

La noción abstracta de consecuencia lógica

Gladys Palau
Universidad de Buenos Aires
Argentina
gpalau@filo.uba.ar

24 de septiembre de 2002

1. Introducción

En la lógica contemporánea se habla de dos nociones de consecuencia: por un lado, la noción de consecuencia sintáctica, comúnmente identificada con la noción de deducibilidad, representada por el signo de deductor $\vdash$; y por el otro, la noción de consecuencia semántica, identificada generalmente con la noción de consecuencia lógica y representada por el signo $\models$. Ambas acepciones han dado lugar a distintos enfoques de la lógica que tienen sus defensores y detractores, según sea la concepción filosófica que se sostenga respecto de la lógica.

El enfoque sintáctico se inicia a comienzos de siglo, con la idea de construir un lenguaje para la matemática que rescate sólo los aspectos puramente formales y prescindiera totalmente del significado y de la verdad de los enunciados. Tal método permite obtener un cálculo carente de interpretación o *sistema logístico* [Church, 1956]. Es sabido que este método fue empleado por primera vez en el campo de la lógica por Frege en su *Begriffsschrift*, de 1879¹, se encuentran indicios de él en *The Principles of Mathematics* de Russell de 1903 y se plasma en *Principia Mathematica*. A la construcción de este enfoque deben agregarse las investigaciones de Hilbert en el campo de la fundamentación de la geometría en su *Grundlagen der Geometrie* de 1899, obra en la cual introduce el término *metamatemática* para referirse a la disciplina que, desde un metalenguaje específico, toma como investigación al lenguaje objeto de la matemática.

En particular, el concepto de sintaxis fue introducido por Carnap², quien en *The Logical Syntax of Language* de 1934 [1937, págs. 27-28], dió por primera vez la más clara exposición de la noción de consecuencia sintáctica desde el nivel metalingüístico, al definirla en términos de derivabilidad o derivación. En efecto, al tratar la función esencial que las reglas de transformación tienen en la construcción de un cálculo, i.e., la de determinar en qué condiciones una sentencia es consecuencia de otra u otras, Carnap propone utilizar la noción de *derivable*. Dado un lenguaje L , una *derivación* $A_1, A_2, \dots, A_n$ (para $n \geq 0$), es una serie (finita) de sentencias, tal que cada sentencia de la serie es o una de las premisas, o una sentencia-definición (i.e., axioma) o es directamente derivable (i.e., por la

aplicación de reglas de inferencia) de una o varias sentencias anteriores. Si A_n es la sentencia final de la derivación, entonces se dice que A_n es derivable de $A_1, A_2, \dots, A_m$ (i.e., $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash A_n$). Si el conjunto de premisas fuera vacío ($\emptyset \vdash A_n$), entonces A_n es un teorema que expresa un enunciado analítico (i.e., una verdad lógica). Alchourrón [1995] hace notar que de esta noción se infieren fácilmente las propiedades que caracterizan actualmente la noción de deducibilidad o consecuencia lógica sintáctica y cuyas demostraciones se dejan para el lector:

- $\vdash 1.$ $\Gamma \vdash A$, si $A \in \Gamma$ (Reflexividad generalizada)
- $\vdash 2.$ Si $\Gamma \vdash B$ y $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$, entonces $\Gamma \vdash A$ (Corte)
- $\vdash 3.$ Si $\Gamma \vdash A$, entonces $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$ (Monotonía)

Por otra parte, el enfoque semántico, iniciado tal vez por las lógicas plurivalentes de Łukasiewicz en 1930, se tematiza a partir de los trabajos de Tarski sobre la noción de verdad (en *The Concept of Truth on Formalized Languages*) y de consecuencia lógica (en *On the Concept of Logical Consequence*). Si bien la definición de consecuencia lógica semántica que se incluye en las obras actuales de lógica no es exactamente la originaria de Tarski y más aún, ésta haya sido objeto de crítica por filósofos actuales como Etchemendy [1990], es a partir de los conceptos que presenta en los mencionados trabajos, que se elaboran los actuales conceptos de interpretación, verdad bajo una interpretación, verdad lógica y consecuencia lógica semántica. Esta última, es comúnmente formulada de la siguiente manera: $\Gamma \models A$ si y sólo si toda interpretación que hace verdaderos a los enunciados de Γ , hace verdadero al enunciado A y posee las siguientes propiedades:

- $\models 1.$ $\Gamma \models A$ si $A \in \Gamma$ (Reflexividad generalizada)
- $\models 2.$ Si $\Gamma \models B$ y $\Gamma \cup \{B\} \models A$, entonces $\Gamma \models A$ (Corte)
- $\models 3.$ Si $\Gamma \models A$, entonces $\Gamma \cup \{B\} \models A$ (Monotonía)

Es sabido que ambas caracterizaciones de la noción de consecuencia lógica convergen en los resultados de consistencia y completitud para la lógica de orden uno, por lo cual, $\models 1, \models 2$ y $\models 3$ pueden ser consideradas como las contrapartidas semánticas de las propiedades sintácticas dadas para la noción de consecuencia sintáctica.

Alchourrón, en *Concepciones de la lógica*, analiza la problemática de la primacía del enfoque sintáctico sobre el semántico y viceversa, mostrando las bondades y dificultades de cada uno de ellos y presentando luego al enfoque abstracto de Tarski como destinado a capturar las propiedades comunes a ambos tipos de enfoques.

Nosotros no hemos creído necesario entrar en esta polémica, ya que en este trabajo adoptamos la posición de R. Wojcicki [1984], según la cual la diferencia entre el enfoque sintáctico y semántico de la lógica es más bien de naturaleza filosófica que lógica. Esbozadas en forma esquemática, las razones que fundamentan esta posición son las siguientes:

- (i) el análisis que se puede llevar a cabo en términos de verdad, puede realizarse también en términos de teoremas, con la ventaja manifiesta de poder analizar la estructura formal de los sistemas lógicos de manera más transparente, ya que su análisis es despojado de las connotaciones filosóficas que suelen dificultarlo; (ii) las valuaciones admisibles no necesariamente deben ser inter-

pretadas como funciones que asignan valores de verdad a las sentencias; (iii) la cuestión de la verdad, que hasta ahora parece haber sido el centro de la actividad científica, puede ser reemplazada por la búsqueda de “buenas” teorías (en el sentido de teorías consistentes con alto grado de aceptabilidad y poder explicativo); y (iv) desde un punto de vista pragmático, la validez lógica puede ser vista como una noción pragmática, definida en términos de aceptabilidad racional, de tal forma que la inferencia $X \vdash A$ es considerada lógicamente válida si para todo individuo que acepte todos los enunciados de X , debe también aceptar A , a menos que desee actuar irracionalmente, postulada la existencia de un individuo “ideal”. Esta última posición cobra valor si se tiene en cuenta la existencia de enunciados que pueden no admitir valores de verdad, como el caso tradicional de las normas y se ha tornado común en las semánticas epistémicas propuestas como interpretación para ciertos sistemas lógicos de Inteligencia Artificial.[R.Carnota, 1995]

En la sección 2 analizaremos el enfoque abstracto de Tarski, del cual la versión sintáctica y semántica de la noción de consecuencia serán vistas como especificaciones y en la sección 3 esbozaremos la definición de la noción de consecuencia lógica sintáctica vía la implicación estricta de C.I.Lewis, sólo con la intención de mostrarla como un antecedente de la lógica de secuentes de Gentzen. Finalmente la sección 4 la dedicaremos a la exposición de los sistemas de Gentzen, y en particular, de su lógica de secuencias LK para la lógica proposicional clásica, con el propósito de exponer cómo se expresa en dicho cálculo la noción de consecuencia lógica para la lógica proposicional clásica.