

Leon Henkin

María Manzano y Enrique Alonso
Universidad de Salamanca y Universidad Autónoma de Madrid

4 de febrero de 2007

Índice

1. Vida	2
1.1. Segunda Guerra Mundial	4
1.2. Otras facetas	4
1.3. Henkin en España	6
2. Estudiante y profesor	7
2.1. Estudios doctorales	8
2.2. Docente	9
3. Obra	11
3.1. Su prueba del teorema de completud	11
3.2. La inducción matemática	14
3.3. Filosofía	15
4. Su influencia	18

Resumen

Leon Henkin nació en 1921 en Nueva York, concretamente en el barrio de Brooklyn, en el seno de una familia judía de origen ruso. Falleció a primeros de Noviembre de 2006.

Fue un lógico extraordinario, un maestro excelente, un profesor dedicado y una persona excepcional, de gran corazón y muy comprometida con sus ideas, pacifista, de izquierdas, no sólo creía en la igualdad, sino que trabajaba activamente para que se produjese.

The Completeness of Formal Systems es el título de la tesis que presentó en Princeton en 1947, y su director fue Alonzo Church. Nos dejó una colección importante de escritos, algunos tan determinantes como su demostración del teorema de completud —tanto para la teoría de tipos como para la lógica de primer orden— mediante un método innovador y muy versátil, que posteriormente se aplicó en muchas otras lógicas, incluso en las denominadas no clásicas.

Nos limitaremos a destacar algunos aspectos de su obra que nos parecen más representativos de los intereses demostrados a lo largo de su

vida como investigador. A la cabeza hemos situado, como parece obvio, su técnica para demostrar completud. El capítulo dedicado a la inducción responde al reconocimiento que Henkin hace de su profunda satisfacción con el artículo en que recoge sus opiniones al respecto. Finalmente hemos querido dedicar un apartado a su relación con la filosofía como una forma de reivindicar la relevancia que la buena investigación en lógica tiene en ese ámbito del conocimiento. Han quedado fuera muchas otras cosas de las que posiblemente hubiera que haber dicho algo. La principal quizá su interés por el álgebra de la lógica. Otra vez será.

1. Vida

Leon Henkin nació en 1921 en Nueva York, concretamente en el barrio de Brooklyn, en el seno de una familia judía de origen ruso. Falleció a primeros de Noviembre de 2006, según nos cuentan amigos comunes, por la misma causa y razones que el matemático Eratóstenes de Cirene. Murió en Oakland, pues hacía unos años que había tenido que trasladarse allí con su esposa Ginette, dejando su bellísima, sencilla, vanguardista y minimal casita en las colinas de Berkeley, decorada con escogidos objetos entre los que destacaban los de culturas indias, y desde cuyo comedor se divisaba la magnífica estampa del Golden Gate de San Francisco.

Fue un lógico extraordinario, un maestro excelente, un profesor dedicado y una persona excepcional, de gran corazón y muy comprometida con sus ideas, pacifista, de izquierdas, no sólo creía en la igualdad, sino que trabajaba activamente para que se produjese.

En el obituario del *San Francisco Chronicle*, el también lógico J.W. Addison, profesor emérito de su mismo departamento de la universidad de California en Berkeley dice:

“You could say he was an academic triple threat –very strong in teaching, very strong in research, very strong in administration”

Nos dejó una colección importante de escritos, algunos tan determinantes como su demostración del teorema de completud —tanto para la teoría de tipos como para la lógica de primer orden— mediante un método innovador y muy versátil, que posteriormente se aplicó en muchas otras lógicas, incluso en las denominadas no clásicas. De algunos de sus resultados conocemos el proceso del descubrimiento, qué hechos observados intentaba explicar o por qué razón terminó descubriendo aquello que no era en principio el objeto de su investigación. Así que en esos casos no tenemos que formular arriesgadas hipótesis, ni explicar sus ideas basándonos exclusivamente en el frío y posterior proceso de elaboración de artículos científicos. Es notorio que la lógica del descubrimiento no es la que se adopta al organizar la exposición final de nuestras investigaciones a través de sus diversas proposiciones, lemas, teoremas y corolarios.

Henkin era un profesor extraordinariamente claro en sus exposiciones y muy querido por los estudiantes, al que despedían el último día de curso con un emocionado y cerrado aplauso. De hecho Henkin siempre se planteó el dilema de si

sus clases deberían ser fáciles de seguir o en lugar de eso deberían obligar al alumno a hacer un esfuerzo importante, ya que pensaba que lo que se aprende con demasiada facilidad tiende a olvidarse fácilmente también. Muchos de los que lo conocimos creemos que había alcanzado el equilibrio perfecto y que difícilmente se puede ser oscuro a propósito.

Fue director del Departamento de Matemáticas de la universidad de California en Berkeley al menos en dos ocasiones: durante los años 66-68 y en 83-85. Por curioso que pueda parecer él mismo escribe en 1983¹:

“It is much harder now than when I served during 66-68. One big difference is that the University budget has suffered greatly through a combination of political and economic conditions.

...

I send a clipping from our student newspaper —on the first day of our academic year— describing some of the problems. (The Dean was unhappy, but the Chancellor gave us \$20,000 more to open 2 new courses!).

En el recorte de prensa del *The Daily Californian* se explica la situación y se dice que Henkin y el vicedecano David Goldschmidt han enviado una carta al gobernador republicano George Deukmejian en la que exponen sus demandas. La situación se complicó enormemente, hasta el punto de que un año y medio más tarde cuenta Henkin que querría dimitir, aunque finalmente le convencen para que siga al menos otro año.

Se implicó en programas de defensa de las minorías, de lucha contra la exclusión, de Excelencia y Diversidad en Matemáticas. Dedicó gran parte de su vida a desarrollar programas de enseñanza de la matemática empezando desde los niveles elementales, dirigidos tanto a los propios escolares como a sus maestros.

Por otra parte, era consciente de que somos seres inmersos en la historia a la que difícilmente escapamos. Éste es el comienzo de su relato en un interesante artículo sobre la enseñanza de las matemáticas.

“Waves of history wash over our nation, stirring up our society and our institutions. Soon we see changes in the way that all of us do things, including our mathematics and our teaching. These changes form themselves into rivultes and streams that merge at various angles with those arising in parts of our society quite different from education, mathematics, or science. Rivers are formed, contributing powerful currents that will produce future waves of history.

The Great Depression and World War II formed the background of my years of study; the Cold War and the Civil Rights Movement were the backdrop against which I began my career as a research mathematicians, and later began to involve myself with mathematics education.”

¹Comunicación personal a María Manzano.

1.1. Segunda Guerra Mundial

En una de las entrevistas de la serie denominada “*The Princeton Mathematics Community in the 1930s*” cuenta de qué forma el clima de relativa calma frente a la Segunda Guerra Mundial cambió radicalmente a finales de 1941, al entrar América en la contienda; dice que se encontró en la calle a la Señora Eisenhower, con quien estuvo hablando y al final ella afirmó:

"We must all do our duty and get on with it."

Henkin comenta que muy pronto todo el mundo manifestaba opiniones semejantes. También destaca que su profesor Hermann Weyl decidió no alterar su plan de trabajo y que le impresionó positivamente que así lo hiciera.

"I also remember that I had a lecture by Hermann Weyl that same morning, Monday the 8th. It was 9:00. He said, "I know that all of you are very excited and upset and cannot let go of these great world events that have engulfed us. But,"he said, "I've learned from my experience that in the most tempestuous of times, there is a great value in giving some of your attention and your energy to your continuing work. Therefore,"he said, "I am just going to give the regular lecture now that I planned with you last week."So he did, and I think there is something of real value in those opening remarks."

Como muchos científicos debió comprometerse y trabajó durante cuatro años en el proyecto Manhattan; como él mismo relata:

"During the period May, 1942-March, 1946 I worked as a mathematician, first on radar problems and then, beginning January 1943, on the design of a plan to separate uranium isotopes. Most of my work involved numerical analysis to obtain solutions of certain partial-differential equations".

El proyecto agrupó a una gran cantidad de eminencias científicas, exiliados judíos muchos de ellos, que hicieron causa común en la lucha contra el fascismo y aportaron su grano de arena a la misión de conseguir la bomba atómica antes que los alemanes. Dado que tras los experimentos en Alemania previos a la guerra se sabía que la fisión del átomo era posible y que los nazis estaban ya trabajando en su propio programa nuclear, no costó reunir a todas aquellas mentes brillantes que eran también pacifistas e izquierdistas en su mayoría.

1.2. Otras facetas

En una entrevista [23] cuenta una anécdota divertida de sus años de estudiante en Princeton. El profesor Alfred Tucker le pidió que protagonizara un incidente en su último día del curso,

“Like every great teacher he wanted some dramatic incident to imprint the course on the minds of the young students.”

y Henkin estuvo bailando y contorsionándose en clase, ante la sorpresa de los alumnos, que no se daban cuenta de la naturaleza teatral del acontecimiento y no entendían su falta de respeto, para terminar sacándose el chaleco sin quitarse la chaqueta. Henkin era muy aficionado al ballet y al baile, tanto clásico, como moderno.

Hay otras anécdotas interesantes en esas entrevistas ([23] y [24]), destacamos una que tiene que ver con su personal dilema pedagógico: presentar los temas de manera sencilla para el estudiante u obligarlo a esforzarse.

“That effortless way in which the ideas came made them too easy to slip away. I probably learned more densely packed material from what we called the "baby seminar", in point set topology conducted by Arthur Stone. I learned more because he made us do all the work.”

Relacionado con este mismo seminario describe de qué manera hubo de plantar cara al profesor Lefschetz, cosa que no le importó porque se define a sí mismo como *temerario*

“I was giving my solution to one of the problems that Arthur Stone has set to me before, and being a logician I wanted to make all the details very clear and Lefschetz became impatient. As I got into some of those details he said, "Well, that's all obvious. Just go on toward the end." I was a very brash young man. I said, "Professor Lefschetz, it may be obvious to you, but I have come from an environment where a proof requires us to give all the details..^And I just went ahead.

Le interesaba la literatura también. En 1983, en una carta personal a María Manzano, en respuesta a su elogio de la novela *Rabbit is Rich*, del entonces acabado de premiar con el *Pulitzer Prize for Fiction* John Updike, Henkin escribe:

“I am glad you enjoyed the language of Updike's writing. I took a volume of his stories on my camping trip last summer, and I admired his writing very much. I still have my school-boy dream of becoming a story writer, but I'm aware I could never achieve such a master style as Updike”.

En Julio de 1984 comunica a María Manzano que por primera vez en su país una mujer ha sido nominada como vicepresidente del partido demócrata, sin embargo se malicia que Reagan vuelva a ganar las elecciones, como realmente sucedió. Ahora estaría posiblemente contento de que una mujer del partido demócrata esté nominada y directamente como presidenta.

1.3. Henkin en España

El relato corre a cargo de María Manzano, quien durante el curso 1977-78 disfrutó de una beca Fulbright en *The Group in Logic and Methodology of Science* de la Universidad de California en Berkeley, siendo Leon Henkin su director y mentor, como gustaba denominarse a sí mismo.

No había querido visitar España durante el franquismo, pero durante el curso de 1977-78 nos congratulamos de que ya no existiera ese impedimento. La primera visita se produjo en el año 1982 y estuvo en varias universidades españolas; Barcelona, Madrid y Sevilla. Conservo parte de la abundante correspondencia relacionada con aquella visita; es curioso lo complicado y largo que era entonces, sin usar el correo electrónico. El *Hotel Colón* fue el elegido por mí y ratificado por ellos ya que Ginette y Leon preferían un hotel con un toque local, descartan otro más lujoso pues les parece

“... too large and fancy for our tastes.

...

Both of us share your preference for a place with distinctive Spanish character, rather than the ugly, commonplace international style that infects big cities”.

En sus cartas posteriores siempre habla de:

“Not only the warm hospitality... but also the friendliness of people in the other 4 Spanish cities we visited, and the depth and variety of their cultures, made the whole experience a memorable one.”

Le gustaba saber de España, especialmente de la evolución social y política, y en 1982 comenta:

“Yes, we too were very pleased with the clear and strong victory of the Socialist Party in Spain. Along with all the mathematicians and logicians we met, we were worried about the role of the military and relieved that they did not interfere.”

se quejaba de la falta de noticias en la prensa americana, en 1984 escribe:

“I recall your Spanish election in the week following our visit in 1982. I hope that your new government is working out well... we get little news of Spain in our journals.”

También me mantiene informada de las noticias de su propio país:

“Our own election in California was a disaster, with a new Governor and Senator, each more conservative than the other. The State is in a fiscal crisis and I am afraid the University will be in for a rough time...”

En 1982 Leon Henkin vino a España y pronunció en Barcelona dos conferencias [19]. En su carta al departamento explica:

“The former would deal with algebraic structures that I have investigated for many years, with Alfred Tarski and Donald Monk, which stand in the same relation to first-order logic as Boolean algebras have to sentential logic. The latter would describe structures that I defined some years ago to elucidate the relation between mathematical induction and recursive definition in the theory of Peano arithmetic. There are both new and old results in each domain.”

La conferencia sobre modelos inductivos fue especialmente interesante porque nos contó lo que nunca se hace en un artículo; la motivación humana, que, por lo visto, era el intentar convencer a un colega matemático de las razones que hacían profundamente incorrecta una prueba. En la sección 3.2 veremos de qué se trata.

Sobre las estructuras algebraicas llevaba Henkin investigando muchos años, junto a Alfred Tarski y a Donald Monk, justamente tras su viaje a Europa de 1982, y concretamente tras su visita a Yugoslavia, la relación con Hajnal Andreka e Istvan Nemeti (de Budapest) permitió una segunda época de las álgebras cilíndricas igualmente fecunda.

2. Estudiante y profesor

Entre los años 1937 y 1947 inicia su preparación, estudiando en Nueva York, en la universidad de Columbia, obteniendo la diplomatura en matemáticas y en filosofía. En estos años cursó lógica con Ernest Nagel en el departamento de Filosofía y ello le hizo interesarse por el tema hasta llegar incluso a leer los *Principles of Mathematics* de Russell. Allí supo por vez primera del axioma de elección y cuenta que le impresionó la divertida y cercana forma que tiene Russell de exponerlo, contrastando lo fácil que sería seleccionar un zapato de una colección infinita de pares de zapatos frente a la imposibilidad de hacerlo si los pares fueran de calcetines. Esta lectura le llevó a una incursión en los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead [26], y quedó subyugado por la teoría de tipos y por el axioma de reducibilidad. También en Columbia cursó otra asignatura de lógica con Nagel y leyó un artículo de Quine, con una prueba de completud para la lógica proposicional. Tuvo también ocasión de escuchar a Tarski, a quien la invasión de Polonia sorprendió en Harvard, impidiéndole regresar a su país. Tarski habló del trabajo de Gödel sobre proposiciones indecidibles en teoría de tipos. No obstante, su primer contacto con Gödel surge a partir de una especie de seminario de lectura promovido por Von Neumann para comentar los resultados de aquel en relación a la consistencia de la hipótesis del continuo. En ese momento Henkin aún no había obtenido el grado pero era el único que parecía interesado por ese tipo de materias y dispuesto a invertir tiempo y esfuerzo en su estudio.

Al finalizar sus estudios en Columbia solicitó la admisión en las universidades en las que la lógica estaba bien representada; Harvard (en donde estaba Quine), Princeton (por Church), y Columbia. Fue admitido en las tres pero descartó la primera pues no ofrecía becas y finalmente eligió Princeton.

2.1. Estudios doctorales

Fue en la universidad de Princeton donde realizó sus estudios de máster y los de doctorado, aunque entre ambos, como se comentó con anterioridad, trabajó en el famoso proyecto Manhattan, llevado a cabo por los Estados Unidos con ayuda parcial del Reino Unido y Canadá.

Durante la primera etapa en Princeton hizo un curso de lógica con Church en el que se estudiaban cálculos tanto proposicionales como de primer orden y se demostraban para ellos teoremas de forma normal, de completud, y se analizaban los resultados de Löwenheim-Skolem. La prueba de completud era la de Gödel (la suya, obviamente, no existía) y se remarcaba la *naturaleza reductiva* de la prueba. En el segundo semestre se estudiaba un lenguaje de segundo orden y, en particular, se introducía la Aritmética de Peano con gran detalle y se demostraban los resultados de incompletud tanto de la aritmética como de la lógica de segundo orden. Para demostrar incompletud se introducían las funciones recursivas, pero sólo las primitivas. Las funciones recursivas generales no se estudiaban, pero se mencionaba el papel que juegan en la demostración de ciertos resultados de indecidibilidad. Henkin afirma que aunque el contenido del curso no era, como veis, en absoluto sorprendente, sí que lo era el estilo de su maestro, la manera que tenía de transmitir su concepción de la lógica. Hacía, según parece, paradas frecuentes para aclarar que se seguía el “*método logístico*”; delimitar claramente qué era lenguaje y qué metalenguaje, cómo el lenguaje formal había de ser establecido de manera completamente efectiva y por qué el metalenguaje (Inglés, en su caso) había de limitarse. Uno puede hacerse una idea de cómo era leyendo su libro *Introduction to Mathematical Logic, vol. I*. El segundo volumen, cuyo índice se anuncia en el primero, nunca se publicó aunque circularon algunos capítulos de él entre sus alumnos.

La teoría de Frege sobre las nociones de *sentido y referencia* fue el tema de otra asignatura que cursó con Church al regresar de trabajar en el proyecto Manhattan². Afirma que Church defendió de forma convincente que además del lenguaje formal y del universo de objetos matemáticos donde interpretamos sus fórmulas hay una tercera dimensión de objetos abstractos denominados conceptos o sentidos. Una sentencia expresa una proposición pero nombra un valor de verdad.

The Completeness of Formal Systems es el título de la tesis que presentó en Princeton en 1947, y su director fue Alonzo Church³. En la sección 3.1 hablaremos de ella con mayor detalle.

²Posiblemente también expuso las ideas de lo que se convertiría en su artículo [4].

³Recomendamos vivamente la lectura de “*Alonzo Church: His Life, His Work and Some of His Miracles*” [21] y de “*Diagonalization and Church’s Thesis: Kleene’s homework*” [1].

Entre el 47 y el 57 estuvo dos años realizando estudios posdoctorales en Princeton, cuatro enseñando e investigando en Los Angeles, en la universidad de California, un año en Amsterdam con una beca Fulbright y tres años en Berkeley, igualmente en la universidad de California. Siempre supo valorar muy positivamente el papel de Tarski en su propia decisión de instalarse en Berkeley. En una comunicación personal⁴ escribe el 30 de Octubre de 1983:

“I write to tell you that Alfred Tarski, who came to Berkeley in 1942 and founded our great center for the study of logic and foundations, died Wednesday night (Oct. 26), at age 82. All through this year he has been getting weaker; his wife Maria worked heroically to comfort and protect him, but finally he gave up his life. . .

...

It was he who brought me to Berkeley in 1953, so I owe much to him personally as well as scientifically.”

Desde 1957 hasta su muerte se dedicó a la matemática, básicamente a la lógica y al álgebra. Desde 1953 estuvo en Berkeley, fue profesor desde 1957, y a partir de 1991 emérito. Pasó periodos de investigación en Hanover en el Dartmouth College del estado de New Hampshire, en el Institute for Advanced Studies de Princeton, en la universidad de Oxford, en el Reino Unido, en Colorado y en varias universidades europeas, de Yugoslavia, España y Portugal; también en Francia, en la universidad de París VII.

2.2. Docente

El relato corre a cargo de María Manzano, quien durante el curso 1977-78 asistió como alumna a sus asignaturas de *Álgebra* para estudiantes de primeros cursos de licenciatura y de *Metamatemática* para los de doctorado.

El libro de texto empleado en la primera era el de Birkhoff Mac Lane, *A Survey of Modern Algebra*, pero no seguíamos el orden del libro. Los temas fueron los habituales en un curso de Álgebra: Anillos, Cuerpos, Polinomios, Homomorfismos, Espacios vectoriales, etc. Henkin nos entregaba antes de cada clase un texto manuscrito de unas cuatro o cinco páginas que recogía de forma resumida lo que sería tratado en ella. Estaban impresas en tinta violeta, hechas con las fotocopadoras antiguas que llamábamos vietnamitas y que tanto se usaron para imprimir panfletos en nuestros años revolucionarios aquí en España. Antes de comenzar la sesión, además de las fotocopias del tema, nos daba una hoja en la que se indicaban las tareas de la semana: lectura de las notas de clase y de los correspondientes secciones del libro (señalando exactamente cuales) y una media de 8 problemas para resolver. Además de devolvernos los ejercicios corregidos, nos entregaba una fotocopia con los ejercicios resueltos por él mismo. La información detallada de todo lo que podía interesarnos en el curso era anunciada con notable antelación: las fechas de entrega de los distintos ejercicios, la de los exámenes a realizar en clase con libros y apuntes, así como sus horas de

⁴Dirigida a María Manzano.

tutoría. En los cursos de primeros años de licenciatura era muy animado en clase, jovial incluso, transmitía confianza. Sus tutorías estaban siempre concurridas.

Como hemos expresado con anterioridad, era un profesor extraordinariamente claro en sus exposiciones, aunque a veces dudaba de si era ése el modo ideal. En la entrevista ya comentada [24] manifiesta:

“That effortless way in which the ideas came made them too easy to slip away. I probably learned more densely packed material from what we called the "baby seminar", in point set topology conducted by Arthur Stone.”

Prueba de ese debate interno son estas palabras suyas que formaban parte del resumen de su curso *Metamathematics*, cito textualmente:

“Many bright students find my lectures a little slow, and they consider my concern with the machinery of logic (as distinct from the results) as pedantic. Concerning the first of these judgments, it is valid, but since many of the students are as slow-thinking as I, and the quick-thinking ones can always skip lectures and study the references, the pace as a whole is not bad –and indeed, the poorly-prepared students may find themselves struggling a bit to keep up. Concerning the second charge, however, I think it can be at least partially turned aside by adverting to pedagogical principles –which I am quite willing to explicate and discuss in office hours, or even in class if demand warrants.”

En el resumen del curso define a la metamatemática como la teoría matemática de las teorías matemáticas e introduce a las últimas como el estudio de las estructuras y sus interrelaciones. Tres clases de estructuras y sus interrelaciones se investigan en metamatemática: gramáticas formales, cálculos deductivos y semántica (denominadas lenguajes interpretados). Los lenguajes de la lógica sentencial, de primer orden así como el de la ecuacional, la multivariada y la de orden superior fueron tratados en el curso de una manera unificada. En cada caso se estudió la relación entre la noción semántica de consecuencia y la sintáctica de derivabilidad demostrándose los teoremas de corrección y completud. Es curioso que la prueba de completud de primer orden que desarrolló en clase no fuera la suya, sino empleando la reducción de Herbrand a lógica proposicional. Cito:

“Since we use the completeness of sentential logic in our proof, we effectively reduce the completeness problem for first order logic to that of sentential logic.”

El tema de la definibilidad implícita y explícita se trató con detalle y se demostraron los teoremas de Beth/Padoa que las relacionan y los de interpolación de Craig-Lyndon [11]. Los teoremas de Skolem-Löwenheim y de compacidad se demostraron y comentaron. Por supuesto que se introdujeron las nociones de

álgebra universal para relacionar estructuras; básicamente, subestructuras, homomorfismos, productos directos, y también ultraproductos. Justamente se usó la construcción de ultraproductos para demostrar compacidad. No olvidó otros temas clásicos como los de eliminación de cuantificadores, y de categoricidad. La teoría de tipos y el teorema de Gödel constituían una parte importante del curso, dos quintas partes del mismo. El lenguaje de teoría de tipos que introdujo es el basado en la identidad, muy similar al de sus trabajos ([12] y [13]) y que contiene un signo selector que permitiría expresar el axioma de elección. Las funciones recursivas, la aritmetización del lenguaje formal, la gödelización, la autorreferencia desembocaron inevitablemente en el teorema de incompletud de Gödel. El último tema fue el de las funciones y relaciones recursivas generales.

Entre 1957 y 1972 compaginó sus trabajos de investigación en matemáticas con los de investigación en la docencia de las matemáticas, a partir de 1972 se dedicó fundamentalmente a la investigación en la enseñanza de las matemáticas. Justamente durante el año 1979 con una beca Fulbright pasó una estancia en Israel, dedicada a la investigación en la docencia de la matemática. Estuvo en el *Department of Education in Science* de la *Tehnon University* en Haifa. En esta ocasión también visitó dos universidades en Egipto.

3. Obra

Nos limitaremos a destacar algunos aspectos de su obra que nos parecen más representativos de los intereses demostrados a lo largo de su vida como investigador. A la cabeza hemos situado, como parece obvio, su técnica para demostrar completud. El capítulo dedicado a la inducción responde al reconocimiento que Henkin hace de su profunda satisfacción con el artículo en que recoge sus opiniones al respecto. Finalmente hemos querido dedicar un apartado a su relación con la filosofía como una forma de reivindicar la relevancia que la buena investigación en lógica tiene en ese ámbito del conocimiento. Han quedado fuera muchas otras cosas de las que posiblemente hubiera que haber dicho algo. La principal quizá su interés por el álgebra de la lógica ([15] y [16]).

3.1. Su prueba del teorema de completud

El teorema de completud establece la adecuación entre el cálculo deductivo y la semántica. Gödel lo había resuelto positivamente para la lógica de primer orden y negativamente para cualquier sistema lógico capaz de contener la aritmética. El cálculo lambda para la teoría de tipos ([2] y [3]), con la semántica habitual sobre una jerarquía estándar de tipos era capaz de expresar la aritmética y por consiguiente no podía ser otra cosa que incompleto. Henkin demostró que si se interpretan las fórmulas de una manera menos rígida, aceptando otras jerarquías de tipos que no tengan necesariamente que contener a todas las funciones, sino sólo a las definibles, se prueba fácilmente que toda consecuencia de un conjunto de hipótesis es demostrable en el cálculo. Las fórmulas válidas en esta nueva semántica, llamada general, se reducen hasta coincidir con las

generadas por las reglas del cálculo.

Como es bien sabido la prueba de completud de Henkin se basa en encontrar un modelo para cada conjunto de sentencias Γ que tenga la propiedad de consistencia sintáctica. La demostración se hace básicamente en dos pasos:

1. Se extiende el conjunto consistente a uno máximamente consistente y ejemplificado
2. Se construye el modelo que las fórmulas de este conjunto máximamente consistente están describiendo, ya que un conjunto máximamente consistente es una descripción pormenorizada de una estructura.

Curiosamente, el modelo emplea a las propias fórmulas como objetos, concretamente sus elementos son clases de equivalencia de fórmulas, siendo la relación de equivalencia la de derivabilidad formal.

Es interesante saber cómo lo descubrió. El lenguaje de Church de teoría de tipos con su signo λ de abstracción funcional, que permite nombrar a las funciones y distinguir la función como objeto matemático del conjunto de sus valores, le atrajo sobremedida. Contrastaba con el caso del cálculo de Gödel denominado PM que no permite nombrarlos, aunque naturalmente las fórmulas con variables libres definen conjuntos y relaciones.

Jerarquía de tipos Los tipos están estructurados en una jerarquía que cuenta con:

- $\mathcal{D}_1$ es un conjunto no vacío; el de individuos de la jerarquía.
- $\mathcal{D}_0$ es el dominio de valores de verdad (como estamos en lógica binaria, dichos valores se reducen a V y F)
- El resto de los dominios se construyen a partir de los tipos básicos: si $\mathcal{D}_\alpha$ y $\mathcal{D}_\beta$ han sido construidos ya, definimos $\mathcal{D}_{(\alpha\beta)}$ como el dominio formado por todas las funciones de $\mathcal{D}_\beta$ en $\mathcal{D}_\alpha$. Los conjuntos se representan mediante funciones características y así $\mathcal{D}_{(0\beta)}$ es el conjunto potencia de $\mathcal{D}_\beta$, formado por todos los subconjuntos de $\mathcal{D}_\beta$.

Para hablar acerca de esta jerarquía se introduce un lenguaje formal.

Alfabeto Contamos con variables de diferentes tipos, con un superíndice que lo indica. En este artículo de Church [2] se introducen también las constantes $N_{(00)}$ y $A_{((00)0)}$ (para la negación y la conjunción) y $\Pi_{(0(0\alpha))}$ (nos permitirá expresar cuantificación). Finalmente $\iota_{(\alpha(0\alpha))}$ es un selector.

Expresiones Hay dos formas fundamentales de formar expresiones:

- *Las simples*: Fórmulas o constantes solas son fórmulas cuyo tipo es el del índice.

- *Las compuestas* son de dos clases: (1) Con λ formamos funciones. Si X^β es una variable y M^α es una expresión, $(\lambda X^\beta M^\alpha)$ es una expresión de tipo $(\alpha\beta)$. (2) Las otras corresponden a la asignación de valor bajo una función: si $F^{(\alpha\beta)}$ y B^β son expresiones, $F^{(\alpha\beta)}B^\beta$ es una expresión de tipo α .

Dice Henkin:

I decided to try to see just which objects of the hierarchy of types did have names in T.

...

As I struggled to see the action of functions more clearly in this way, I was struck by the realization that I have used λ -conversion, one of the formal rules of inference in Church's deductive system for the language of the Theory T. All my efforts had been directed toward interpretations of the formal language, and now my attention was suddenly drawn to the fact that these were related to the formal deductive system for that language.

Es decir, pretendía representarse mentalmente las funciones de la jerarquía de tipos que pueden ser nombradas mediante expresiones con λ . Para visualizarlo, consideró una jerarquía de tipos cuyo universo de individuos $\mathcal{D}_1$ fuera el de los números naturales y con una constante como nombre para el cero y otra para la función del siguiente. En el universo $\mathcal{D}_{01}$ claramente habría objetos tanto con nombre como sin él, porque con un universo de individuos numerable, el de conjuntos de individuos es supnumerable, pero los conjuntos que pueden ser nombrados es sólo numerable. Se embarcó en el proceso recursivo de encontrar un objeto de la jerarquía de tipos como denotación para cada fórmula y las dificultades aparecieron con el selector $\iota_{\alpha(0\alpha)}$ cuya interpretación debía ser una función de elección.

"However, when I tackled the problem of describing some *particular* choice function to serve as denotation of $\iota_{(01)(0(01))}$, I was stumped.

...

Could I make precise what it might mean to say that it is "intrinsically impossible" to specify any particular choice function for non-empty sets of real numbers? No, I really couldn't.

Desarrolló la jerarquía de los objetos que poseen nombre en la jerarquía de tipos y se dió cuenta que para eliminar repeticiones, estaba usando las reglas de conversión lambda y que por lo tanto implicaba a la sintaxis y al cálculo. Concretamente, para identificar a los objetos nombrados mediante M^α y N^α usaba al cálculo como criterio; en especial que, $\vdash M^\alpha = N^\alpha$.

"In particular, I saw that using the symbol $\vdash$ for formal provability (or derivability) as usual, we can define for each type symbol α a domain $\mathcal{D}'_\alpha$

en el que cada sentencia del lenguaje formal adquiere denotación, cada expresión funcional denota una función de la jerarquía y las expresiones deductivamente equivalentes denotan el mismo objeto. Para conseguirlo los dominios están formados por clases de equivalencia de fórmulas,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_\alpha &= \{[M^\alpha] \mid M^\alpha \text{ es una fórmula de tipo } \alpha\} \\ &\text{siendo} \\ [M^\alpha] &= \{N^\alpha \mid \vdash M^\alpha = N^\alpha\}\end{aligned}$$

Finalmente, la prueba se cerró al darse cuenta de que para que el universo de los objetos nombrados mediante proposiciones (el de los valores de verdad) se redujera a sólo dos habría de ampliar los axiomas hasta que constituyeran un conjunto máximamente consistente, de suerte que las clases de equivalencia inducidas por la relación $\vdash M^\alpha = N^\alpha$ se redujeran a dos.

“In particular, if M^0 is a Gödel sentence such that neither $\vdash M^0$ nor $\vdash \sim M^0$, then $(0_1 = 0_1)'$, $(\sim 0_1 = 0_1)'$, and $M^{0'}$ are three distinct elements of $\mathcal{D}'_0$.”

Inmediatamente se dio cuenta de que así había formulado y probado el que en su tesis sería el Teorema VI

“If S is any formally consistent set of $\mathcal{T}$ sentences, then there is a denumerable general model $\mathcal{M}$ of $\mathcal{T}$ for which each sentence of S is true. (Each domain $\mathcal{D}_n$ of $\mathcal{M}$ is denumerable.”

del que se seguía un teorema análogo al de completud para la teoría de tipos. Para un cálculo semejante, PM, Gödel había demostrado su teorema de incompletud.

Curiosamente, la prueba de completud de la lógica de primer orden la obtuvo posteriormente, readaptando el argumento encontrado para la teoría de tipos. Otra curiosidad que el propio Henkin señala es la naturaleza no constructiva de la prueba viniendo él de una tradición tan fuertemente ligada a ella como la que Church encarnaba.

3.2. La inducción matemática

Fruto de ese énfasis que él puso en la enseñanza, es su creación de los modelos inductivos. En comunicación personal afirma que *On mathematical induction*, publicado en 1960 [10], es su favorito de entre sus artículos de carácter más bien panorámico y no exclusivamente dirigido a especialistas.

Peano axiomatizó la teoría de los números naturales. Para hacerlo, partió de términos primitivos indefinibles —concretamente, los de número natural, cero y función del siguiente— y mediante tres axiomas, sintetizó los hechos fundamentales. Entre dichos axiomas está el de inducción, que afirma que todo subconjunto de los naturales, cerrado por la operación del siguiente y al que pertenezca el cero, es justamente el conjunto de todos los naturales. Aunque

estos axiomas de la teoría de los números naturales son muy importantes, no se siguen de ellos solos los teoremas más interesantes de dicha teoría. En la mayoría de estos teoremas aparecen las operaciones de adición, multiplicación,... etc.

Peano pensaba que al axiomatizar una teoría no basta con organizar los hechos mediante leyes axiomáticas, hay que organizar también los conceptos, utilizando leyes de definición. Concretamente, podemos definir recursivamente la adición mediante

1. $x + 0 = x$
2. $x + Sy = S(x + y)$, para todo x, y de $\mathbb{N}$

Pero esta definición debe justificarse mediante un teorema en el que se establezca la existencia de una única operación que satisfaga las ecuaciones anteriores.

Una mala argumentación para demostrarlo es la siguiente: Elijamos un $x \in \mathbb{N}$ cualquiera. Definamos un subconjunto G de $\mathbb{N}$, poniendo en G los elementos $y \in \mathbb{N}$ para los que $x + y$ está definido mediante las ecuaciones anteriores. No es difícil demostrar que $0 \in G$ y que $\forall(y \in G \rightarrow Sy \in G)$. Usando ahora el axioma de inducción, concluimos que $x + y$ está definida para todo $y \in \mathbb{N}$, pues $G = \mathbb{N}$.

¿Por qué está mal esta prueba?

Esta era la pregunta que el colega de Henkin le planteó. Para demostrárselo, Henkin le hizo observar que en la prueba sólo se utiliza el tercer axioma, y que caso de ser correcta, sería aplicable no sólo a los modelos que satisfacen todos los axiomas de Peano, sino a los que satisfacen únicamente el de inducción. A éstos Henkin los llamó “*Modelos Inductivos*”, y probó que no todas las operaciones recursivas son definibles en ellos; por ejemplo, falla la exponenciación. Los modelos inductivos resultan tener una estructura matemática bastante sencilla: los hay estándar; esto es, isomorfos a los números naturales, pero también no estándar. Estos últimos tienen asimismo una estructura sencilla: o bien son ciclos -concretamente, $\mathbb{Z}$ módulo n - o bien son lo que Henkin denominó “*cucharas*”; esto es, tienen un mango seguido de un ciclo. El motivo está en que el axioma de inducción nunca se cumple sólo, pues arrastra consigo al primero o al segundo axioma de Peano. Esto no quiere decir que los axiomas de Peano sean redundantes, que no sean formalmente independientes, esto es, cada uno independiente de los otros dos.

Todos estos hechos han sido abordados por Henkin en su artículo sobre la inducción matemática [10], que es, desde nuestro punto de vista el mejor artículo de lógica que ofrecer a los alumnos como primera lectura de un artículo “*de verdad*”.

3.3. Filosofía

Hablar de una contribución genuinamente filosófica en la obra de Henkin es sin duda exagerado. El momento histórico en que se desarrolla la mayor parte

de su producción parece haber dejado atrás ya esa especie de vocación mixta representada de forma clara en figuras como Russell, Gödel, Turing o Quine. Sin embargo, Henkin afronta a lo largo de su obra problemas de gran profundidad filosófica de los que sin duda alguna es perfectamente consciente. La referencia de los objetos de la lógica y de la matemática es, seguramente, uno de los que trata con mayor detenimiento al aceptar los términos de un debate planteado por Quine y Goodman a principios de la década de 1950. De ello hablaremos más adelante. Pero tampoco elude el compromiso filosófico cuando analiza el comportamiento del axioma de inducción en ciertos desarrollos o cuando se plantea el carácter no constructivo de determinadas técnicas empleadas en la obtención de algunos de sus resultados. Su amplia contribución a la teoría de modelos permite observar otro campo de acción para el debate filosófico del cual ya se ha dicho algo pero quizá aún habría que decir mucho más. Pienso en todos aquellos resultados que nos dicen de qué forman significan nuestros lenguajes cuando deliberadamente se ha eliminado de ellos todo posible componente de ambigüedad. Henkin demostró a lo largo de su carrera investigadora un sutil olfato para averiguar formas insólitas de significar y referirse a la realidad. Sus trabajos en modelos no-estándar y sobre todo su uso para diseñar un teorema de completud en la teoría de tipos contienen considerables enseñanzas relativas al modo en que el lenguaje significa. El redimiento filosófico de estas cuestiones parece indudable y quizá debamos preguñarnos por qué no se ha hecho más al respecto. La complejidad técnica de estas materias y el tradicional hermetismo de la comunidad lógica pueden no haber ayudado mucho. Pero también hay algo de responsabilidad en la ausencia de obras de divulgación o traducción que otros resultados sí han tenido. Pienso, obviamente, en Gödel y sus resultados de incompletitud o en Turing y su teoría matemática acerca de la noción de algoritmo.

La obra más directamente relacionada con la filosofía es un artículo titulado *“Some Notes on Nominalism”* [8] que aparece en el Journal of Symbolic Logic en 1953 y de la cual habría una secuela posterior, 1955, en forma de conferencia [9]. Como el propio Henkin se apresura a aclarar, se trata de una contestación a dos trabajos aparecidos en ese medio poco tiempo antes, en concreto en 1947. El primero de ellos, *“On universals”* es firmado por Quine y el segundo, *“Steps toward a constructive nominalism”* por Quine y Nelson Goodman conjuntamente. Estos trabajos, incluido el de Henkin, se ubican en una tradición quizá no tan popular en nuestros días. Se trata de toda la investigación desarrollada en torno a los sistemas más característicos de la lógica en búsqueda de instrucciones para aclarar materias de clara filiación ontológica o metafísica. La cuestión que Henkin aborda en *“Some Notes...”* gira en torno a la posibilidad de hacer una lectura nominalista de los modelos de la matemática clásica, problema que es, en realidad, el que Quine y Goodman se vienen planteando desde años atrás. La conclusión a la que llegan estos autores es pesimista debido en parte a un contraargumento basado en la posibilidad de representar una prueba por diagonalización en lógica de segundo orden. El problema trata, en realidad, de la cardinalidad de los modelos de aquellos lenguajes que pueden expresar en su interior la existencia de clases no enumerables. Para Quine y Goodman este

argumento parece mostrar la dificultad de hallar una interpretación nominalista de la teoría de modelos de la matemática estándar al verse ésta limitada a magnitudes enumerables. La posición de Henkin es extremadamente fina en este punto. Estableciendo una similitud con la paradoja de Löwenheim-Skolem Henkin propone una interpretación no estándar del concepto de cardinal capaz de salvar la situación. No obstante, esto no prueba nada, sino simplemente la posibilidad de seguir adelante con el programa. La construcción de modelos adecuados para la lógica de segundo orden que propone Henkin a continuación parece sacar partido de lo que en realidad es el núcleo de la técnica de completud desarrollada previamente para teoría de tipos y para la lógica de primer orden. Se trata de construir entidades de tipo lingüístico como modelos del lenguaje de la lógica de orden superior procediendo a aplicar una construcción inductiva que va añadiendo en pasos sucesivos las entidades requeridas. El resultado es un modelo nominalista que depende, no obstante, de la enumeración elegida para las fórmulas del lenguaje. La noción de verdad lógica es independiente, no obstante, de la enumeración de partida.

La solución obtenida pasa por encima de la primera objeción hecha por Quine y Goodman relativa a la expresión de magnitudes no enumerables pero se estrella contra la que pone en cuestión la existencia de magnitudes infinitas de cualquier tipo. En particular la objeción se aplicaría a aquellas entidades que Henkin ha tomado como objetos del dominio de sus modelos, las marcas que constituyen nuevos objetos del lenguaje y a las cuales él denomina *inscriptions*. Henkin reconoce abiertamente que esa objeción no puede ser burlada por medios formales iniciando entonces una discusión genuinamente filosófica sobre la aceptabilidad de ciertas *pretenses* en el dominio de la lógica y las matemáticas. La que importa, obviamente, es la que se refiere a la conveniencia de considerar a modo de ficción oportuna la existencia de magnitudes infinitas. Así afirma

“In short, infinite collections are useful because they serve as a model to approximate finite collections. In a sense, we “make believe” that some finite set is infinite to simplify some computation connected with it.”

Es una pena que no nos aclare ahí en qué medida el supuesto de que una magnitud es infinita puede ayudar a simplificar su manejo y en particular los procesos de cálculo relacionados con ella. O que aclare de qué forma este tipo de supuestos afectan al alcance real de un cálculo. En este punto Henkin comunica claramente esa sensación que aqueja a muchos de los lógicos de su generación y que consiste en marcarse un tiempo y un límite para los asuntos propiamente filosóficos. Algo que quizá no estaba presente en algunos de los padres fundadores, sobre todo Russell o Gödel y que ha marcado el punto hasta el que un lógico puede hacer filosofía. Por eso me quedo con aquella parte en la que son las matemáticas las que impulsan el argumento y en la que Henkin tiene aún mucho que decir.

4. Su influencia

Vamos a destacar cómo se relacionan los *Modelos Generales* de Henkin y los *Teoremas de Representación*, dicho de otro modo: la *Teoría de la Correspondencia* y los *Modelos No-Estándar*. Una explicación más detallada de este planteamiento puede consultarse en el artículo de María Manzano “*Divergencia y rivalidad entre lógicas*” [22].

Actualmente la proliferación de lógicas usadas en Filosofía, Informática, Lingüística, Matemáticas e Informática hacen urgente y muy necesaria la reducción operativa de todas ellas. Muchas lógicas no clásicas, especialmente si admiten una semántica de modelos de Kripke, pueden representarse adecuadamente como teorías de segundo orden, pero si usamos una semántica no estándar para estas fórmulas de segundo orden, la lógica marco deviene en lógica multivariada⁵. Atribuimos la mayor parte de las ideas que se manejan en este planteamiento a dos artículos de Henkin: “*Completeness in the theory of types*” de 1950 y a su artículo de 1953, “*Banishing the rule of substitution for functional variables*”.

¿Por qué MSL?, se podría preguntar.

MSL es una lógica muy flexible, resultando ser la elección obvia cuando se pretende tratar con más de un tipo de objetos. Pero además de ser la lógica *natural* para estos casos, es asimismo una lógica *eficaz* ya que su teoría de la prueba está bien desarrollada (posee un cálculo no sólo correcto, sino también completo). Y lo que es más importante, MSL puede ser usada como *marco unificador* en el que situar a otras lógicas.

El objetivo es triple:

- Usar en todos los casos un único cálculo deductivo y a ser posible un único demostrador de teoremas;
- Arrastrar algunas de las metapropiedades desde una lógica marco, tal y como puede ser la lógica multivariada, MSL, hasta otras lógicas en estudio;
- Comparar entre sí a las diferentes lógicas usando la comparación entre las teorías multivariadas que las representen.

Este planteamiento es tan obvio e intuitivo que sólo precisa de un poco de sentido común para entender la construcción. Además, si se modifican los ingredientes básicos, la receta puede adaptarse para cocinar diferentes platos. Es difícil rastrear el origen y desarrollo de este enfoque, ya que cada lógica no clásica contó con su *dobles* clásica casi desde su nacimiento. Sin embargo, nos gusta atribuir la mayoría de las ideas empleadas en este planteamiento a los dos artículos de Henkin [5] y [7].

Sin embargo, no quisiéramos inducir a engaño. No hay en su mencionado artículo de 1950 traducciones de fórmulas, ni tan siquiera aparece explícitamente

⁵Los detalles de esta transformación pueden verse en **Extensions of first order logic** [20], en él se presentan varias extensiones de la lógica de primer orden y se prueba la tesis de que la mayoría de los sistemas lógicos “razonables” se traducen de forma natural a la lógica multivariada.

el lenguaje y cálculo multivariado. En conexión con la lógica de orden superior, el cálculo multivariado aparece, que se sepa, por primera vez en el artículo de 1953. En él Henkin propone el axioma de definición de clases y relaciones (comprehensión) como alternativa a la regla de sustitución usada en los cálculos anteriormente propuestos para la lógica superior. Si de este cálculo se elimina el axioma de comprensión obtenemos el cálculo MSL.

Hay otra idea, esta vez tomada del artículo de 1953, que también resulta interesante y que es la siguiente: Si debilitamos el axioma de comprensión (por ejemplo, lo restringimos a fórmulas de primer orden, o a traducciones de fórmulas dinámicas o modales, o a cualquier otro conjunto recursivo) obtenemos cálculos entre MSL y SOL. Y resulta fácil encontrarles su semántica correspondiente. Naturalmente, la clase de estructuras que les corresponde estará situada entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{GS}$. La nueva lógica, llamémosla XL, será también completa. El motivo es que esta clase de modelos es axiomatizable.

Agradecimientos 1 *Este artículo está especialmente dedicado a dos investigadores con los que nunca más podremos hablar de lógica, Leon Henkin, a cuya memoria dedicamos este artículo y Emilio Díaz, de quien celebramos su aniversario.*

Referencias

- [1] Alonso, E y Manzano, M. [2005]. “*Diagonalization and Church’s Thesis: Kleene’s homework*”. **History and Philosophy of Logic**, volumen 26, número 2. pp 93-113
- [2] Church, A. [1940]. “*A formulation of the simple theory of types*”. **The Journal of Symbolic Logic**. vol. 5, pp. 56-68.
- [3] Church, A. [1941]. *The calculi of lambda-conversion*. (Annals of Mathematical Studies. num. 6). Princeton: Princeton University Press. USA.
- [4] Church, A. [1951]. “*A formulation of the logic of sense and denotation*”. **Structure, Methods and Meaning**, Essays in Honor of Henry M. Sheffer, New York. pp. 3-24. (Revisado en NOUS: vol. 7 (1973), pp. 24-33; vol. 8 (1974), pp. 135-156; and vol. 27 (1993), pp. 141-157.)
- [5] Henkin, L. [1949]. “*The completeness of the first order functional calculus*”. **The Journal of Symbolic Logic**. vol. 14, pp. 159-166.
- [6] Henkin, L. [1950]. “*Completeness in the theory of types*”. **The Journal of Symbolic Logic**. vol. 15. pp. 81-91.
- [7] Henkin, L. [1953]. “*Banishing the Rule of Substitution for Functional Variables*”. **The Journal of Symbolic Logic**. 18(3): 201-208.
- [8] Henkin, L. [1953]. “*Some Notes on Nominalism*”. **The Journal of Symbolic Logic**. 18(1): 19-29.

- [9] Henkin, L. [1953]. "*The Nominalist Interpretation of Mathematical Language*". **Bulletin de la Société Mathématique de Belgique**.
- [10] Henkin, L. [1960]. "*On mathematical induction*". **The American Mathematical Monthly**. vol 67, num. 4 pp. 323-338.
- [11] Henkin, L. [1963]. "*An Extension of the Craig-Lyndon Interpolation theorem*". **The Journal of Symbolic Logic**. 28(3): 201-216 (1963)
- [12] Henkin, L. [1963]. "*A theory of propositional types*". **Fundamenta mathematicae**. vol. 52. pp. 323-344.
- [13] Henkin, L. [1975]. "*Identity as a logical primitive*". **Philosophia**. vol. 5. pp. 31-45.
- [14] Henkin, L. [1996]. "*The discovery of my completeness proofs*", Dedicated to my teacher, Alonzo Church, in his 91st year, **Bulletin of Symbolic Logic**, vol. 2, Number 2, June 1996. (presentado el 24 de Agosto de 1993 en el XIX International Congress of History of Science, Zaragoza, Spain).
- [15] Henkin, L. y Tarski, A. [1961]. "*Cylindric Algebras*", Proceedings of Symposium in Pure Mathematics, vol II: Lattice Theory. R. P. Dilworth (ed.), pp 83-113
- [16] Henkin, L. and Monk, J.D. and Tarski, A. [1971]. **Cylindric Algebras**, Part I. North-Holland. ISBN 978-0-7204-2043-2.
- [17] Manzano, M. [1980]. *Teoría de Tipos*. Barcelona: Ediciones de la Universidad de Barcelona.
- [18] Manzano, M. [1982]. "*Los sistemas generales*". en **Estudios de Lógica y Filosofía de la Ciencia**. Serie: Manuales Universitarios. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.
- [19] Manzano, M. [1983]. *Conferències del professor Leon Henkin de la Universitat de California (Berkeley)*". En *Ciència. Revista catalana de Ciència y tecnologia*. Vol 24
- [20] Manzano, M. [1996]. *Extensions of First Order Logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge: Cambridge University Press.
- [21] Manzano, M. [1997]. "*Alonzo Church: His Life, His Work and Some of His Miracles*". **History and Philosophy of Logic**, vol 18, pp 211-232.
- [22] Manzano, M. [2004]. "*Divergencia y rivalidad entre lógicas*." En **Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía**. Volumen 27 de Filosofía de la Lógica. Raúl Orayen y Alberto Moretti eds. Editorial Trotta. España.
- [23] The Princeton Mathematics Community in the 1930s (PMC14)
- [24] The Princeton Mathematics Community in the 1930s (PMC19)

- [25] Russell, B. [1908]. *“Mathematical Logic as based in theory of types”*. in van Heijenoort, J. ed. [1967]
- [26] Russell, B. y Whitehead, A. [1910-13]. *Principia Mathematica*. vol. 1-3. Cambridge: Cambridge University Press.