

LÓGICA INTUICIONISTA EN TRES HORAS (Y PICO)

Proyecto Aracne

F. Salto y J.M. Méndez

Diciembre 2000

1. Motivación
2. Negaciones
3. Existencia
4. Sistemas Ip, Iq
5. Semántica relacional
6. Consistencia
7. Completud y decidibilidad clásica
8. Completud y decidibilidad constructiva
9. Aplicaciones y Perspectivas
10. Referencias

1. MOTIVACIÓN.

Se llama lógica intuicionista a la amplia familia de sistemas formales que codifican el razonamiento constructivo. Una prueba es constructiva cuando ofrece un procedimiento reglado o algorítmico para “construir” o calcular explícitamente su resultado. Antes de ofrecer definiciones precisas de estos términos, consideremos intuitivamente algunos ejemplos. Una lectura de El Quijote nos asegura que del enunciado

(1) Dulcinea es una mujer

tenemos una demostración (informal) que apela a las definiciones contenidas en el libro. Sin embargo, del enunciado:

(2) Dulcinea tiene un número primo de pecas o no lo tiene

no tenemos información alguna que nos permita asertarlo ni negarlo. Si (2) se considera una instancia de la tautología clásica $A \vee \neg A$, entonces (2) puede considerarse verdadero. Considerémoslo verdadero. Con ello no hemos ganado información alguna acerca del número de pecas de Dulcinea. Nos hemos asegurado de la *verdad* de (2), pero no de su *demostrabilidad*. Desde el punto de vista constructivo, su verdad no es una razón suficiente para asertar (2): sólo información pertinente acerca de Dulcinea –no acerca de “o” ni acerca de “no”- permitirá asertar (2).

Consideremos ahora el siguiente razonamiento matemático informal. Hay dos números irracionales a y b tales que a^b es un número racional. Prueba: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional o no lo es. Si es racional, sea $a=b=\sqrt{2}$, y el teorema se cumple. Si es irracional, sea $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b=\sqrt{2}$. Entonces $a^b=2$, y el teorema también se cumple. Por tanto, el teorema se cumple en todo caso.

Esta prueba no es constructiva porque no establece su resultado para un valor específico de a (b) y no demuestra que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional (ni naturalmente demuestra que es racional). El teorema sin duda es verdadero si lo es el enunciado “ x es racional o x no es racional” (en general, si lo es $A \vee \neg A$). Concedamos que el argumento establece la *verdad* de su conclusión. La cuestión es que el argumento no establece la *demostrabilidad* (constructiva) de su conclusión.

Los dos casos señalados son ejemplos que muestran que apelar al principio de tercero excluido ($A \vee \neg A$) carece de justificación constructiva en ausencia tanto de una prueba tanto de A como de $\neg A$. Desde un punto de vista más general, si se trata de demostrar:

A

es falaz limitarse a *afirmar*:

Es verdad A

y es insuficiente el *hecho* que:

Es verdad A

Esto es, la verdad de A no *prueba* A . La operación clásica de consecuencia lógica no está concebida para reflejar este estado de cosas, ya que “ A ” y “Es verdad A ” son clásicamente equivalentes. Mientras que A es consecuencia clásica de Γ si y sólo si A es al menos tan verdadero como Γ en cualquier interpretación de ambos, aquí nos importan relaciones de consecuencia que preserven *demostrabilidad* y no verdad, de manera que $\Gamma \vdash A$ si y sólo si en cualquier interpretación de Γ en la que sea demostrable, también A es demostrable.