

Un sistema logístico para la lógica proposicional. Consistencia y completitud.

Carlos E. Alchourrón
Universidad de Buenos Aires. Argentina

23 de septiembre de 2002

Resumen

El Dr. Carlos Alchourrón falleció el 13 de enero de 1996. El presente trabajo ha sido reconstruido por docentes y alumnos de su cátedra de Lógica de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Buenos Aires. Gladys Palau.

1. Consideraciones previas.

Al elaborar un sistema axiomático para la lógica proposicional nos proponemos la tarea de presentar en forma exhaustiva 1) la totalidad de las leyes lógicas que fundan su verdad exclusivamente en la significación específica que la lógica proposicional atribuye a las conectivas proposicionales ‘y’, ‘o’, ‘no’, ‘si ... entonces’, ‘si y sólo si’, etc, y 2) la totalidad de las inferencias que fundan su validez exclusivamente en el significado de dichas conectivas. Para nosotros, la presentación de tal sistema axiomático no constituye en estos momentos una finalidad en sí, sino que representa solamente el medio indispensable para una adecuada discusión del problema filosófico de la justificación y fundamentación de una extensa e importante provincia de la lógica (la lógica proposicional). No podremos estar seguros de que nuestra justificación sea completa y no sólo parcial, si no tenemos a nuestra disposición un medio que nos garantice que nada de lo que pretendemos fundamentar ha quedado inadvertidamente fuera de nuestra consideración. Estas observaciones previas destinadas a fijar con claridad los propósitos y finalidades de nuestra labor, nos permiten comenzar el análisis pormenorizado de un sistema axiomático sin temor de que sus detalles nos hagan olvidar el carácter instrumental que la presentación de tal sistema representa en nuestra exposición.

1.1. La base del sistema axiomático.

Un sistema axiomático puede considerarse como un lenguaje esquemático en el que se trata de ordenar deductivamente un conjunto de enunciados. Por consiguiente, al presentarlo deberá especificarse con todo rigor los siguientes elementos: 1) los símbolos que pueden figurar en los enunciados del sistema; 2) la forma en que dichos símbolos deben figurar en los enunciados, o lo que es lo mismo, la forma que debe presentar un conjunto de símbolos para constituir un enunciado; 3) la enunciación explícita de cuáles enunciados serán considerados como axiomas dentro del sistema; 4) una caracterización de los procesos admitidos en el sistema para inferir unos enunciados de otros; y por último 5) la especificación de cuándo un enunciado será considerado un teorema del sistema, y cuándo se lo considerará como conclusión válida a partir de ciertas premisas.

Aún cuando un sistema axiomático contiene entre sus elementos un conjunto de enunciados, tendremos que distinguir con mucho cuidado los enunciados que pertenecen al sistema, de los enunciados que utilizamos para exponer las propiedades que poseen tanto los enunciados y símbolos del sistema como el sistema mismo en su totalidad. Del sistema axiomático que expondremos diremos que es el *lenguaje objeto* de nuestras consideraciones, y del lenguaje al que pertenecen los enunciados en que expresemos dichas consideraciones, diremos que es el *metalenguaje* usado para hablar acerca del sistema axiomático. En general en toda investigación lingüística se llama *lenguaje objeto*, de acuerdo a la terminología lógica contemporánea, al lenguaje investigado, y *metalenguaje* al que se usa en la investigación para hablar acerca del lenguaje objeto de la misma. El metalenguaje que utilizaremos para hablar acerca del sistema axiomático será el lenguaje cotidiano complementado con algunas expresiones especiales entre las que figurarán las siguientes: 1) las primeras letras del alfabeto mayúsculas $A, B, C, \dots$ serán usadas como variables metalingüísticas para referirnos a los enunciados del sistema axiomático a construir, tales variables, por lo tanto, no pertenecen a dicho sistema, sino al metalenguaje usado para hablar acerca del mismo; 2) las primeras letras del alfabeto minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ serán usadas como variables metalingüísticas para referirnos a las variables del sistema axiomático, y por lo tanto, tampoco pertenecen a dicho sistema sino al metalenguaje.

Con estos elementos, estamos ya en condiciones de exponer la base del sistema axiomático que vamos a discutir. De acuerdo al esquema que indicamos anteriormente lo primero a suministrar es el conjunto de los símbolos del sistema.

1.2. Símbolos del sistema.

Entre los símbolos del sistema incluiremos, en primer lugar, a los símbolos que representan la negación y el condicional material, conjuntamente con el paréntesis izquierdo y el derecho. Es decir:

$$\neg, \rightarrow, (,)$$

En segundo término serán también considerados como símbolos del sistema cada uno de los integrantes de la siguiente lista infinita de variables:

$$p, q, r, s \quad p_1, q_1, r_1, s_1 \quad p_2, q_2 \dots\dots\dots$$

Con ésto completamos la exposición de los símbolos de nuestro sistema, y pasamos a considerar las posibles formas que debe presentar un conjunto de símbolos para constituir un enunciado del mismo. Con este propósito presentamos la siguiente caracterización de sus enunciados.

1.3. Reglas de formación de enunciados.

Serán considerados enunciados del sistema:

- (1) Cada una de las variables del sistema individualmente considerada. Así por ejemplo tanto ' p ', como ' q ', como ' r ', son enunciados del sistema.
- (2) El resultado de anteponerle el signo de negación a un enunciado del sistema. Dicho con más precisión: Si A es un enunciado, $(\neg A)$ es un enunciado.
- (3) El resultado de colocar el símbolo del condicional material entre dos enunciados y encerrar la totalidad así obtenida entre paréntesis. Con más precisión: Si A y B son dos enunciados cualesquiera, entonces $(A \rightarrow B)$ es también un enunciado.

Estas tres reglas caracterizan con precisión los enunciados del sistema. Así por ejemplo son enunciados cada una de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} &p \\ &(\neg q) \\ &(p \rightarrow (\neg q)) \\ &(\neg(p \rightarrow (\neg q))) \\ &(\neg\neg(p \rightarrow (\neg q))) \\ &(\neg\neg((p \rightarrow (\neg q)) \rightarrow (\neg q))) \end{aligned}$$

La primera es un enunciado en virtud de la regla de formación (1), la segunda en virtud de la regla (2), la tercera de la regla (3), la cuarta y quinta nuevamente en virtud de la regla (2), y así sucesivamente. A fin de facilitar la lectura de ciertas expresiones, se convendrá 1) omitir los paréntesis externos, de tal forma que en lugar de escribir $(\neg A)$, escribiremos $\neg A$ y en lugar de $(A \rightarrow B)$ escribiremos $A \rightarrow B$ y 2) el símbolo de negación $\neg$ se aplicará al enunciado más simple que le sigue. Por ejemplo la fórmula $(\neg\neg((p \rightarrow (\neg q)) \rightarrow (\neg q)))$ la escribiremos $\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q$.

1.4. Axiomas del sistema.

El sistema que estamos presentando tendrá un número infinito de axiomas. Serán axiomas del sistema todos los enunciados del mismo que respondan a alguna de las tres formas estructurales siguientes:

- Axioma 1.** $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
Axioma 2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
Axioma 3. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

donde ‘ A ’, ‘ B ’, ‘ C ’ son variables metalingüísticas usadas para denotar cualquier enunciado del sistema axiomático por más compleja que fuera su estructura interna. Así por ejemplo, por responder a la primera de las formas estructurales expuestas, son axiomas cada uno de los siguientes enunciados:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow (q \rightarrow p) \\ p &\rightarrow (\neg q \rightarrow p) \\ \neg p &\rightarrow (r \rightarrow \neg p) \\ \neg \neg s &\rightarrow ((q \rightarrow \neg s) \rightarrow \neg \neg s) \\ (p \rightarrow q) &\rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)) \end{aligned}$$

(Se deja al lector determinar a qué formas estructurales corresponden cada uno de estos enunciados)

Análogas consideraciones pueden hacerse para cada una de las restantes formas estructurales, ya que cada forma determina como axiomas un infinito número de enunciados del sistema.

De cada uno de los enunciados que satisfacen la primera de las formas estructurales axiomáticas o el Axioma esquema 1, diremos que ejemplifican la ley lógica denominada *Afirmación del consecuente*, que puede parafrasearse diciendo que todo enunciado verdadero es implicado materialmente por cualquier enunciado. Como es sabido este principio constituye una de las llamadas paradojas del condicional material. Los enunciados que satisfacen la segunda de las formas estructurales axiomáticas ejemplifican el principio de *Autodistributividad del condicional material*, que garantiza que cuando un enunciado implica una implicación, entonces si dicho enunciado implica el antecedente de la implicación, implicará también el consecuente. La tercera de las formas estructurales axiomáticas está destinada a recoger como axiomas a todos los enunciados que ejemplifiquen la llamada *Ley converso de la transposición del condicional material*, que garantiza que un enunciado implica a otro cuando la negación de este último implica la negación del primero.

Como es evidente, la fácil captación intuitiva no ha sido el criterio que nos ha guiado en la selección de los axiomas. La ventaja que encontramos en los axiomas escogidos es que permiten alcanzar, con cierta facilidad y con relativamente poco desarrollo de los mismos, los resultados que nos interesan.

Las restantes conectivas o constantes lógicas proposicionales se introducen por definición:

Def.1.	$A \wedge B$	por $\neg(A \rightarrow \neg B)$
Def.2.	$A \vee B$	por $\neg A \rightarrow B$
Def.3.	$A \leftrightarrow B$	por $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

1.5. Regla de inferencia.

El *Modus Ponens* (MP) será la única regla de inferencia del sistema. Como es sabido su formulación es la siguiente:

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

Informalmente podemos leer: A partir de A y $A \rightarrow B$, inferir B .

Esta regla nos permite, en las condiciones que ella especifica, inferir un tercer enunciado a partir de otros dos. Es decir, nos autoriza a operar de cierta manera con los enunciados del sistema. Pero ella misma no es un enunciado del sistema, ni autoriza por sí misma a que los enunciados que ejemplifican la forma $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$, sean considerados como axiomas o teoremas del sistema. Esto es precisamente lo que diferencia una regla de inferencia de las formas estructurales axiomáticas, pues las segundas especifican como axiomas todos los enunciados que satisfacen ciertas formas precisas y determinadas, las reglas de inferencia por otra parte, se limitan a permitir ciertos manipuleos con los enunciados del sistema, pero no autorizan por sí mismas a considerar ningún enunciado como axioma ni como teorema.

1.6. Definiciones de *demostración*, *teorema* y *demostración a partir de premisas o hipótesis*.

Sólo nos resta para terminar la exposición del sistema axiomático y comenzar con su desarrollo deductivo, la especificación de las circunstancias en las que un enunciado será considerado como *teorema* en el sistema, y las condiciones que se requieren para la validez de la *demostración* de un enunciado como conclusión a partir de ciertas premisas. Lo primero que vamos a introducir es la noción de *demostración*. Será una demostración toda secuencia finita formada por uno o más enunciados del sistema y caracterizada por el hecho de que cada uno de los enunciados de la secuencia es 1) un axioma o 2) se infiere por *Modus Ponens* de

dos enunciados que le preceden en la secuencia. Llamaremos *teorema* del sistema a todo enunciado para el que exista una demostración. Es decir, será teorema todo enunciado para el que pueda construirse una secuencia de enunciados con las características especificadas anteriormente, tal que el enunciado en cuestión sea el último término de dicha secuencia. Desde el metalenguaje indicaremos que un enunciado A es un teorema del sistema mediante el siguiente simbolismo: $\vdash A$. Es decir, ' $\vdash A$ ' es una expresión del metalenguaje destinada a abreviar el enunciado metalingüístico ' A es un teorema del sistema', o lo que es lo mismo 'Existe o puede construirse una secuencia de enunciados tal que A es su último término y cada uno de sus componentes es 1) un axioma del sistema, o 2) se infiere por *Modus Ponens* de dos enunciados anteriores'.

Expondremos a continuación la noción de *demostración a partir de premisas o hipótesis*. Una demostración del enunciado B a partir de las premisas $A_1, A_2, \dots, A_n$ será toda secuencia finita de uno o más enunciados del sistema tal que cada uno de ellos es 1) un axioma, o 2) una de las premisas o hipótesis de la demostración (es decir alguna de los enunciados $A_1, A_2, \dots, A_n$), o 3) se infiere por *Modus Ponens* de dos enunciados anteriores, y resulta además que B es el último enunciado de la secuencia. Cuando existe o puede construirse una demostración de B a partir de $A_1, A_2, \dots, A_n$ diremos que B es demostrable a partir de las premisas $A_1, A_2, \dots, A_n$, y abreviaremos tal aserción metalingüística de la siguiente forma: $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$.

2. Desarrollo del sistema.

Con todos estos elementos estamos en condiciones de comenzar el estudio de las propiedades y características del sistema axiomático cuya presentación acabamos de realizar. No se pretende, por el momento, que todas las nociones recientemente introducidas hayan sido comprendidas en toda su extensión. Sólo una ejemplificación adecuada puede ayudar a entenderlas con claridad indispensable, pero creemos que tal ejemplificación puede pura y simplemente obtenerse como resultado del desarrollo y análisis del sistema axiomático. Así, por ejemplo, tanto la noción de prueba como la de teorema, las ejemplificaremos al demostrar el primero de los teoremas del sistema, que será una de las formas del *Principio de identidad*. Especialmente aquella que afirma que todo enunciado se implica a sí mismo, llamada también *Ley de reflexividad del condicional material*. De este modo, el primer teorema del sistema es:

$$\vdash p \rightarrow p$$

y su demostración consistirá en la siguiente secuencia:

1. $\vdash (p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$
2. $\vdash p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)$
3. $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$
4. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $\vdash p \rightarrow p$

Tal secuencia reúne los requisitos para ser una demostración de ' $p \rightarrow p$ ', ya que el primero de los enunciados de la secuencia es un axioma puesto que constituye uno de los enunciados referidos a través del Axioma esquema 2. El segundo de los términos de la secuencia es también un axioma pues responde a la forma exigida por el Axioma esquema 1. El tercero de los enunciados se infiere por *Modus Ponens* de los dos anteriores. El cuarto es un axioma que responde a la forma del Axioma esquema 1. Y por último, el quinto, que es el enunciado que se quería probar, se infiere por *Modus Ponens* del tercero y el cuarto.

Lo expuesto es por consiguiente un teorema del sistema y su respectiva demostración. En lo sucesivo nos va a ser necesario probar algunos otros teoremas, pero el método de exposición que adoptaremos no será el que hemos usado en la reciente exposición, sino más bien uno análogo al que empleamos en la presentación de los axiomas. Consideramos como axiomas todo el infinito conjunto de los enunciados que respondían a ciertas formas estructurales especificadas con los axiomas esquemas. En éstos figuraban variables metalingüísticas con el propósito de hacer referencia a un sinnúmero de enunciados del sistema. El caso específico del Principio de Identidad que recientemente escogimos para ilustrar los conceptos de demostración y teorema, es uno de los muchos enunciados que responden a la forma esquemática ' $A \rightarrow A$ '. Otros ejemplos de enunciados que responden también a dicha forma son:

- 1) $q \rightarrow q$
- 2) $r \rightarrow r$
- 3) $\neg p \rightarrow \neg p$
- 4) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
- 5) $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow p))$

Es fácil darse cuenta que todos éstos, así como también cualquier otro de la forma ' $A \rightarrow A$ ', son teoremas del sistema, y que cada uno de ellos es susceptible de una demostración análoga a la expuesta al justificar ' $p \rightarrow p$ '. La forma de cada una de dichas demostraciones sería la siguiente:

Teorema 1. $\vdash A \rightarrow A$

- | | | |
|----|--|-----------|
| 1. | $\vdash (A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ | Ax.3. |
| 2. | $\vdash A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$ | Ax.1. |
| 3. | $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ | MP, 1 y 2 |
| 4. | $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ | Ax.1. |
| 5. | $\vdash A \rightarrow A$ | MP, 3 y 4 |

Cada uno de los pasos de esta demostración esquemática corresponden uno a uno a los pasos de la demostración de ' $p \rightarrow p$ ', y por consiguiente las acotaciones aclaratorias serán exactamente las mismas, dejándose para el lector su explicitación.

Basándonos en estas consideraciones es que en lo sucesivo en lugar de probar teoremas del sistema, nos limitaremos a presentardemostraciones esquemáticas para todos los enunciados que satisfagan una forma esquemática determinada. Así, cuando en lo sucesivo nos refiramos al Teorema 1, no lo haremos para mencionar exclusivamente a ' $p \rightarrow p$ ', sino a todos los enunciados que tengan la forma $A \rightarrow A$.

2.1. Metateorema de la deducción.

En la presente sección vamos a demostrar un enunciado que además de poseer un gran valor intrínseco, nos permitirá simplificar enormemente la presentación de la justificación de algunos teoremas del sistema que en lo sucesivo necesitaremos considerar. Es importante observar que el enunciado que vamos a demostrar no pertenece al sistema axiomático que estamos analizando, y por consiguiente no deberá ser considerado como un teorema del mismo. En él se afirma una característica de dicho sistema y en consecuencia pertenece al metalenguaje que usamos para describir las propiedades del lenguaje objeto de la investigación (en nuestro caso el sistema axiomático). Precisamente porque no pertenece al sistema axiomático es que no necesitamos limitarnos en su justificación a la sola utilización del *Modus Ponens*. Por el contrario, en su demostración haremos uso de varias formas de inferencia. Una de ellas, que recibe el nombre de *Inducción Completa* merece una consideración especial. Pero antes de proseguir conviene introducir una aclaración terminológica. Llamaremos *metateoremas* a todo enunciado de la índole del que ahora vamos a demostrar, y que se caracterizan por ser enunciados del metalenguaje acerca del sistema axiomático, y no enunciados del sistema mismo, y que por consiguiente no son, en manera alguna, teoremas del sistema, ni están limitados en su justificación al uso de las reglas de inferencia del sistema.

En cuanto al *Principio de Inducción Completa*, que utilizaremos en la demostración del *Metateorema de la Deducción* (así se llama el primer metateorema que vamos a demostrar, y al cual también nos referiremos mediante la expresión **MTD**), conviene exponerlo con cierto cuidado ya que, aún cuando en muchos de nuestros razonamientos contamos con él, no siempre somos conscientes de su alcance ni de su formulación explícita. El Principio de Inducción Completa, en la versión que nos interesa, permite probar que todos los objetos de una serie tienen una propiedad determinada cuando se ha conseguido justificar 1) que el primer objeto de la serie tiene la propiedad en cuestión, y 2) que cualquier objeto arbitrariamente elegido de la serie tiene la propiedad en cuestión cuando la tienen todos los que lo preceden. De este modo el esquema de inferencia

basado en el Principio de Inducción Completa, consta de dos premisas, y tiene la siguiente estructura:

1ra)	El objeto N°1 tiene la propiedad P.
2da)	Cualquiera sea m , si todos los objetos anteriores a m tienen la propiedad P, entonces m también tiene la propiedad P.
Conclusión.	<u>Todos los objetos de la serie tienen la propiedad P.</u>

Tratemos de hacer intuitiva esta forma de inferencia. Supongamos que contamos con una serie de objetos y que deseamos probar que todos los objetos de la serie tienen la propiedad P. Para indicar que el primer objeto de la serie tiene la propiedad P usaremos la expresión abreviada 'P(1)', para indicar que el segundo la tiene 'P(2)', y así en general 'P(n)' indicará que el n -ésimo objeto tiene la propiedad P. Lo que nos corresponde mostrar es que cuando son verdaderas las dos premisas de la forma de inferencia que estamos analizando, también lo es su conclusión. Supongamos para ésto, que los objetos de la serie considerada tienen las características necesarias como para que las dos premisas del esquema inductivo sean verdaderas. Esto supone que el primer objeto de la serie tiene la propiedad P, y que si escojo un objeto cualquiera de la serie caracterizado por el hecho de que todos sus predecesores la tienen, él también la tendrá. Consideremos al segundo objeto de los objetos de la serie, para él ya hemos mostrado que todos sus predecesores tienen la propiedad P, pues el único que lo precede, el primero, tiene dicha propiedad, como lo garantiza la primera de las premisas. Consideremos ahora el tercero de los objetos de la serie, también para él resulta verdadero que todos sus predecesores tiene la propiedad P, pues ya hemos mostrado que tanto el primero como el segundo la tienen, y en consecuencia también él la tendrá. Es obvio que podemos extender estas consideraciones para cada uno de los objetos de la serie y demostrar que todos ellos tienen la propiedad P, es decir que la conclusión del esquema inductivo es verdadera cuando lo son sus premisas.

Resumiendo, el esquema inductivo puede considerarse como la síntesis de una infinita secuencia de usos del *Modus Ponens* en razonamientos que responden a la siguiente estructura:

P(1)	P(1) y P(2)
Si P(1) entonces P(2)	Si P(1) y P(2) entonces P(3)
<u>P(2)</u>	<u>P(3)</u>
⋮	
...	P(1) y P(2) y...y P(n-1)
	Si P(1) y P(2) y...y P(n-1), entonces P(n)
	<u>P(n)</u>

Con estos elementos estamos ya en condiciones de demostrar el Metateorema de la Deducción. En dicho metateorema se afirma que cuando un enunciado B

es demostrable a partir de las premisas $A_1, A_2, \dots, A_n$, entonces la implicación $A_n \rightarrow B$ es demostrable a partir de $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$. Desde el punto de vista operativo este metateorema nos permite reducir el número de las premisas de una demostración.

2.2. Metateorema I (*Metateorema de la deducción*) (MD)

Si $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$, **entonces** $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$.

Obsérvese que $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ es la hipótesis del teorema y que ella tiene la forma de una secuencia de demostración de B a partir de $A_1, A_2, \dots, A_n$ y que hay que demostrar que, dada esta hipótesis hay una secuencia de demostración de longitud mayor que será la demostración de $A_n \rightarrow B$ a partir de $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$.

O sea:

Si $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ entonces $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$

Suponemos que hay una secuencia D de demostración de la hipótesis del teorema, o sea quella en la que B se ha deducido de $A_1, A_2, \dots, A_n$. Esto significa que se ha construido una secuencia de enunciados como la siguiente:

$$\begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{array} \quad (S_n = B)$$

y donde cada uno es:

- (1) un axioma, o
- (2) una de las premisas $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, o
- (3) A_n , o
- (4) se infiere por *Modus Ponens* de dos enunciados precedentes.

Bajo el supuesto de esta secuencia, para demostrar el teorema habrá que construir otra secuencia de demostración D', idéntica a la anterior con la excepción de que el último enunciado S_n será $(A_n \rightarrow B)$.

La demostración del metateorema se hará por inducción completa sobre la longitud k de la secuencia D de demostración supuesta.

Primera etapa de la demostración. (*Prueba de la primera de las premisas inductivas* o **Caso Base**).

Para ésto tendremos que considerar las distintas posibilidades en cuanto a la naturaleza del enunciado S_1 . Recordemos que S_1 es el único enunciado de la secuencia de demostración D supuesta y por ello la longitud de D es 1. Luego, tal enunciado puede ser:

- 1) una de las premisas $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ o
- 2) un axioma, o
- 3) A_n

Caso 1): Si S_1 fuera , alguna de las premisas $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, por ejemplo A_i y en cuyo caso $A_i = B$.

En tal caso, la secuencia de demostración D' , consistirá en demostrar $(A \rightarrow B)$ a partir de suponer A_i

- | | |
|--------|---|
| o sea: | <ol style="list-style-type: none"> 1. B premisa A_i 2. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ Axioma 1 3. $A \rightarrow B$ por MP de 1 y 2. |
|--------|---|

Luego, $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$

Caso 2) Si S_1 fuera un axioma. En este caso la secuencia de demostración D' sería igual a la anterior, a excepción de que en el primer paso B sería un axioma. O sea :

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\vdash B$ 2. $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 3. $\vdash (A \rightarrow B)$ | <p>Axioma</p> <p>caso de Axioma 1</p> <p>por MP de 1 y 2</p> |
|--|--|

Luego, $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$

Caso 3) Si S_1 fuera A_n . (la última de las premisas). En tal caso, la secuencia de demostración D' será:

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\vdash A_n \rightarrow A_n$ 2. $\vdash A_n \rightarrow B$ | <p>Teorema 1</p> <p>porque $A_n = B$</p> |
|--|---|

Luego, $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$

Segunda etapa de la demostración (*Prueba de la segunda de las premisas inductivas* o **Etapla Inductiva**)

Se presentan cuatro casos. Los tres primeros coinciden con los demostrados en la primera etapa inductiva. El resultado más complejo es cuando el enunciado B_n ha sido incluido en la secuencia como resultado de aplicar el *Modus Ponens* a dos enunciados B_j y B_m que le preceden en la secuencia de demostración. En tal caso B_j tendrá la estructura de una implicación en la que figura B_n como consecuente, es decir $B_j = (B_m \rightarrow B_n)$. Recuérdese que por ser B_j y B_m enunciados anteriores, el teorema se cumple para ellos y éstos se constituyen en las hipótesis inductivas de esta etapa, a saber:

1ra. Hipótesis inductiva: $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B_j$
o sea: $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow (B_m \rightarrow B_n)$

2da. Hipótesis inductiva: $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B_m$

. La secuencia de demostración D' tendrá entonces la siguiente estructura:

- | | | |
|----|--|-----------------------|
| 1. | $\vdash A_n \rightarrow (B_m \rightarrow B_n)$ | Hipótesis inductiva 1 |
| 2. | $\vdash A_n \rightarrow B_m$ | Hipótesis inductiva 2 |
| 3. | $\vdash (A_n \rightarrow (B_m \rightarrow B_n)) \rightarrow ((A_n \rightarrow B_m) \rightarrow (A_n \rightarrow B_n))$ | caso de Axioma 2 |
| 4. | $\vdash (A_n \rightarrow B_m) \rightarrow (A_n \rightarrow B_m) \rightarrow (A_n \rightarrow B_n)$ | por MP de 1 y 3 |
| 5. | $\vdash A_n \rightarrow B_n$ | por MP de 2 y 4 |

Y como B_n es B , entonces $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$

Luego, por generalización a partir de lo demostrado en las etapas 1^{era} y 2^{da} se concluye la demostración.

2.3. Corolario del MD

Si $A \vdash B$, entonces $\vdash A \rightarrow B$.

Este no es más que el Metateorema de la Deducción cuando la demostración de B se apoya en una sola premisa, es decir cuando el conjunto $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})$ de premisas ha quedado reducido a A solamente.

El siguiente metateorema es el converso del MD.

2.4. Metateorema II.

Si $\vdash A \rightarrow B$, entonces $A \vdash B$.

Este afirma que si la implicación $A \rightarrow B$ es un teorema, entonces B es demostrable a partir de A como premisa. La demostración de B a partir de A será la siguiente secuencia de demostración:

- (1) la secuencia que constituye la demostración de $A \rightarrow B$,
- (2) el enunciado A , y
- (3) el enunciado B , que se infiere por *Modus Ponens* de $A \rightarrow B$ y A .

Resumiendo, los dos últimos puntos nos permiten afirmar con verdad que la noción de implicación del sistema axiomático considerado es una representación de la noción metalingüística de deducibilidad a partir de premisas, en otras palabras, que en las implicaciones del sistema se reflejan sus propias derivaciones. Pues cada vez que es válida la inferencia de un enunciado a partir de otro, este último implica al primero, y reciprocamente, cuando un enunciado implica a otro, este último es demostrable a partir del primero. De esta forma, todo axioma o teorema, por aplicación del metateorema converso del MD, se convierte en una inferencia válida del sistema.

3. Otros teoremas del sistema.

Apoyándonos en el Metateorema de la Deducción probaremos algunas reglas de inferencia derivadas y algunos teoremas que nos serán indispensables mas adelante. Demostraremos primero la regla derivada conocida con el nombre de *Silogismo Hipotético* (SH) o *Transitividad del condicional*: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$.

Regla derivada 1: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

- | | | |
|-----|-------------------|---|
| 1. | $A \rightarrow B$ | hip. |
| 2. | $B \rightarrow C$ | hip. |
| 3. | A | hip. |
| 4. | B | 1,3,MP |
| 5. | C | 2,4,MP |
| Así | por MD | $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$ |
| y | por MD | $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$ |

La afirmación conjunta de los dos próximos teoremas constituye el contenido del llamado *Principio de doble negación* de acuerdo al cual todo enunciado es equivalente a la negación de su negación.

Teorema 2: $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$

Prueba:

- | | | |
|---|--|----------|
| 1 | $\neg\neg A$ | hip. |
| 2 | $\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A)$ | Ax.1 |
| 3 | $\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ | 1,2,MP |
| 4 | $\neg A \rightarrow \neg\neg A$ | por Ax.3 |
| 5 | $\neg\neg A \rightarrow A$ | por Ax.3 |
| 6 | A | 1,5 MP |
| 7 | $\neg\neg A \rightarrow A$ | 1-6 MD |
- ya que A se ha deducido de $\neg\neg A$.

Teorema 3: $\vdash (A \rightarrow \neg\neg A)$.

Prueba:

- | | | |
|---|-------------------------------------|----------------|
| 1 | $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$ | caso Teorema 2 |
| 2 | $A \rightarrow \neg\neg A$ | por Axioma 3 |

Toda demostración a partir de premisas justificables en el sistema, puede considerarse como una regla de inferencia derivada.

La regla de inferencia derivada que presentaremos a continuación puede gloriarse diciendo que de dos enunciados contradictorios se infiere cualquier otro.

Regla Derivada 2: $A, \neg A \vdash B$.

Prueba:

1	A	Hip.
2	$\neg A$	Hip.
3	$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Ax.1
4	$\neg B \rightarrow \neg A$	2,3, MP
5	$A \rightarrow B$	por Ax.3
6	B	1,5,MP

El próximo es una de las llamadas *paradojas de la condicional material*. Específicamente la que afirma que un enunciado falso implica cualquier otro.

Teorema 4. $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Prueba:

1.	$\neg A$	Hip.
2	$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Ax.1.
3	$\neg B \rightarrow \neg A$	1,2,MP
4	$A \rightarrow B$	por Ax.3
5	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.	1-4,MP

Teorema 5. $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$.

Prueba:

1	$A \rightarrow \neg A$	Hip
2	$\neg \neg A$	Hip
3	$\neg \neg A \rightarrow A$	Teorema 2
4	A	2,3,MP
5	$\neg A$	1,4,MP
6	$\neg(A \rightarrow \neg A)$	por RD2: B es cualquier fórmula
7	$\neg \neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg A)$	2-6,MD
8	$(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	por Ax.3.
9	$\neg A$	1,8,MP
10	$(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	1-9-MD

El Teorema-5 es el *Principio de reduccion al absurdo*, que afirma que es falso todo enunciado que implique su propia falsedad.

Teorema 6. $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$

Prueba:

1	A	Hip..
2	$\neg B$	Hip.
3	$(A \rightarrow B)$	Hip.
4	B	1,3,MP
5	$\neg(A \rightarrow B)$	2,4,RD2; B es cualquier fórmula
6	$(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	3-5,MD
7	$\neg(A \rightarrow B)$	6,por Teorema 5
8	$\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	2-7,MD
9	$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$	1-8,MD

El Teorema-6 dice que es falsa toda implicación cuando su antecedente es verdadero y su consecuente es falso.

Las demostraciones de los siguientes teoremas se dejan para el lector.

Teorema 7. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.

Teorema 8. $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$.

Teorema 9. $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$

El Teorema-7 es la *Ley de transposición del condicional material*, ley conversas de la expuesta en el Axioma 3. El Teorema 8 es en cierto modo el complemento de la *Reducción al absurdo*, ya que establece que es verdadero todo enunciado implicado por su propia falsedad. Lukasiewicz lo llamó *Ley de Clavius* en honor al jesuita Clavius del siglo VXII que destacó por primera vez su importancia. Clavius lo llamaba *Consequentia Mirabilis*. Por último, el Teorema 9 afirma que es verdadero todo enunciado implicado por dos enunciados contradictorios.

4. La completitud del sistema.

Los nueve teoremas de la sección anterior son todos los que necesitamos para justificar el resultado que motivó la construcción del sistema axiomático. Recordemos que nuestro propósito era tratar de encontrar algún conjunto fácilmente manejable de axiomas y reglas de inferencia, a fin de poder limitar la tarea de fundamentación de esta importante provincia de la lógica. Lo que nos queda por hacer es precisamente demostrar que los axiomas y las reglas de inferencia escogida pueden derivarse todas, rigurosamente todas, las leyes lógicas proposicionales. Pero también interesa mostrar que no puede derivarse en el sistema nada que no sea una ley lógica proposicional, pues si ocurriera lo contrario no podría afirmarse que nuestro sistema axiomatiza exactamente las leyes de la lógica proposicional. Es decir, nuestra próxima tarea será la de justificar que para cualquier enunciado A que se seleccione resulta que:

A es un teorema si y solo si A es una tautología

Esta afirmación la descompondremos en los siguientes metateoremas:

Metateorema III (Analiticidad o Consistencia): Si $\vdash A$, entonces A es una tautología.

Metateorema IV (Complejitud). Si A es una tautología, entonces $\vdash A$.

Antes de considerar sus demostraciones, conviene señalar una característica que puede haber pasado inadvertida al lector, de lo que significa en el sistema que estamos considerando al afirmar que un enunciado es un teorema $\vdash A$. En general, la noción intuitiva de lo que son los teoremas de un sistema implica que una cosa son los axiomas y otra muy distinta, los teoremas; en el sentido de que si algo es un teorema, no es un axioma, y recíprocamente, si es un axioma no es un teorema. Sin embargo, si se analiza lo que en el sistema que estamos considerando se ha definido como teorema y axioma, resultará que ninguna de las dos afirmaciones anteriores es verdadera, y que por el contrario, acontece que todos los axiomas son teoremas y que muchos de teoremas son axiomas.

Analicemos la justificación de la primera de estas aserciones *-todos los axiomas son teoremas-*. Para ésto recordar la caracterización de la noción de teorema. Un teorema es el último de los enunciados de una secuencia de uno o más enunciados cada uno de los cuales es 1) un axioma o 2) se infiere por *Modus Ponens* de dos que le preceden. Es obvio entonces, que una secuencia integrada únicamente por uno de los dos axiomas satisface los requisitos para ser una demostración del mismo, que resultará ser por ello, también teorema. De éste modo se concluye que todo axioma es un teorema; también de ésto se infiere que todos aquellos teoremas que satisfagan alguno de los axiomas-esquemas del sistema, serán además axiomas, lo que justifica la afirmación de que muchos teoremas son axiomas. El carácter paradójico de estas aserciones deriva simplemente del sentido, un tanto inusitado, que constituye la noción de teorema dentro del sistema que estamos exponiendo.

Resumiendo: en el sistema se llama teorema a todo enunciado que de acuerdo al sentido más usual de estos vocablos es 1) un axioma o 2) un teorema. Diciéndolo imprecisa, pero sugestivamente, los teoremas son todos enunciados que recoge el sistema axiomático, sea en su forma originaria (axiomas) o como consecuencia de la aplicación de su regla de inferencia (teoremas en el sentido restringido y más usual).

Con estas aclaraciones en mente podemos abordar la siguiente demostración.

4.1. Metateorema III (analiticidad o consistencia). Si $\vdash A$ entonces A es una tautología.

La demostración rigurosa es por inducción completa. No obstante nos limitaremos a indicar las consideraciones fundamentales alrededor de las cuales gira la demostración. Para ésto basta con observar que uno (1) todos los axiomas son tautologías -lo que se comprueba fácilmente mediante el uso de las tablas

de verdad- y que (2) si tanto A como $(A \rightarrow B)$ son tautologías, entonces B es necesariamente una tautología, es decir, cuando el Modus Ponens se aplica a tautologías su conclusión también lo es. Para justificar el acerto anterior, supongamos que B no es una tautología. En tal supuesto su tabla de verdad exhibirá por lo menos un caso de falsedad. De ello se sigue que si A es una tautología, es decir, su tabla de verdad no contiene ningún caso de falsedad, $(A \rightarrow B)$ no puede ser una tautología, pues será falso en cada uno de los casos de falsedad de B , ya que en tales casos la implicación $(A \rightarrow B)$ tendrá como antecedente un enunciado verdadero (A) y como consecuente uno falso (B). Esto muestra que si A y $(A \rightarrow B)$ son verdaderos en todos sus casos posibles (son tautologías), entonces son necesariamente B también lo será. Es fácil ver, por consiguiente, que todos los teoremas son tautologías, ya que en la prueba de los teoremas no interviene más que axiomas, que ya se vio que son tautologías, y enunciados que resultan aplicaciones del Modus Ponens a los axiomas y/o los teoremas anteriores.

Sólo nos resta para alcanzar nuestro objetivo demostrar el Metateorema IV (completitud). Este Metateorema nos suministrará un procedimiento general para probar frente a cualquiera tautología que ella es un teorema del sistema, y que por lo tanto se infiere con el solo uso del Modus Ponens de los axiomas elegidos. Antes de abordar su demostración, introduciremos algunas convenciones simbólicas. Sea B un enunciado cualquiera del sistema, y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ un conjunto de variables del sistema entre las que se encuentran todas las variables que figuran en B . Supongamos además que $v_1, v_2, \dots, v_n$ sea un conjunto de valores que arbitrariamente hemos adjudicado a cada una de las variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, de tal manera que v_1 es el valor adjudicado a α_1 , v_2 a α_2 y así sucesivamente hasta v_n , que será de valor α_n . Como en la lógica proposicional bivalente, cuya axiomatización estamos discutiendo, todo enunciado no puede ser más que verdadero o falso, dado uno de los valores $v_1, v_2, \dots, v_n$ será el valor de Verdad (V) o el valor de falsedad (F). Definimos ahora el conjunto de enunciados $A_1, A_2, \dots, A_n$ de tal manera que cuando v_1 es el valor Verdad ($v_1 = V$), entonces A_1 es precisamente el enunciado $\alpha_1(A_1 = \alpha_1)$ y cuando v_1 es el valor de Falsedad ($v_1 = F$), entonces A_1 es el enunciado $\neg\alpha_1(A_1 = \neg\alpha_1)$. Cuando $v_2 = V$, $A_2 = \alpha_2$, y cuando $v_2 = F$, $A_2 = \neg\alpha_2$; y así sucesivamente. Es decir, el enunciado al que se infiere cada uno de los ' A ' es idéntico al que se refiere el ' a ' con el mismo subíndice cuando el valor asignado a dicho ' α ' es el valor de Verdad, e idéntico al que se refiere ' $\neg a$ ' cuando el valor asignado a dicho ' α ' es el valor de Falsedad. Utilizaremos la expresión ' B ' para referirnos $\neg B$, cuando B ha resultado Falso al adjudicar a las variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ los valores $v_1, v_2, \dots, v_n$, y utilizaremos la misma expresión ' B ' para referirnos al enunciado ' B ', cuando B ha resultado Verdadero al adjudicar a las variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ los valores $v_1, v_2, \dots, v_n$. Es decir:

$$B' \text{ es el mismo enunciado que } \left\{ \begin{array}{l} B, \text{ si } B \text{ es Verdadero} \\ \neg B, \text{ si } B \text{ es Falso} \end{array} \right\}$$

supuesta una determinada variación de las variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ entre las que figuran todas las de B .

Un ejemplo ayudará a comprender lo dicho. Sea B el enunciado $p \rightarrow \neg q$. Es sabido que su correspondiente tabla de verdad estará constituida por las siguientes cuatro valuaciones $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ de sus variables proposicionales:

	p	q	$(p \rightarrow \neg q)$
$\nu_1 :$	V	V	F
$\nu_2 :$	F	V	V
$\nu_3 :$	V	F	V
$\nu_4 :$	F	V	V

Escribiendo α cuando $\nu(\alpha) = V$ y $\neg\alpha$ cuando $\nu(\alpha) = F$ y aplicando la última convención, obtenemos:

O sea: $(p \wedge q) \vdash \neg B'$
 $(p \wedge q) \vdash B'$
 $(p \wedge q) \vdash B'$
 $(p \wedge q) \vdash B'$

En síntesis:

B' es el mismo enunciado que $\left\{ \begin{array}{ll} B, & \text{si } B \text{ es Verdadero} \\ \neg B, & \text{si } B \text{ es Falso} \end{array} \right\}$

El primer paso para la demostración del Metateorema IV (de completitud) será la justificación del siguiente Lema:

4.2. Lema del Metateorema de completitud

El enunciado B' es siempre demostrable a partir de las premisas $A_1, A_2, \dots, A_n$, cualquiera que sea el enunciado B del que se parta. O sea, utilizando abreviaciones ya conocidas:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B'$$

(Entiendo por $A_1, A_2, \dots, A_n$ y B' los enunciados definidos en la forma anteriormente indicada). La demostración será por inducción completa. Para esto supondremos los enunciados del sistema ordenados serialmente de acuerdo al número de implicación que contienen. Así, figurarán en primer término, todos aquellos enunciados que no contienen ningún signo de implicación, como por ejemplo:

$$\begin{array}{c}
p \\
\neg p \\
\neg\neg\neg\neg q \\
r \\
\neg\neg\neg s
\end{array}$$

Luego, en el segundo lugar de la serie, encontraremos todos aquellos en los que figuran sólo un signo de implicación, como por ejemplo:

$$\begin{array}{c}
(p \rightarrow q) \\
(\neg\neg r \rightarrow s) \\
\neg\neg(q \rightarrow \neg p) \\
\neg\neg\neg(\neg\neg p \rightarrow q)
\end{array}$$

Y así sucesivamente el tercer lugar de la serie lo ocuparán los que tienen dos signos de implicación, el cuarto lugar los que tienen tres, etc.

Primera etapa de la demostración. (*Prueba de la primera de las premisas inductivas o CASO BASE*).

De este modo comenzaremos por demostrar que si B o B' (que para el caso es lo mismo, ya que B y B' ocuparán siempre el mismo lugar en la serie recientemente construida), figuran entre los enunciados que se encuentran en el primer lugar de la serie, entonces el Lema que estamos considerando es verdadero. Consideremos cada uno de los casos:

Caso 1: B es una variable.

La variable que ' B ' menciona será necesariamente una de las variables del conjunto $a_1, a_2, \dots, \alpha_n$. Es decir, dicho conjunto ofrecerá el siguiente aspecto:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, B, \dots, \alpha_n$$

Supongamos que B es la variable α_i , donde ' i ' es un número igual o mayor que 1, pero no mayor que ' n '. O sea, $(1 \leq i \leq n)$. Si al adjudicarles a las variables del conjunto $a_1, a_2, \dots, \alpha_n$ los valores $v_1, v_2, \dots, v_n$, el valor que le correspondió a α_i (que es B) es el valor Verdad (V), entonces $A_i = \alpha_i$ y $B' = B$, y en consecuencia $A_i = B'$. En este caso el enunciado del Lema que estamos considerando será verdadero, ya que tendrá la siguiente estructura:

$$A_1, A_2, \dots, B', \dots, A_n \vdash B'$$

Si por el contrario al adjudicarles a las variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ los valores $v_1, v_2, \dots, v_n$ resultara que el valor que le correspondió a α_i (que es B) es el valor de Falsedad (F), entonces $A_i = \neg\alpha_i$ y $B' = \neg B$, y en consecuencia $A_i = B'$. También en este supuesto el enunciado del Lema será verdadero ya que también aquí su estructura es :

$$A_1, A_2, \dots, B', \dots, A_n \vdash B'$$

Caso 2: B es una variable precedida por un número par de negaciones.

En este caso $B = \overbrace{\neg\neg\dots\neg}^{m \text{ negaciones}} \alpha_i$ donde m es un número par y α_i es la variable que figura en B . Si en la adjudicación de valores le ha correspondido a α_i el valor Verdad (V), entonces $A_i = \alpha_i$, pero también resultará que B es en tal caso verdadero y en consecuencia $B' = B$. Por consiguiente,

$$B = \overbrace{\neg\neg\dots\neg}^m \alpha_i = \overbrace{\neg\neg\dots\neg}^m A_i$$

En este supuesto la demostración del Lema comenzará:

$$\begin{array}{ll} A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n & \vdash A_i \quad (\text{Por repetición de una premisa}) \\ & \vdash \neg\neg A_i \quad (\text{Por Teorema-3}) \end{array}$$

y proseguirá mediante $m/2$ aplicaciones del Teorema-3 hasta alcanzar B' . Si a α_i le ha correspondido el valor Falsedad (F), entonces $A_i = \neg\alpha_i$, y $B = \neg B'$, pues B resultará en ese caso falso. De ésto se infiere,

$$B = \overbrace{\neg\neg\dots\neg}^{m-1} A_i \quad \text{y} \quad B' = \overbrace{\neg\neg\dots\neg}^m A_i$$

De esta forma hemos llegado al mismo resultado que en el supuesto inmediatamente precedente, cuando α_i era verdadero, y en consecuencia el Lema se demostrará exactamente igual mediante $m/2$ aplicaciones del Teorema-3.

Caso 3. B es una variable precedida por un número impar de negaciones.

En este caso $B = \overbrace{\neg\neg\dots\neg}^m A_i$ donde m es un número impar y α_i la variable que figura en B . Si α_i le ha correspondido el valor Verdad (V), entonces $A_i = \alpha_i$, y como B resultará falso $B' = \neg B$. De lo que se desprende que,

$$B = \overbrace{\neg\neg\dots\neg}^m A_i \quad \text{y} \quad B' = \overbrace{\neg\neg\dots\neg}^{m+1} A_i$$

Pero como m era un número impar, $m+1$ será par, y en consecuencia B' es idéntico a A_i precedido por un número par de negaciones. Con lo cual, hemos llegado a la misma situación en que nos encontramos en las hipótesis previstas en el Caso 2, y el Lema se demostrará también en la misma forma.

Idéntica situación se produce cuando a α_i le corresponde el valor Falsedad (F), pues en tal hipótesis $A_i = \neg\alpha_i$, pero como B será verdadera, $B = B'$. De donde se sigue,

$$B = \overbrace{\neg\neg\dots\neg}^{m-1} A_i \quad \text{y} \quad B' = \overbrace{\neg\neg\dots\neg}^{m-1} A_i$$

Como m era impar $m-1$ es par, y resulta nuevamente que B' es idéntico a A_i precedido por un número par de negaciones.

De este modo concluye la demostración de la primera etapa, en la que se afirma que el Lema del Metateorema de Completitud es verdadero para todos los enunciados que no contengan ningún signo de implicación.

Segunda etapa de la demostración. (*Prueba de la segunda de las premisas inductivas*).

Lo que corresponde considerar ahora son aquellos enunciados que contienen uno o más signos de implicación. Supongamos que B sea uno de tales enunciados. Conviene observar que B' contendrá el mismo número de signos de implicación que B , ya que B' es B o $\neg B$. En esta segunda etapa de la demostración debemos probar que: Cualquiera sea el enunciado B que seleccionemos, B' es demostrable a partir de $A_1, A_2, \dots, A_n$ cuando todos los enunciados $B'_1, B'_2, \dots$ que contienen un número menor de signos de implicación que B' , y el conjunto de cuyas variables figura en $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, son demostrables a partir de $A_1, A_2, \dots, A_n$. Para probar esta implicación supongamos que:

Hipótesis Inductiva: Todos los enunciados $B'_1, B'_2, \dots$ que contienen un número menor de signos de implicación que B' , y el conjunto de cuyas variables figuran en $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, son demostrables a partir de $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Bajo tal supuesto debemos probar que B' es demostrable a partir de $A_1, A_2, \dots, A_n$. O sea que,

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B'$$

Recordemos que B (el enunciado a partir del cual se construye B') contiene por lo menos un signo de implicación. En consecuencia tendrá que ser una implicación o una implicación precedida por uno o más signos de negación. Es decir, la forma de B será necesariamente,

$$(B_1 \rightarrow B_2)$$

o bien,

$$\overbrace{\neg \neg \dots \neg}^m (B_1 \rightarrow B_2) \quad (\text{donde } m \text{ es un número par})$$

o bien,

$$\overbrace{\neg \neg \dots \neg}^m (B_1 \rightarrow B_2) \quad (\text{donde } m \text{ es un número impar})$$

Es importante observar que en estos casos, que agotan todas las formas posibles de B cada uno de los enunciados B_1 y B_2 contienen necesariamente menos signos de implicación que B. Luego, en virtud de la hipótesis inductiva resulta que:

$$\begin{aligned} (1) & A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B'_1 \\ (2) & A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B'_2 \end{aligned}$$

Tomando en consideración las distintas formas posibles de B y los diferentes valores de verdad que para B_1 y B_2 pueden resultar al adjuntar a las variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ los valores $v_1, v_2, \dots, v_n$, construiremos los distintos casos que integran la demostración de la segunda etapa del Lema que estamos discutiendo.

Primera Forma. $B = (B_1 \rightarrow B_2)$

B es verdadero cuando B_1 es falso o cuando B_2 es verdadero. B es falso cuando B_1 es verdadero y B_2 es falso. De aquí surgen los tres siguientes casos a considerar:

Caso 1. B es falso.

Como consecuencia de ser B_1 falso se infiere que $B'_1 = \neg B_1$ y que B es verdadero. De este último resulta $B' = B = (B_1 \rightarrow B_2)$. La demostración del Lema en este caso es:

$A_1, A_2, \dots, A_n$	$\vdash B'_1$	Por hipótesis inductiva (1)
	$\vdash \neg B_1$	Por $B'_1 = \neg B_1$
	$\vdash (B_1 \rightarrow B_2)$	Por Teorema-4
	$\vdash B'$	Por $B' = (B_1 \rightarrow B_2)$

Caso 2. B_2 es verdadero.

Como consecuencia de ser B_2 verdadero se infiere que $B'_2 = B_2$ y que B es verdadero. De esto último resulta que $B' = B = (B_1 \rightarrow B_2)$. La demostración del Lema es en este caso:

$A_1, A_2, \dots, A_n$	$\vdash B'_2$	Por hipótesis inductiva (2)
	$\vdash B_2$	Por $B'_2 = B_2$
	$\vdash (B_1 \rightarrow B_2)$	Por Axioma-1
	$\vdash B'$	Por $B' = (B_1 \rightarrow B_2)$

Caso 3. B_1 es verdadero y B_2 es falso.

En este caso resulta $B'_1 = B_1$ y $B'_2 = \neg B_2$ y B falso. De lo último se infiere que $B' = \neg B = \neg(B_1 \rightarrow B_2)$. La demostración es:

$A_1, A_2, \dots, A_n$	$\vdash B'_1$	Por hipótesis inductiva (1)
	$\vdash B'_2$	Por hipótesis inductiva (2)
	$\vdash B_1$	Por $B'_1 = B_1$
	$\vdash \neg B_2$	Por $B'_2 = \neg B_2$
	$\vdash \neg(B_1 \rightarrow B_2)$	Por Teorema-6
	$\vdash B'$	Por $B' = \neg(B_1 \rightarrow B_2)$

Segunda Forma. $B = \overbrace{\neg \neg \dots \neg}^m (B_1 \rightarrow B_2)$, donde m es par.

Caso 4. B_1 es falso o B_2 es verdadero.

En este caso $(B_1 \rightarrow B_2)$ resulta verdadero en cualquiera de las alternativas, y, como el número de negaciones que afectan a $(B_1 \rightarrow B_2)$ es par, B será también verdadero. De esto último se infiere,

$$B = \overbrace{\neg \neg \dots \neg}^m (B_1 \rightarrow B_2)$$

Tomados conjuntamente el Caso 1 y el Caso 2, indican que es suficiente con que B_1 sea falso o con que B_2 sea verdadero para que resulte que:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash (B_1 \rightarrow B_2)$$

Luego por $m/2$ usos del Teorema-3 se obtiene:

$$\begin{array}{l} A_1, A_2, \dots, A_n \vdash \overbrace{\neg \neg \dots \neg}^m (B_1 \rightarrow B_2) \\ \vdash B' \end{array} \quad (\text{Por } B = \overbrace{\neg \neg \dots \neg}^m (B_1 \rightarrow B_2))$$

Caso 5. B_1 es verdadero y B_2 es falso.

En este caso $(B_1 \rightarrow B_2)$ es falso, y como el número de negaciones es par, B también es falso. En consecuencia,

$$B' = \neg B = \overbrace{\neg \neg \dots \neg}^{m+1} (B_1 \rightarrow B_2)$$

donde $m+1$ es naturalmente impar, ya que m es par. En el Caso 3 ya se probó que cuando B_1 es verdadero y B_2 falso resultaba que:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash \neg (B_1 \rightarrow B_2)$$

Luego por $m/2$ usos del Teorema-3 se obtiene:

$$\begin{array}{l} A_1, A_2, \dots, A_n \vdash \overbrace{\neg \neg \dots \neg}^{m+1} (B_1 \rightarrow B_2) \\ \vdash B' \end{array} \quad \text{Por } B' = \overbrace{\neg \neg \dots \neg}^{m+1} (B_1 \rightarrow B_2)$$

Tercera Forma. $B = \overbrace{\neg \neg \dots \neg}^m (B_1 \rightarrow B_2)$, donde m es impar.

Caso 6. B_1 es falso o B_2 es verdadero.

En este caso $(B_1 \rightarrow B_2)$ es verdadero en cualquiera de las dos alternativas. Pero B es falso, puesto que el número de negaciones que preceden a $(B_1 \rightarrow B_2)$ es impar. En consecuencia,

$$B' = \neg B = \overbrace{\neg \neg \dots \neg}^{m+1} (B_1 \rightarrow B_2)$$

y, naturalmente que $m + 1$ es par, pues m es impar. Ya se demostró en el Caso 4 que cuando, como en este caso, $(B_1 \rightarrow B_2)$ es verdadero y B' es idéntico a esta última implicación precedida por un número par de negaciones, entonces el Lema resultaba probado.

Caso 7. B_1 es verdadero y B_2 es falso.

En este caso $(B_1 \rightarrow B_2)$ es falso, pero B es verdadero, pues el número de negaciones que preceden a $(B_1 \rightarrow B_2)$ en B es impar. En consecuencia,

$$B' = B = \overbrace{\neg \neg \dots \neg}^m (B_1 \rightarrow B_2)$$

Ya se demostró en el Caso 5 que cuando, como en este caso, $(B_1 \rightarrow B_2)$ es falso y B' es idéntico a esta última implicación precedida por un número impar de negaciones, entonces resulta probado el Lema en discusión.

De este modo concluye la segunda parte de la demostración que consistió en la demostración de la segunda de las premisas inductivas. Finalmente se obtiene el Lema buscado por inducción completa a partir de los enunciados probados en la primera y la segunda parte de la demostración. De esta forma tenemos garantizado que cualquiera sea el enunciado B que seleccionemos será verdad que $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B'$.

4.3. Metateorema IV. (*Completitud*)

Si B es una tautología, entonces $\vdash B$.

La demostración rigurosa de este metateorema, que procede por inducción completa, se apoya exclusivamente en el Lema que acabamos de demostrar, en el Metateorema de la Deducción, y en el Teorema-9 (que garantiza que un enunciado es verdadero cuando es implicado por dos enunciados contradictorios). No vamos a exponer tal demostración con todo rigor y en toda su extensión, por el contrario, nos limitaremos a indicar aquellas operaciones que permiten, mediante una reiteración adecuada, alcanzar el resultado deseado. Para que puedan comprenderse con mayor claridad las operaciones básicas que permiten construir una demostración dentro del sistema para cada tautología, escogeremos una que nos servirá como modelo en la construcción de las demostraciones de todas las restantes. La tautología cuya demostración utilizaremos como paradigma es una de las formas de Transposición del Condicional Material. Específicamente será el enunciado,

$$((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$$

al que llamaremos ‘B’ . Comenzamos por construir su tabla de verdad para comprobar su carácter tautológico.

Fila	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \rightarrow \neg q)$	$(q \rightarrow \neg p)$	$((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$
1	V	V	F	F	F	F	V
2	V	F	F	V	V	V	V
3	F	V	V	F	V	V	V
4	F	F	V	V	V	V	V

Recordemos el Lema anterior:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B'$$

El conjunto de enunciados $A_1, A_2, \dots, A_n$ fue construido tomando en consideración una valuación arbitraria de las variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, entre las que figuran necesariamente todas las variables de B. A su vez B' fue construida considerando el valor de verdad de B resultante de tal valuación. En particular B' era idéntico a B, cuando B resultaba verdadero. En nuestro ejemplo el enunciado B es la tautología $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$. Precisamente por ser una tautología será siempre verdadero y en consecuencia B' será en todos los casos idéntico a B. De este modo el Lema anterior garantiza para nuestro ejemplo que:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$$

El conjunto de variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ que seleccionamos para este ejemplo será el conjunto integrado exclusivamente por todas las variables que figuran en B. Es decir, será el conjunto p, q , y las valuaciones que discutiremos serán todas las valuaciones posibles de este conjunto. Dichas valuaciones se encuentran expuestas en las dos primeras columnas (tablas de referencia) que figuran en la tabla de verdad anteriormente construida para B. Debemos analizar ahora qué enunciados son $A_1, A_2, \dots, A_n$ (siendo en este ejemplo $n = 2$) en cada una de las valuaciones posibles de las variables p, q . En la primera valuación (indicada en la Fila (1) de las tablas de referencia) tanto ‘ p ’ como ‘ q ’ son verdaderos, por consiguiente A_1 es para esta valuación, de acuerdo a las convenciones simbólicas anteriormente introducidas, el enunciado ‘ p ’; y A_2 es ‘ q ’. Para la segunda valuación (indicada en la Fila (2) de las tablas de referencia) A_1 es ‘ p ’ y A_2 es ‘ $\neg q$ ’. Para la tercera, A_1 es ‘ $\neg p$ ’ y A_2 es ‘ q ’. Para la cuarta, A_1 es ‘ $\neg p$ ’ y A_2 es ‘ $\neg q$ ’. De este modo el Lema anterior garantiza las siguientes afirmaciones:

- (1) $p, q \vdash B$ (Recuerdese que B es ‘ $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$)
- (2) $p, \neg q \vdash B$
- (3) $\neg p, q \vdash B$
- (4) $\neg p, \neg q \vdash B$

Previo uso del Metateorema de la Deducción, obtenemos nuestro propósito gracias al Teorema-9 de la siguiente manera.

(1')	p	$\vdash (q \rightarrow B)$	Por MD de (1)
(2')	p	$\vdash (\neg q \rightarrow B)$	Por MD de (2)
(3')	$\neg p$	$\vdash (\neg q \rightarrow B)$	Por MD de (3)
(4')	$\neg p$	$\vdash (\neg q \rightarrow B)$	Por MD de (4)
(5)	p	$\vdash B$	De (1') y (2') por Teorema-9
(6)	$\neg p$	$\vdash B$	De (3') y (4') por Teorema-9
(5')		$\vdash (p \rightarrow B)$	Por MD de (5)
(6')		$\vdash (\neg p \rightarrow B)$	Por MD de (6)
(7)		$\vdash B$	De (5') y (6') por Teorema-9

De este modo concluye la demostración de la tautología seleccionada.

La demostración del metateorema de Completitud no es más que la generalización de la demostración del teorema que acabamos de considerar. Dicho Metateorema garantiza que para toda tautología puede construirse en el sistema una demostración análoga, y por consiguiente, que toda tautología es un teorema del sistema. Analicemos su justificación. Sea B una tautología cualquiera, y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ las variables que en ella figuran. La tabla de verdad de B tenderá la siguiente estructura:

Fila	$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$			B
(1)	V	V	V	V
(2)	V	V	F	V
...				...
...				...
$(2^n - 1)$	F	F	V	V
(2^n)	F	F	F	V

El Lema anterior nos garantiza 2^n aserciones de la siguiente estructura:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$$

(Colocamos B en lugar de B' , porque es idéntico a B' , por ser B una tautología, es decir, un enunciado verdadero en todos los casos posibles). El siguiente cuadro expone las 2^n aserciones suministradas por el Lema anterior, con la especificación de los enunciados que para cada valuación integran $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Fila	$A_1, A_2, \dots, A_n$	
(1)	$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$	$\vdash B$
(2)	$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \neg\alpha_n$	$\vdash B$
...		...
...		...
$(2^n - 1)$	$\neg\alpha_1, \neg\alpha_2, \dots, \alpha_n$	$\vdash B$
(2^n)	$\neg\alpha_1, \neg\alpha_2, \dots, \neg\alpha_n$	$\vdash B$

Mediante el Metateorema de la deducción se obtienen de (1) y (2),

$$\begin{aligned} (1') \quad & \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \vdash (\alpha_n \rightarrow B) \\ (2') \quad & \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \vdash (\alpha_n \rightarrow B) \end{aligned}$$

y de éstos, gracias al teorema-9 llegamos a:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \vdash B$$

quedando así eliminada la premisa α_n en los dos primeros casos. Se ve fácilmente que mediante 2^n usos del Teorema de la Deducción y $2^n/2$ usos del Teorema-9, la variable α_n es eliminada en todos los casos de las premisas de las que se deduce B. En forma análoga se van eliminando progresivamente todas las premisas de las que B depende, hasta llegar a B . Con lo que queda concluida la demostración de B como teorema del sistema.

Conviene observar, sin embargo, que si bien para la eliminación de la variable α_n el Metateorema prescribe 2^n usos del Metateorema de la Deducción y $2^n/2$ usos del Teorema-9, el número de los pasos indicados para la eliminación de las restantes variables decrece progresivamente. Así, para α_{n-1} es de $2^n/2$ usos del primero, y $2^n/4$ del segundo. Para α_{n-2} es de $2^n/4$ usos del primero y $2^n/8$ usos del segundo. El ejemplo que consideramos anteriormente ilustra con claridad esta característica, en él no figuran más que dos variables, 'p' y 'q', es decir, n era igual a 2, y en consecuencia el número de valuaciones posibles era 4 (2^2), y también 4 el número de los enunciados garantizados por el Lema previo. De este modo resultaron 4 (2^2) los usos del Metateorema de la Deducción y 2 ($2^2/2$) los usos del teorema-9 que llevaron a la eliminación de la variable 'q' de las premisas que precedían a B. 2 ($2^2/2$) usos del metateorema de la Deducción y 1 ($2^2/4$) del Teorema-9 condujeron finalmente a la eliminación de la variable 'p' y en consecuencia a la demostración de B como teorema.

5. Ejemplificación del uso de los principios operativos utilizados en el lema previo al Metateorema de completitud.

Antes de concluir nuestras consideraciones relacionadas al Metateorema de Completitud, conviene utilizar la Ley de Transposición del condicional material, que nos sirviera para demostrar su Lema. Si se analiza la demostración del Lema se verá que los únicos teoremas utilizados en ella son:

Axioma-1	$(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
Teorema-4	$(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$
Teorema-6	$(A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)))$
Teorema-3	$(A \rightarrow \neg\neg A)$

Los dos primeros nos permiten, en ciertas circunstancias, inferir una implicación, el tercero, la negación de una implicación, y el cuarto, una doble negación. Con estos cuatro teoremas demostramos las afirmaciones siguientes:

- | | | | |
|-----|------------------|------------|---|
| (1) | p, q | $\vdash B$ | (Donde B es $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$) |
| (2) | $p, \neg q$ | $\vdash B$ | |
| (3) | $\neg p, q$ | $\vdash B$ | |
| (4) | $\neg p, \neg q$ | $\vdash B$ | |

que son las que, garantizadas por el Lema previo, utilizamos en la demostración de la Ley de Transposición de la Implicación al ejemplificar el Metateorema de Completitud.

(1)	p, q	$\vdash \neg\neg q$	Por Teorema-3
		$\vdash p$	Repetición de premisa
		$\vdash \neg(p \rightarrow \neg q)$	Por Teorema-6
		$\vdash ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$	Por Teorema-4
(2)	$p, \neg q$	$\vdash (q \rightarrow \neg p)$	Por Teorema-4
		$\vdash ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$	Por Axioma-1
(3)	$\neg p, q$	$\vdash (q \rightarrow \neg p)$	Por Axioma-1
		$\vdash ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$	Por Axioma-1
(4)	$\neg p, \neg q$	$\vdash (q \rightarrow \neg p)$	Por Axioma-1
		$\vdash ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$	Por Axioma-1

De este modo concluye la ejemplificación del uso de los principios operativos utilizados en el Lema previo al metateorema de Completitud.

6. Completitud Funcional.

Al demostrar el Metateorema de Completitud lo que se ha probado es que todos los enunciados lógicamente verdaderos (tautologías), cuya verdad depende exclusivamente del significado de la negación y el condicional material, resultan axiomatizados en el sistema axiomático que hemos presentado. Pero también se ha mostrado (Metateorema de Analiticidad) que solamente tales enunciados son los axiomatizados por el sistema. Esto último constituye otras de las ventajas del mismo, ya que nos garantiza que no existe un solo teorema del sistema que no sea una verdad lógica. Sin embargo, a pesar de todo esto, no podemos afirmar que hemos conseguido axiomatizar todas las verdades de la lógica proposicional, ya que muchas leyes lógicas proposicionales no fundamentan su verdad en el significado específico del condicional material y la negación. En cierto sentido podría decirse que el sistema elaborado adolece de un defecto de nacimiento, pues en sus enunciados las únicas conectivas proposicionales admitidas son el condicional material y la negación, y en consecuencia, cualquier enunciado en el que figure otra conectiva proposicional se encuentra por ese sólo hecho, fuera del sistema, y por lo tanto, no es considerado por el mismo de manera alguna. Sin embargo, aun cuando todo lo dicho es rigurosamente verdadero, los enunciados del sistema (en los que puede figurar más que el condicional material y la negación) pueden ser leídos e interpretados de tal manera que expresen leyes lógicas en las que se manifiestan las propiedades y características de cualquier conectiva proposicional. Así, por ejemplo, cada vez que me encuentro con una implicación en la que figura un enunciado implicado por la negación de otro, puedo leer dicha implicación como una disyunción, y abreviar las consideraciones que haga desde el metalenguaje acerca del mismo mediante el signo de disyunción. Esta posibilidad se basa en el hecho de que la tabla de verdad que caracteriza la disyunción (incluyente) es exactamente la misma que la de una implicación en la que figuran sus mismos enunciados componentes, y en la que uno de ellos es implicado por la negación del otro. Es así que es posible introducir en el metalenguaje una serie de definiciones que nos permiten leer los enunciados del sistema de modo tal que se manifiesten las propiedades de las restantes conectivas proposicionales. En esta forma, utilizando la expresión ' $A =_{Df} B$ ' como abreviación metalingüística de 'El enunciado A es idéntico, por definición al enunciado B ', podemos definir la disyunción (incluyente), la conjunción, la equivalencia y la disyunción excluyente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(A \vee B) &=_{Df} (\neg A \rightarrow B) \\ (A \wedge B) &=_{Df} \neg(A \rightarrow \neg B) \\ (A \leftrightarrow B) &=_{Df} ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \\ (A \nleftrightarrow B) &=_{Df} \neg(A \leftrightarrow B)\end{aligned}$$

Utilizando por ejemplo, la definición de la disyunción incluyente resulta que la llamada *Ley de tautología de la Disyunción*,

$$((A \vee A) \rightarrow A)$$

es un teorema del sistema, ya que no es más que el Teorema-8:

$$((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$$

y la ley, llamada por Reichenbach, *Redundancia de la disyunción*,

$$((A \vee B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)))$$

no es más que el Teorema-9:

$$((\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)))$$

De este modo podemos decir que se han considerado también las conectivas que acabamos de definir. Pero acontece que estas no son todas las conectivas proposicionales. En rigor de verdad, existen infinitas conectivas proposicionales diferentes. Para poder justificar la afirmación de que el sistema axiomático expuesto puede considerarse como una axiomatización de todas las leyes de la lógica proposicional sería necesario demostrar que todas las conectivas proposicionales pueden definirse a partir del condicional material y de la negación. Esta última afirmación recibe el nombre de Metateorema de Completitud Funcional, ya que, de ser probada, garantizaría que cualquier función de verdad (disyunción, conjunción, equivalencia, etc.) puede ser expresada sin recurrir más que a la condicional material y a la negación. De hecho, es posible probar tal Metateorema y justificar así, que para todo sistema axiomático en el que figuren como símbolos primitivos solamente el condicional material y la negación, es posible definir todas las funciones de verdad representadas por la totalidad de las conectivas proposicionales. No complicaremos más esta exposición con la demostración del Metateorema de Completitud Funcional. Nos limitaremos a indicar que es posible construir tal demostración, y que ella es necesaria para dar por justificada nuestra aserción de que el sistema expuesto puede considerarse una axiomatización completa de las leyes de la lógica proposicional.

De este modo el problema de la fundamentación filosófica de las leyes de la lógica proposicional queda reducido a la justificación de (1) los axiomas del sistema expuesto, (2) su regla de inferencia, y (3) las definiciones que permiten caracterizar las restantes funciones de verdad a partir del condicional material y la negación.