overrightarrow{R^{\mathcal{A}}}, \overrightarrow{f^{\mathcal{A}}}, \overrightarrow{c^{\mathcal{A}}} \rangle$$

- Los designadores de L denotan individuos de $\mathbf{A}$
- Las sentencias son verdaderas o falsas en $\mathcal{A}$
- ¿Cómo hacer que todos los términos denoten y que cada fórmula tenga un valor de verdad?

Una **asignación** es una función $F : VAR \longrightarrow \mathbf{A}$. También definimos

$$F_x^{\mathbf{x}} = (F - \{\langle x, F(x) \rangle\}) \cup \{\langle x, \mathbf{x} \rangle\}$$

x es una variable y $\mathbf{x}$ un individuo del universo

Una **interpretación** la definimos

$$\mathfrak{S} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$$

Definición de $\mathfrak{S}$ para **TERM** (L_1):

- Paso Básico: **T1.** Para cada variable individual x

$$\mathfrak{S}(x) = F(x)$$

- Pasos Inductivos: **T2.** Para cada constante b

$$\mathfrak{S}(b) = b^{\mathcal{A}}$$

- Pasos Inductivos: **T3.** Para cada término functorial $f\tau_1...\tau_n$

$$\mathfrak{S}(f\tau_1...\tau_n) = f^{\mathcal{A}}(\mathfrak{S}(\tau_1), \dots, \mathfrak{S}(\tau_n))$$

Definición de $\mathfrak{S}$ para FORM (L_1):

- Paso Básico: **F1**. Para cada $R\tau_1...\tau_n$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(R\tau_1...\tau_n) &= 1 \text{ syss } \langle \mathfrak{S}(\tau_1), \dots, \mathfrak{S}(\tau_n) \rangle \in R^{\mathcal{A}} \\ \mathfrak{S}(\tau_1 = \tau_2) &= 1 \text{ syss } \mathfrak{S}(\tau_1) = \mathfrak{S}(\tau_2)\end{aligned}$$

- Pasos Inductivos: **F2**. Conectores, interpretación habitual
- Pasos Inductivos: **F3**. Fórmulas cuantificadas:

- 1 Una generalización es verdadera cuando el núcleo lo es para cada elemento del universo

$$\mathfrak{S}(\forall x C) = 1 \text{ syss para cada } \mathbf{a} \in \mathbf{A} : \mathfrak{S}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{a}}(C) = 1$$

- 2 Una particularización es verdadera cuando lo es para algún miembro del universo

$$\mathfrak{S}(\exists x C) = 1 \text{ syss existe un } \mathbf{a} \in \mathbf{A} \text{ tal que : } \mathfrak{S}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{a}}(C) = 1$$

Satisfacibilidad

Las definiciones de satisfacibilidad e insatisfacibilidad son las mismas que en proposicional.

Por supuesto, el detalle cambia considerablemente:

- 1 Cuando allí hablábamos de una interpretación nos referíamos a una función $\mathfrak{I}$ definida recursivamente, que a cada fórmula le otorgaba un valor de verdad, basada en una mera asignación de valores de verdad a las letras proposicionales de LP.
- 2 Aquí, cuando hablamos de interpretación $\mathfrak{I}$ para LPO hay que entenderla como una función $\mathfrak{I}$ definida recursivamente para cada término y fórmula que en este caso está basada en un par

$$\mathfrak{I} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$$

formado por una estructura y una asignación de individuos en el universo de la estructura a las variables individuales del lenguaje.

Sentencias verdaderas en una estructura

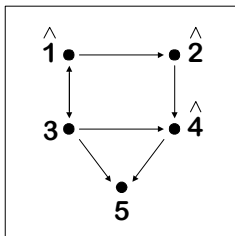


Figure: Flechas

$\mathcal{A} \models S_{c_3 c_4}$ porque $\langle 3, 4 \rangle \in S$ $\mathcal{A} \not\models A_{c_5}$ porque $5 \notin A^{\mathcal{A}}$

$\mathcal{A} \models S_{c_3 c_5} \wedge R_{c_1 c_2}$ porque $\langle 3, 5 \rangle \in S^{\mathcal{A}}$ y $\langle 1, 2 \rangle \in R^{\mathcal{A}}$

$\mathcal{A} \not\models (R_{c_1 c_3} \vee R_{c_5 c_5}) \rightarrow A_{c_5}$ porque $\langle 1, 3 \rangle \in R^{\mathcal{A}}$ y $5 \notin A^{\mathcal{A}}$

$\mathcal{A} \models \exists x R x c_2$ porque hay un elemento del universo, concretamente el 1 tal que $\langle 1, 2 \rangle \in R^{\mathcal{A}}$

$\mathcal{A} \not\models \forall x (\exists y R y x \vee \exists y S y x \vee A x)$ porque no todos los elementos del universo son final de alguna flecha o tienen acento circunflejo.

Sentencias verdaderas en una clase de estructuras

Diagrama de Hasse I

Sean

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, R^{\mathcal{A}} \rangle \quad \mathcal{B} = \langle \mathbf{B}, R^{\mathcal{B}} \rangle \quad \mathcal{C} = \langle \mathbf{C}, R^{\mathcal{C}} \rangle$$

las estructuras representadas en el dibujo

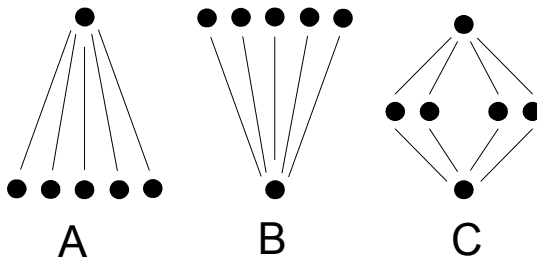


Figure: Primer diagrama de Hasse

Sentencias verdaderas en una clase de estructuras

Diagrama de Hasse II

- 1 En el lenguaje común adecuado a todas ellas —con sólo un relator binario R como signo peculiar— escribimos cinco sentencias verdaderas en $\mathcal{K}$ (la clase formada por las tres).

$$\mathcal{K} \models \forall x Rxx$$

$$\mathcal{K} \models \forall xy (Rxy \wedge Ryx \rightarrow x = y)$$

$$\mathcal{K} \models \forall xyz (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$$

$$\mathcal{K} \models \exists x_1 \dots x_6 (x_1 \neq x_2 \wedge \dots \wedge x_5 \neq x_6)$$

$$\mathcal{K} \models \forall x \exists y Rxy$$

- 2 Vamos a ir tomando las estructuras de dos en dos y en cada caso escribiremos una sentencia que las distinga.

$\mathcal{A} \not\models \exists x \forall y Rxy$ pero $\mathcal{B} \models \exists x \forall y Rxy$

$\mathcal{A} \models \exists x \forall y Ryx$ pero $\mathcal{B} \not\models \exists x \forall y Ryx$

$\mathcal{C} \models \exists x \forall y Rxy \wedge \exists x \forall y Ryx$ pero $\mathcal{B} \not\models \exists x \forall y Rxy \wedge \exists x \forall y Ryx$ ni

$\mathcal{A} \not\models \exists x \forall y Rxy \wedge \exists x \forall y Ryx$.

Modelos de un conjunto de sentencias

Para que

$$\forall x(\exists y Rxy \rightarrow Px) \quad \neg \exists x(Px \wedge Rxx) \quad \exists x(Px \wedge \neg Rxx)$$

sean verdaderas en una estructura cualquiera

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, R^{\mathcal{A}}, P^{\mathcal{A}} \rangle$$

debe cumplirse:

$$\begin{aligned} \text{Dom}(R^{\mathcal{A}}) &\subseteq P^{\mathcal{A}} & P^{\mathcal{A}} \cap \text{Dom}(I_{\mathbf{A}} \cap R^{\mathcal{A}}) &= \emptyset \\ P^{\mathcal{A}} \cap \text{Dom}(\sim (R^{\mathcal{A}} \cap I_{\mathbf{A}})) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Hagamos:

$$\mathbf{A} = \{1, 2, 3\} \quad P^{\mathcal{A}} = \{1, 2\} \quad R^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

Es fácil comprobar que se verifican las condiciones requeridas pues

$$\text{Dom}(R^{\mathcal{A}}) = \{1, 2\} \quad I_{\mathbf{A}} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$$

Definibilidad en una estructura

Dada una estructura $\mathcal{A}$ de universo $\mathbf{A}$, cualquier subconjunto de $\mathbf{A}$ es una posible propiedad sobre $\mathbf{A}$. Es decir, $\wp\mathbf{A}$ contiene a todas las propiedades, extensionalmente hablando.

*¿Tenemos acceso a todas ellas?,
¿las podemos definir con nuestro lenguaje formal?*

Sea

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \vec{R}^{\mathcal{A}}, \vec{f}^{\mathcal{A}}, \vec{c}^{\mathcal{A}} \rangle$$

decimos que $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A}^n$ es definible en $\mathcal{A}$ si existe una fórmula C de

$$L \langle \vec{R}, \vec{f}, \vec{c} \rangle$$

con a lo sumo n variables libres $\text{---}x_1, \dots, x_n \in \text{LBR}(C)\text{---}$ tal que

$$\mathbf{R} = \{ \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle \in \mathbf{A}^n \mid \mathcal{A} [x_1/\mathbf{x}_1, \dots, x_n/\mathbf{x}_n] \models C \}$$

Ejemplos de relaciones definibles

1 *Universo*

$$\mathbf{A} = \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mid \mathcal{A} [x/\mathbf{x} \ y/\mathbf{y}] \Vdash x = y\}$$

2 *Operaciones booleanas*

$$R^{\mathcal{A}} \cap S^{\mathcal{A}} = \{\mathbf{x} \mid \mathcal{A} [x/\mathbf{x}] \Vdash R\mathbf{x} \wedge S\mathbf{x}\}$$

$$\sim R^{\mathcal{A}} = \{\mathbf{x} \mid \mathcal{A} [x/\mathbf{x}] \Vdash \neg R\mathbf{x}\}$$

3 *Operaciones definidas sobre relaciones*

$$\text{Dom}(R^{\mathcal{A}}) = \{\mathbf{x} \mid \mathcal{A} [x/\mathbf{x}] \Vdash \exists y R\mathbf{x}y\}$$

$$(R^{\mathcal{A}})^{-1} = \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mid \mathcal{A} [x/\mathbf{x} \ y/\mathbf{y}] \Vdash R\mathbf{y}x\}$$

$$R^{\mathcal{A}} \circ S^{\mathcal{A}} = \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mid \mathcal{A} [x/\mathbf{x} \ y/\mathbf{y}] \Vdash \exists z (R\mathbf{x}z \wedge Szy)\}$$

Relaciones de parentesco

1 Parentesco: Lenguaje básico

$Vx := x$ es varón $Mx := x$ es mujer

$Hxy := x$ es hermano de y

$Pxy := x$ es progenitor de y $Axy := x$ es antepasado de y

Sea $\mathcal{A}$ una estructura adecuada donde $\mathbf{A}$ es la humanidad.

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, V^{\mathcal{A}}, M^{\mathcal{A}}, P^{\mathcal{A}}, H^{\mathcal{A}}, A^{\mathcal{A}} \rangle$$

- 1 Relación binaria: “ x es hermana de y ” Usando el lenguaje de primer orden la definición sería

$$\mathbf{R} = \{ \langle x, y \rangle \mid \mathcal{A} [x/x \ y/y] \models Hxy \wedge Mx \}$$

- 2 Relación binaria: “ x es bisabuela de y ”

$$\mathbf{R} = \{ \langle x, y \rangle \mid \mathcal{A} [x/x \ y/y] \models \exists zv (Pxz \wedge Pzv \wedge Pvy \wedge Mx) \}$$

- 3 Relación binaria: “ x es prima de y ”

$$\mathbf{R} = \{ \langle x, y \rangle \mid \mathcal{A} [x/x \ y/y] \models \exists zv (Pzx \wedge Pvy \wedge Hzv \wedge Mx) \}$$

Validez, consecuencia e independencia

Las definiciones son las mismas que en proposicional.

- Una fórmula C es **consecuencia** de un conjunto de fórmulas Γ —y escribimos $\Gamma \models C$ — syss todo modelo de Γ lo es también de C
- Una fórmula C es **válida** —y escribimos $\models C$ — syss $\emptyset \models C$
- Una fórmula C es **independiente** de un conjunto de fórmulas Γ —y escribimos $\Gamma \not\models C$ — syss C no es consecuencia de Γ
- Un conjunto Δ de fórmulas es **independiente** syss para cada $C \in \Delta$ se cumple que $\Delta - \{C\} \not\models C$.