

Razonamiento Formal

María Manzano
Filosofía
Campus Unamuno. Edificio FES
37007 Salamanca
mara@usal.es

12 de julio de 2006

Índice

1. Algunos razonamientos	2
1.1. Novelas y cuentos	2
1.2. <i>¿Qué había antes?</i>	3
2. Lógica formal	5
3. Para empezar: lógica clásica	6
3.1. Lógica proposicional	7
3.2. Limitaciones de la lógica proposicional	8
3.3. El lenguaje de primer orden	8
3.4. Silogística	12
3.5. Lenguajes clásicos	13
4. Argumentación y Retórica	14
5. Otras lógicas	15
5.1. Lógica multivariada	16
5.2. Lógica temporal	17
6. Procedimientos de búsqueda	19
6.1. Lógica abductiva	20
6.2. Soluciones “razonables”	21
7. Ejercicios para resolver	22

1. Algunos razonamientos

1.1. Novelas y cuentos

En la literatura la imagen de la lógica se asocia con la argumentación, la deducción y el silogismo. Aunque no es éste su único cometido ya que también está ligada a la computación y a las propias máquinas que la llevan a cabo, a la reflexión sobre todo el proceso, a la gestión y transmisión del conocimiento y de la información, a la fundamentación de la matemática así como de otras disciplinas, a la teoría de juegos y de la acción, a la interacción persona-ordenador, a la web semántica, etc.

Ejemplo 1 *La conquista del aire*¹

“¿Estás proponiendo que guardemos el dinero en casa?”, preguntó ella, y luego, *sin darle tiempo a contestar, le llamó puritano. Entonces Carlos la abrazó rogándole que lo olvidara. Porque en la palabra “puritano” se condensaba un argumento que él ya conocía: “Para querer hay que mancharse. Los puritanos no se manchan. Luego, tú no me quieres”.* Era lo que Carlos llamaba el *Silogismo del reproche*.

También en los chistes se emplea la simplicidad aparente de la silogística para traer por los pelos resultados inverosímiles. De esta guisa es el *“Razonamientos tontos y corolarios chungos”* que recibimos por correo electrónico hace unos años.

Ejemplo 2 *Razonamientos tontos*

Razonamiento 1 *Dios es amor. El amor es ciego. Stevie Wonder es ciego. Luego, Stevie Wonder es Dios.*

Razonamiento 2 *Me dijeron que no soy nadie. Nadie es perfecto. Luego, yo soy perfecto. Pero sólo Dios es perfecto. Por tanto, yo soy Dios. Si Stevie Wonder es Dios, yo soy Stevie Wonder.*

Corolario chungo |||| Por Dios, soy ciego!!!!

Incluso en los cuentos infantiles los personajes extraen conclusiones lógicas de la información de que disponen.

Ejemplo 3 *MOUSE SOUP*²

A mouse

sat under a tree.

He was reading a book.

¹ Belén Gopegui, 1998: *La conquista del aire*.
página????

² Arnold Lobel. 19????

A weasel
 jumped out
 and caught the mouse.
 “Ah” said the weasel.
 “I am going to make
 mouse soup.”
 “Oh” said the mouse.
 “I am going to *be*
 mouse soup”.

Y por supuesto, nuestro paradigmático Mr Sherlock Holmes que llega a sorprendentes conclusiones en el espacio de un segundo.

Ejemplo 4 *Estudio en Escarlata*³.

—*Doctor Watson, mister Sherlock Holmes —anunció Stamford a modo de presentación.*

—....*Por lo que veo, ha estado usted en tierras afganas.*

...

—*Alguien se lo dijo, sin duda.*

—*En absoluto. Me constaba esa procedencia suya de Afganistán. ... me vi abocado a la conclusión... Helos aquí puestos en orden. "Hay delante de mí un individuo con aspecto de médico y militar a un tiempo. Luego se trata de un médico militar. Acaba de llegar del trópico, porque la tez de su cara es oscura y ése no es el color suyo natural, como se ve por la piel de sus muñecas. Según lo pregonaba su macilento rostro, ha experimentado sufrimientos y enfermedades. Le han herido en el brazo izquierdo. Lo mantiene rígido y de forma forzada... ¿en qué lugar del trópico es posible que haya sufrido un médico militar semejantes contrariedades, recibiendo además una herida en un brazo? Evidentemente, en Afganistán"*

1.2. ¿Qué había antes?

La filosofía, la cosmología e incluso la religión se preguntan

¿Qué había antes?

y razonan para llegar a una respuesta. En *La historia más bella del mundo* el periodista Dominique Simonnet entrevista, entre otros, al astrofísico Hebert Reeves y producen un relato interesante del origen del mundo en el que no faltan razonamientos. Veamos un par de ejemplos:

³ Arthur Conan Doyle. 1887. Estudio en Escarlata.

Ejemplo 5 *La oscuridad de la noche: Una prueba de la Teoría del Big Bang*⁴

El gran descubrimiento de este siglo es que el universo no es inmóvil ni eterno, como supuso la mayoría de los científicos del pasado. ...el universo tiene una historia, no ha cesado de evolucionar, enrareciéndose, enfriándose, estructurándose. ...esta evolución sucede desde un pasado distante que se sitúa, según las estimaciones, hace diez o quince mil millones de años...(cuando) el universo está completamente desorganizado, no posee galaxias, ni estrellas, ni moléculas, ni tan siquiera núcleos de átomos... Es lo que se ha llamado el BIG BANG". Una de las pruebas indirectas de esta teoría se puede plantear así: "Si las estrellas fueran eternas y no cambiaran nunca, como pretendía Aristóteles, la cantidad de luz emitida sería infinita. El cielo debería ser, entonces, extremadamente luminoso. ¿Por qué no lo es? Este enigma atormentó a los astrónomos durante siglos. Ahora sabemos que el cielo es oscuro porque las estrellas no existieron siempre.

En la tradición filosófica que perduró dos milenios se consideraba, como Aristóteles, que el universo era eterno y no cambiaba. Hoy se sabe que las estrellas nacen y mueren tras vivir millones de años. Algunos filósofos lo supusieron, como Lucrecio, en el siglo I antes de Cristo.

Ejemplo 6 *Lucrecio, filósofo romano*

Lucrecio afirmaba que el universo aún estaba en su juventud. Razonó así: He comprobado desde mi infancia, se dijo, que las técnicas se han ido perfeccionando. Han mejorado el velamen de nuestros barcos, inventado armas más y más eficaces, fabricado instrumentos musicales más refinados... ¡Si el universo fuera eterno, todos estos progresos habrían tenido tiempo de realizarse cien, mil, un millón de veces!

El origen de los tiempos preocupó también en la filosofía Zen.

Ejemplo 7 *El jade celeste.*

Tang de Ying preguntó a Ge: "¿Existían las cosas al principio de los tiempos?" Xia Ge respondió: "Si al principio de los tiempos no hubiesen existido las cosas, ¿cómo sería posible que existiesen hoy? Con idéntica razón, los hombres del futuro podrían decir que hoy no existían las cosas".

Los problemas de cosmología son también el argumento de este divertido pasaje:

Ejemplo 8 *Confucio se dirigía hacia el este cuando vio a dos chiquillos discutiendo. Al preguntarles el motivo de su disputa uno de ellos dijo: "Yo digo que cuando el sol sale está cerca y a mediodía, lejos. Éste dice que cuando sale está*

⁴Este ejemplo está sacado del libro: *La historia más bella del mundo*. Hubert Reeves y otros. Anagrama: 1997. (páginas 20 y 33)

lejos y a mediodía, cerca.” Uno argumentaba: “Cuando el sol sale es grande, como un toldo de carruaje. A mediodía, en cambio, del tamaño de un plato o un tazón. ¿Y no es cierto que lo grande está cerca y lo pequeño lejos?” El otro: “Cuando el sol sale es frío y a mediodía, como agua hirviendo. Y lo caliente está cerca y lo frío lejos, ¿no es así?” Confucio no supo resolver el problema. Los dos chiquillos se echaron a reír: “¿Quién dice que tú eres un hombre de grandes conocimientos?”

2. Lógica formal

Los anteriores no son más que una pequeña colección de ejemplos en donde aparentemente se usa la lógica, aunque de manera informal. Todos nosotros, supuestos seres racionales, empleamos la lógica cuando razonamos, asimilamos o procesamos la información que recibimos del entorno, cualquier tipo de información: somos lógicos porque somos seres humanos, y el comportamiento racional implica usarla como herramienta.

Pero la *Lógica* es fundamentalmente una disciplina en sí misma, una de las grandes ramas del conocimiento, que se define como el estudio de la *consecuencia* —esto es, la que se ocupa de los razonamientos válidos o correctos— o, de forma equivalente, como el estudio de la *consistencia* —a saber, la que puede identificar a los conjuntos de creencias compatibles, coherentes, *consistentes*, *satisfacibles*—

En sentido coloquial se usa el adjetivo lógico no sólo para describir las reglas del razonamiento correcto, sino en una gran variedad de casos, más en concordancia con el uso original del “*logos*” de los griegos, relacionándolo con el lenguaje, la doctrina, la estructura del conocimiento, la razón, etc. Por supuesto, también está directamente emparentada con las matemáticas, que cuentan desde la antigüedad con un ejemplo paradigmático de proceder lógico, *Los Elementos* de Euclides. La Geometría quedó así fijada en unos axiomas de los que mediante reglas de deducción se extraían todos los teoremas generales que la constituían. Es importante señalar aquí la importancia de poder determinar si ese conjunto de axiomas es consistente y también la de poder contar con un cálculo en el que se puedan demostrar todas sus consecuencias, pero sólo ellas. Éste y otros objetivos similares pero más exigentes constituyen el denominado *programa de Hilbert*. Su idea era explotar al máximo la naturaleza finita de las pruebas para proporcionar una fundamentación de la matemática. Podría resumirse su concepción diciendo que preconizaba una axiomatización de las teorías matemáticas de la que pudiera probarse su:

1. *Consistencia*. Es decir, que nunca se podrá demostrar como teoremas de la teoría una sentencia y su negación
2. *Compleitud*. Es decir, que cada sentencia —del lenguaje en el que se axiomatizó la teoría— sea ella misma o su negación un teorema de la teoría axiomática
3. *Decidibilidad*. Es decir, que exista un procedimiento efectivo o algoritmo

mediante el cual, en un número finito de pasos, se determine si una sentencia del lenguaje es o no un teorema de la teoría

Los sistemas de cálculo de Gentzen condujeron a la teoría de la demostración por sus actuales derroteros, ligada inexorablemente a la perspectiva informática. El teorema de Herbrand de 1930 y, posteriormente, el de Robinson se consideran los pilares de la *demostración automática de teoremas*. Hoy sabemos que como programa general el de Hilbert es inaplicable ya que hay resultados negativos que sitúan la capacidad de los formalismos en unas metas menos ambiciosas.

Durante el transcurso del siglo XX la lógica fue retomando su extensión y amplitud originales estudiándose en ella no sólo el razonamiento matemático sino también fenómenos de gestión y transmisión de información, de toma de decisiones y de la acción, y en general en casi todos los contextos gobernados por reglas. Más importante aún, la lógica constituye el sustrato teórico de la computación, la clave codificadora de sus circuitos internos; pero también se pregunta por su alcance y sus límites. Saber qué pueden y que no pueden hacer los algoritmos, los cálculos deductivos, los lenguajes formales, es crucial y la lógica también se ocupa de ello. El campo de la lógica no se agota en el cálculo que un humano o una máquina pueda efectuar ya que también le interesan las interacciones entre los agentes que participan en la conversación, el proceso de adquisición de conocimiento, la dinámica y el flujo de la información. Otro aspecto a tener en cuenta, pues lo realizamos continuamente en nuestra vida, es el de modificar y revisar nuestras creencias. Por su incidencia en el proceso de adquisición de conocimiento y de mantenimiento de la consistencia de nuestra base de conocimientos lo debemos incorporar a nuestros programas informáticos, a nuestros sistemas expertos. La lógica es argumentación y como a ella se la puede considerar como un juego en el que los participantes emplean ciertas estrategias y sus movimientos están determinados no sólo por sus propios objetivos sino también por los movimientos de sus oponentes.

Johan van Benthem [5] entiende que aunque la lógica no es ya el puerto seguro frente a las tempestades del océano de las contradicciones, sí que puede considerarse el *sistema inmunológico y dinámico de la mente*.

3. Para empezar: lógica clásica

Hacer lógica formal a partir de un planteamiento intuitivo e informal significa ir soltando lastre. Se eliminan los enunciados del castellano introduciendo un lenguaje riguroso, después, el concepto intuitivo de consistencia como compatibilidad de enunciados, que hace referencia a situaciones posibles, se sustituye por el de satisfacibilidad, en donde las situaciones se reemplazan por las interpretaciones, matemáticamente definidas. A continuación se abandona el concepto intuitivo de consecuencia y se define matemáticamente, en términos semánticos. Así la *lógica* se convierte en una disciplina rigurosa, formal. Más adelante incluso se supera el concepto de validez, ligado al de interpretaciones o modelos, y se introduce la noción de cálculo deductivo como manipulación meramente

sintáctica de las fórmulas del lenguaje formal. El objetivo es que al concepto intuitivo le correspondan uno semántico y otro sintáctico, siendo estos últimos equivalentes.

3.1. Lógica proposicional

Reformulemos levemente el argumento del ejemplo 5 para explicitar sus extremos; eliminemos la información superflua, las preguntas retóricas. Emplearemos un lenguaje muy simple, proposicional, con letras minúsculas — p , q , r , etc.— para representar enunciados atómicos y los signos

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$$

para conectarlos entre sí. La formalización que propongo de la prueba indirecta del Big Bang es:

- $(p \rightarrow q) :=$ Si las estrellas fueran eternas, entonces la cantidad de luz emitida sería infinita.
- $(q \rightarrow r) :=$ Si la cantidad de luz emitida fuera infinita, entonces el cielo debería ser extremadamente luminoso.
- $\neg r :=$ El cielo es oscuro.

LUEGO,

- $\neg p :=$ Las estrellas no existieron siempre.

Para expresar que la última es una consecuencia de las otras tres escribimos:

$$\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), \neg r\} \models \neg p$$

Claramente el esquema argumental no levanta sospechas, otra cosa es si aceptáis como verdaderas en el mundo real las hipótesis. Obviamente, el determinarlo no es misión de la lógica. En el presente ejemplo lo sería de la Cosmología. Pero, si el esquema anterior correspondiese a un razonamiento correcto, lo seguiría haciendo cuando retrotradujésemos al castellano p , q y r . De hecho, el razonamiento del ejemplo 6 sigue exactamente el mismo patrón. Por consiguiente, será también correcto: *un razonamiento correcto nos da la pauta de muchos otros.*

¿Cómo se demuestra que es correcto?

En un cálculo axiomático o de deducción natural emplearíamos la regla denominada MODUS TOLLENS —de $\alpha \rightarrow \beta$ y $\neg\beta$ se sigue $\neg\alpha$ —, que junto a la de MODUS PONENS —de $\alpha \rightarrow \beta$ y α se sigue β — se remontan a la antigüedad clásica. Cuando, como aquí haremos, la consecuencia se prueba sintácticamente en un cálculo deductivo empleamos el signo $\vdash$. Concretamente probaremos

$$\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), \neg r\} \vdash \neg p$$

En una demostración formal en un cálculo axiomático procederíamos así:

1	$(p \rightarrow q)$	premisa
2	$(q \rightarrow r)$	premisa
3	$\neg r$	premisa
4	$\neg q$	modus tollens 2,3
5	$\neg p$	modus tollens 1,4

Chequear si una demostración formal es correcta es relativamente fácil, basta con comprobar la adecuada aplicación de las reglas del tipo de las mencionadas: MODUS PONENS y MODUS TOLLENS. Demostrar en un cálculo puede resultar tedioso: un demostrador automático de teoremas usa millones de pasos similares. Encontrar soluciones es algo más complejo aunque en el caso proposicional hay un método que lo resuelve⁵.

3.2. Limitaciones de la lógica proposicional

Pese al buen comportamiento de su cálculo deductivo, al ser la capacidad expresiva de la lógica proposicional extraordinariamente limitada, no nos resulta útil en muchos casos.

Considerad el razonamiento del ejemplo 1, convenientemente reformulado:

- $A := \text{Carlos es un puritano}$
- $B := \text{Para querer hay que mancharse}$
- $C := \text{Los puritanos no se manchan}$
- LUEGO:*
- $D := \text{Carlos no ama a Ana}$

En lógica proposicional A , B , C y D se formalizan como letras proposicionales —por ejemplo, p , q , r y s — y por lo tanto $\{p, q, r\} \not\models s$. Sin embargo, el razonamiento es claramente correcto. En primer orden será fácil demostrar la validez del razonamiento.

3.3. El lenguaje de primer orden

Se añade al proposicional la capacidad de analizar las fórmulas atómicas mediante relatores, funtores y constantes y la cuantificación e igualdad sobre individuos. Nuestro *Silogismo del reproche* se podría formalizar así:

$$\begin{array}{lll} A := Pc & B := \forall x(\exists y Axy \rightarrow Mx) & C := \forall x(Px \rightarrow \neg Mx) \\ \text{Conclusión:} & D := \neg Aca \end{array}$$

Nuestro objetivo es demostrar que

$$\{Pc, \forall x(\exists y Axy \rightarrow Mx), \forall x(Px \rightarrow \neg Mx)\} \models \neg Aca$$

⁵Lo veremos en la sección 6.2.

En este caso hemos tenido que decidir qué lenguaje formal íbamos a emplear, prescindir de los décticos y dar nombre a los protagonistas para así eliminar la ambigüedad de la frase “tú no me quieres”. La formalización ya no es tan trivial como en el ejemplo anterior, aunque también es sencilla. Concretamente, introducimos las constantes individuales a y c para nombrar a los protagonistas, los relatores M , P y A para “mancharse”, “ser puritano” y “amar a”.

Para interpretar las fórmulas del lenguaje formal empleamos estructuras matemáticas. En este caso una estructura adecuada

$$\mathcal{A} = \langle \mathcal{U}, a^{\mathcal{U}}, c^{\mathcal{U}}, M^{\mathcal{U}}, P^{\mathcal{U}}, A^{\mathcal{U}} \rangle$$

consta de un universo $\mathcal{U}$ no vacío, dos individuos destacados $a^{\mathcal{U}}, c^{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$, dos subconjuntos del universo $M^{\mathcal{U}}, P^{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ y una relación binaria $A^{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$. En esta estructura A será verdadera, y escribimos $\mathcal{A} \models A$ syss $c^{\mathcal{U}} \in P^{\mathcal{U}}$. Mientras que $\mathcal{A} \models C$ syss $P^{\mathcal{U}} \subseteq \sim M^{\mathcal{U}}$; esto es, el conjunto $P^{\mathcal{U}}$ es un subconjunto del complementario de $M^{\mathcal{U}}$. Finalmente $\mathcal{A} \models B$ syss $\text{Dom}(A^{\mathcal{U}}) \subseteq M^{\mathcal{U}}$. Dada una estructura $\mathcal{A}$ no es difícil comprobar que siempre que A , B y C son verdaderas también lo es D . Pero para demostrar que efectivamente $\{A, B, C\} \models D$ no basta con comprobarlo en una muestra finita de modelos, habría que hacerlo en todos y esto es imposible. Afortunadamente, como en el caso proposicional, hay una forma mucho más sencilla de comprobar consecuencia que no pasa por chequear la verdad de nuestras fórmulas en todo modelo posible: podemos usar un cálculo deductivo similar al empleado en el ejemplo 6 y derivar en él D usando $\{A, B, C\}$ como hipótesis. Para consecuencia sintáctica (deducibilidad) escribimos $\{A, B, C\} \vdash D$. Por supuesto, el concepto semántico de consecuencia y el sintáctico de deducibilidad se corresponden, lo expresan los conocidos teoremas de completud y corrección, cuya demostración es imprescindible para poder confiar en un cálculo deductivo.

Usamos la lógica como lenguaje en el que representar el conocimiento e interpretamos sus fórmulas en estructuras matemáticas, pero también el cálculo lógico sirve para determinar si el razonamiento de la protagonista es correcto. Para demostrarlo procederíamos así:

1	Pc	premisa
2	$\forall x(\exists y Axy \rightarrow Mx)$	premisa
3	$\forall x(Px \rightarrow \neg Mx)$	premisa
4	$Pc \rightarrow \neg Mc$	eliminación generalizador, 3
5	$\neg Mc$	modus ponens 1 y 4
6	$\exists y Acy \rightarrow Mc$	eliminación generalizador, 3
7	$\neg \exists y Acy$	modus tollens 5, 6
8	$\forall y \neg Acy$	regla derivada
9	$\neg Acp$	eliminación generalizador, 8

Con el paso del tiempo los sistemas de cálculo se han ido perfeccionando y también se han creado otros que son más fácilmente implementables; entre ellos destacan los de tableaux semánticos y los de resolución. Estos cálculos tienen una inspiración claramente semántica ya que sus reglas explicitan las condiciones de

verdad de las conectivas y cuantificadores y nos ayudan a encontrar realizaciones o modelos de nuestros enunciados; en el caso proposicional hay básicamente dos reglas

- α -reglas ($\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$): Conjuntivas
- y
- β -reglas ($\beta = \beta_1 \vee \beta_2$): Disyuntivas

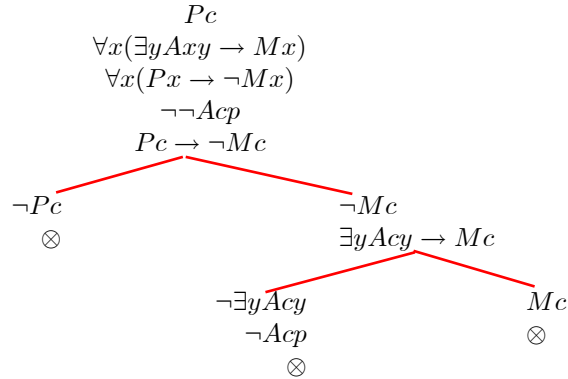
Las β abren dos ramas, una para β_1 y otra para β_2 , y las α obligan a que se den ambas, α_1 y α_2 , en la misma rama. Hay reglas γ y δ para la cuantificación.

- γ -reglas Si t es un término cerrado
1. de $\forall xA$ podemos deducir $A(t)$
 2. de $\neg\exists xA$ podemos deducir $\neg A(t)$.

- δ -reglas: Si c es una constante que no haya sido usada aún en la rama
1. De $\exists xA$ podemos deducir $A(c)$
 2. De $\neg\forall xA$ podemos deducir $\neg A(c)$

Las ramas se van cerrando al encontrarse contradicciones explícitas. Un tableau con todas las ramas cerradas muestra la imposibilidad de encontrar un modelo y por consiguiente, cuando queremos demostrar que una fórmula es consecuencia de un conjunto de fórmulas lo que hacemos es seguir un procedimiento refutativo, viendo la imposibilidad de que se den a la vez la hipótesis y la negación de la conclusión: demostramos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ carece de modelo. De hecho demostramos $\Gamma \vdash_{tab} \varphi$ porque también para el cálculo de tableaux de primer orden se aplican los teoremas de completud y corrección mencionados anteriormente.

Concretamente, en nuestro ejemplo el tableau quedaría así



En el ejemplo 3 de la sopa de ratón podemos emplear un lenguaje de primer

orden con un relator monario, dos binarios y tres constantes individuales.

$Rx := x$ es un ratón
 $Cxy := x$ cocina y
 $Ixy := x$ es un ingrediente de y
 $w :=$ comadreja del cuento
 $m :=$ ratón del cuento
 $s :=$ sopa de ratón del cuento

El argumento que le llevó a la conclusión de que iba a ser sopa de ratón

$$D := \text{Im } s$$

parte de la hipótesis de que la comadreja declara que va a cocinar sopa de ratón

$$A := Cws$$

de la evidencia de que para hacer sopa de ratón hace falta el ingrediente que le dá nombre

$$B := \forall x(Cxs \rightarrow \exists y(Ry \wedge Iys))$$

y de la conciencia de que él es un ratón y no hay ningún otro

$$C := Rm \wedge \forall x(Rx \rightarrow x = m)$$

En el cálculo de primer orden es fácil deducirlo

$$\{A, B, C\} \vdash_{tab} D$$

A nadie se le escapa que la implicación personal condiciona la percepción de la conclusión y la acción futura tanto en el caso del ratón como en el del silogismo del reproche. Esos aspectos no se tienen en cuenta en la lógica clásica, pero tienen su hueco en otras lógicas epistémicas y autoepistémicas.

La lógica de primer orden contiene a la proposicional, pero es más potente. Hay que señalar las ventajas y los inconvenientes de la lógica clásica de primer orden, resaltando entre las primeras su expresividad y entre las segundas su mal comportamiento desde un punto de vista computacional: indecidibilidad para validez, difícil chequeo de modelos. Ello nos hace fijarnos en ciertos subconjuntos de las fórmulas de primer orden que son interesantes para nuestros propósitos. Destacan los conjuntos formados por aquellas fórmulas que emplean sólo relatores monarios, los que usan sólo un número finito de variables y los que tienen limitada la alternancia de cuantificadores; concretamente LPO^2 (lógica de primer orden con dos variables) es un fragmento decidible de LPO , aunque LPO^3 (con tres) ya es indecidible.

En el marco de la lógica clásica son especialmente sencillos los razonamientos lógicos que se resuelven con diagramas de Venn, su lenguaje tiene una complejidad que se sitúa entre la proposicional y la de primer orden de predicados monarios. En este contexto se presentan los silogismos.

3.4. Silogística

Aristóteles fue el primero que de manera sistemática trató con una cierta profundidad la relación que se establece entre las sentencias que forman parte de un razonamiento, observando que para estudiar la naturaleza de la deducción hace falta analizar primero la estructura de las que constituyen sus hipótesis y su conclusión. En la lógica tradicional, de Aristóteles a Leibniz, incluso en Boole, ésta se toma de la gramática de las lenguas naturales⁶; es decir, una sentencia se analiza en términos de *sujeto* S y *predicado* P . Se distinguen cuatro *formas* típicas de proposiciones: A, E, I y O

El silogismo categórico es una estructura de proposiciones que se caracteriza:

1. Por tener dos premisas (mayor y menor) y una conclusión
2. Por tener sólo tres términos: Mayor P , medio M y menor S

Se llaman figuras del silogismo a las distintas posiciones que ocupa el término medio —el que desaparece de la conclusión— y que se expresan así:

Primera figura	Segunda figura	Tercera figura	Cuarta figura
$\frac{M \ P}{S \ M}$	$\frac{P \ M}{S \ M}$	$\frac{M \ P}{M \ S}$	$\frac{P \ M}{M \ S}$
$\frac{S \ P}{S \ P}$	$\frac{S \ P}{S \ P}$	$\frac{S \ P}{S \ P}$	$\frac{S \ P}{S \ P}$

El modo de un silogismo resulta de la combinación de las formas y figuras que contiene. Para cada figura hay sesenta y cuatro modos posibles. Como hay cuatro figuras, el resultado final es de 256 silogismos posibles. Por supuesto, no todos son válidos. La lógica tradicional seleccionaba de entre ellos a 24, a los que consideraba silogismos válidos, a muchos de los cuales se les atribuyeron nombres nemotécnicos en el medioevo. El más conocido es el de *BARBARA*, del que hacemos uso continuamente. Se trata de un silogismo de la primera figura en donde todas sus proposiciones son de la forma universal afirmativa, A . El ejemplo 2 enlaza varios argumentos simples, alguno de los cuales sigue aparentemente ese patrón

*Me dijeron que no soy nadie. Nadie es perfecto.
Luego, yo soy perfecto.*

Hoy no enseñamos la lógica aristotélica porque la lógica matemática la supera con creces; sin embargo debemos hacer justicia al filósofo y reconocer que la silogística es capaz de identificar adecuadamente los razonamientos correctos, algo que dista mucho de ser el caso en otras de sus aportaciones; por ejemplo, la física aristotélica. Por supuesto, no identifica a *todos* los correctos; estamos hablando de su reducido campo de aplicación, el de la lógica de predicados

⁶Nosotros ahora utilizamos un análisis más rico, basado en la concepción de Frege.

monarios y con una sola variable, una lógica que se sitúa entre la proposicional y la de primer orden. Para ser exactos, tampoco todos los seleccionados son razonamientos válidos con los estándares actuales. La razón es que para nosotros existe la cuantificación vacía y al afirmar que

Todos los misóginos son impresentables

no decimos que los haya, sino que caso de haberlos serían impresentables. En la interpretación de la silogística clásica se excluye la muy deseable situación de ausencia de misóginos.

3.5. Lenguajes clásicos

En la lógica clásica hay varias categorías de lenguajes: proposicional, de primer orden, de segundo orden, etc. Hemos visto que el de primer orden añade al proposicional la capacidad de analizar las fórmulas atómicas mediante relatores, funtores y constantes y la cuantificación sobre individuos. Así que para la pregunta

¿Qué lenguaje necesitamos?

no hay una respuesta categórica, depende de para qué. Seguimos preguntándonos,

¿Se pueden expresar en primer orden todas las propiedades imaginables de las estructuras matemáticas?

El lenguaje de segundo orden añade al anterior la facultad de cuantificar sobre conjuntos y relaciones. Veamos algunos ejemplos

1. El *Axioma de Inducción* puede formularse del modo siguiente, y retener todo su poder expresivo:

$$\forall X(Xc \wedge \forall x(Xx \rightarrow X\sigma x) \rightarrow \forall x Xx)$$

Esta fórmula dice: *Toda propiedad que valga para el cero y para el siguiente de cualquier número que la tenga, es una propiedad de todos los números.* La aritmética de Peano de segundo orden AP^2 la forman este axioma, junto al de *inyectividad* de la función del siguiente y la exigencia de que el *cero* no sea siguiente de ningún número.

2. La *Identidad entre Individuos* puede introducirse por definición y no ser, como en la lógica de primer orden, un concepto lógico, primitivo; es decir, tomado directamente de la metateoría. La definición comúnmente aceptada es la de Leibniz, que en *SOL* presenta el siguiente aspecto:

$$\forall xy(x = y \leftrightarrow \forall X(Xx \leftrightarrow Xy))$$

Esta fórmula dice: *“Dos individuos son iguales si, y sólo si, comparten todas sus propiedades”.*

3. El concepto intuitivo de *la mayoría de los R son S* —i.e., la mayor parte de los elementos que tienen la propiedad R tienen también la propiedad S —, puede expresarse en lógica de segundo orden con dos relatores monarios para R y S del modo siguiente:

$$\neg \exists X^2 (\forall x (\exists y X^2 xy \leftrightarrow Rx \wedge Sx) \wedge \forall x (\exists y X^2 yx \rightarrow Rx \wedge \neg Sx) \\ \wedge \forall xyz (X^2 xy \wedge X^2 xz \rightarrow y = z) \wedge \forall xyz (X^2 xy \wedge X^2 zy \rightarrow x = z))$$

Esta fórmula dice: “no hay ninguna función inyectiva de $R \cap S$ en $R - S$ ”. Se acepta que esta formulación logra captar la idea intuitiva de: “la mayor parte de los R son S ”, puesto que está diciendo que el conjunto $R \cap S$ es “mayor” que el conjunto $R - S$.

Vemos que si nos preguntamos

¿Sirve la lógica de primer orden para axiomatizar toda la matemática?

la respuesta es que no. El lenguaje de la lógica de segundo orden es más expresivo que el de primer orden y éste que el de orden cero. Sin embargo, las propiedades lógicas de estos lenguajes van decreciendo: mientras que la lógica proposicional posee un cálculo deductivo correcto, completo y es decidible, la de primer orden posee un cálculo correcto y completo, pero ya no es decidible, y la de segundo orden ni es decidible ni posee un cálculo completo.

Conclusión 9 *Una lógica es como una balanza: en un platillo se pone el poder expresivo de la lógica y en el otro las propiedades lógicas. En la lógica proposicional pesan más las propiedades lógicas, en la de segundo orden la capacidad expresiva, mientras que la de primer orden está más equilibrada. Sabiendo esto somos nosotros los que decidiremos qué lógica necesitamos, qué virtudes nos interesa conservar.*

4. Argumentación y Retórica

La lógica también está emparentada con la Teoría de la Argumentación y con la Retórica. Los estudiantes de filosofía recordamos a los sofistas y también los diálogos platónicos en los que Sócrates termina acorralando a sus adversarios, con la fuerza de sus argumentos. La lógica proporciona los patrones o estrategias que se pueden desarrollar en el curso de una buena argumentación competitiva. Puesto que la mejor y más honesta manera de vencer en una controversia es proporcionar una argumentación correcta, el interés práctico conduce al teórico, investigándose la inferencia válida.

La teoría de la argumentación se centra en el análisis de la estructura de los argumentos y distingue la corrección formal de un argumento de su solidez, que tiene en cuenta el grado de justificación de las premisas. Por lo que respecta a los argumentos complejos se distingue entre argumentación *concatenada*, *coorientada* y *antiorientada*. La primera se caracteriza porque la conclusión de un

argumento forma parte del conjunto de hipótesis del que lo sigue. De esta clase es la llevada a cabo en el ejemplo 2.

El discurso más importante en la antigüedad clásica era el discurso legal y el político y ahí lo principal era convencer, por lo que recoge también consideraciones psicológicas y lingüísticas. A nadie se les escapa que convencer y tener objetivamente la razón no son siempre la misma cosa. El filósofo Arthur Schopenhauer en su irónico opúsculo *El arte de tener razón* propone 38 estratagemas, todas *suculentas*, para vencer. Cito la última, que como veis se aplica continuamente en las tertulias radiofónicas y televisivas.

“Cuando se advierte que el adversario es superior y que uno nunca conseguirá llevar razón, persolálcese, séase ofensivo, grosero”.

El objetivo no es otro que vencer, de la manera que sea

“La dialéctica **erística** es el arte de discutir, y de discutir de tal modo que uno siempre lleve razón, es decir, **per fas et nefas** [justa o injustamente]”

Las estrategias de Schopenhauer tendrían una traducción en nuestro mundo digital y en vez de ser ofensivo o grosero se podría destruir archivos, hacer que la aplicación del usuario entre en un bucle sin fin, modificar su fondo de escritorio sin previo aviso, etc.

5. Otras lógicas

En el ejemplo 7 lo primero que deberíamos hacer es identificar premisas y conclusión; aquí vemos que la pregunta inicial es justamente la conclusión del argumento. Conociendo los recursos de la retórica, la razón que parece sustentarlo es la de la permanencia de las leyes que gobiernan el cosmos, en especial respecto a la existencia de objetos; el argumento contenido en este pasaje, podría reformularse así:

Hipótesis 1 $\alpha :=$ *Si existen cosas en un momento dado, entonces en todo momento anterior han existido cosas*

Hipótesis 2 $\beta :=$ *Existen cosas hoy*

Hipótesis 3 $\gamma :=$ *El principio de los tiempos es anterior a todo*

LUEGO

Conclusión $\delta :=$ *Existían cosas al inicio de los tiempos*

Utilizando el siguiente lenguaje formal de primer orden:

$Exy := y$ existe en el momento x
 $Cx := x$ es una cosa
 $Mx := x$ es un momento de tiempo
 $Axy := x$ es anterior a y
 $a :=$ principio de los tiempos
 $h :=$ hoy

Escribiríamos:

$$\begin{aligned}
 \alpha &:= \forall y(My \wedge \exists x(Cx \wedge Exy) \rightarrow \forall z(Mz \wedge Azy \rightarrow \exists x(Cx \wedge Exz))) & (1) \\
 \beta &:= \exists x(Cx \wedge Exh) & \gamma := \forall y(My \rightarrow Aay) & \delta := \exists x(Cx \wedge Exa)
 \end{aligned}$$

La interpretación de estas fórmulas contará con un universo heterogéneo $\mathcal{U}$ formado tanto por cosas como por momentos de tiempo y varios relatores. En este caso lo natural sería tener dos universos $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ —para cosas uno y para momentos otro— y prescindir de los relatores monarios, al tener distintos tipos de variables para cuantificar sobre cada universo. Esto es lo que se hace en lógica multivariada o heterogénea.

5.1. Lógica multivariada

En muchas de las ramas de la matemática, de la filosofía, de la I.A. y de la informática formalizamos enunciados relativos a diversos tipos de objetos. Por consiguiente, tanto los lenguajes lógicos utilizados, como las estructuras matemáticas que los interpretan son multivariadas o heterogéneas; esto es, el conjunto de las variables del lenguaje toma valores sobre diversos universos o dominios. Son numerosos los ejemplos de materias que utilizan fórmulas y estructuras multivariadas: En *geometría*, por tomar un ejemplo clásico y sencillo, usamos distintos universos para *puntos*, *líneas*, *ángulos*, *triángulos*, etc. En *computación* utilizamos invariablemente estructuras multivariadas: lo típico es tener universos de *datos*, *números naturales* y *operadores booleanos*. Podemos añadir otros para *números reales*, *cadenas de caracteres*, *matrices*, etc.

¿Qué lenguaje y qué lógica es el adecuado en cada uno de estos campos?

La respuesta es que la lógica multivariada es la que mejor les cuadra.

Éste es también el caso en nuestro ejemplo 7. Podemos simplificar la formalización al emplear un *lenguaje bivariado* con dos clases de variables para *cosas* y para *instantes de tiempo*, un predicado binario de *existencia en un instante* dado y dos constantes temporales, *hoy* y el *inicio de los tiempos*. En él escribiríamos:

$$\begin{aligned}
 \alpha &:= \forall t(\exists xExt \rightarrow \forall t!(At!t \rightarrow \exists xExt!)) & \beta &:= \exists xExh \\
 \gamma &:= \forall t Aat & \delta &:= \exists xExa
 \end{aligned} \tag{2}$$

Comparando las formalizaciones en lógica de primer orden 1y en multivariada 2 se entiende bien la relación entre ambas lógicas. La reducción de la lógica multivariada a la univariada es un resultado no sólo bien conocido desde antiguo, sino también el planteamiento que normalmente se hace en los libros de texto. El proceso se lleva a cabo a dos niveles: hay una *traducción sintáctica* de las fórmulas multivariadas a las univariadas —conocida como *relativización de cuantificadores*— y una *conversión semántica* de estructuras —conocida como *unificación de dominios*—. Lo que nunca se suele decir en los libros de texto es el precio que debe pagarse, algo sobre lo que hablaré después.

Para traducir tomamos un lenguaje de primer orden sin variedades —esto es, con una sola clase de variables— con los mismos signos de operación que tuviéramos en la multivariada y le añadimos tantos relatores monarios como variedades hubiera. Cada fórmula cuantificada sobre una variedad i

$$\forall x^i \varphi(x^i)$$

será reemplazada por una fórmula cuantificada condicional, en cuyo antecedente decimos sobre qué variedad se restringe la cuantificación

$$\forall x(Q^i x \rightarrow \varphi(x)^*)$$

La nueva estructura univariada obtenida mediante unificación de dominios tendrá un solo universo constituido por la unión de todos los universos de la que se reduce, las relaciones de la estructura multivariada pasan a serlo de la nueva univariada y las funciones de la multivariada se extienden para que puedan serlo de la univariada, añadiendo valores arbitrarios para los nuevos elementos.

Volvamos al caso concreto de nuestro ejemplo 7. Aunque hemos simplificado la formalización, no termina de ser completamente natural. Aquí lo natural sería emplear la lógica temporal o, aún mejor, lógica híbrida.

5.2. Lógica temporal

En ella añadimos al lenguaje proposicional o de primer orden nuevos operadores modales:

$\langle P \rangle \varphi$	Alguna vez en el pasado, φ
$\langle F \rangle \varphi$	Alguna vez en el futuro, φ
$[P] \varphi$	Siempre en el pasado, φ
$[F] \varphi$	Siempre en el futuro, φ

Prior (1967) formula varias tesis sobre el tiempo que servirán de axiomas en su lógica temporal; entre ellas cabe destacar:

- $[F] \varphi \rightarrow \langle F \rangle \varphi$ *Lo que siempre será verdadero, lo será alguna vez*
- $\langle F \rangle \varphi \rightarrow \langle F \rangle \langle F \rangle \varphi$ *Si φ será verdadero alguna vez, entonces será alguna vez verdadero que φ será verdadero alguna vez*

El pasado y el futuro son interdefinibles

- $\varphi \rightarrow [P] \langle F \rangle \varphi$ *Lo que es verdadero, fue siempre verdadero que alguna vez sería verdadero*
- $\varphi \rightarrow [F] \langle P \rangle \varphi$ *Lo que es verdadero, será siempre verdadero que alguna vez fue verdadero*

La lógica híbrida se da cuenta de las incongruencias de la lógica modal, en donde, por una parte los estados o momentos de tiempo son cruciales pero no podemos referirnos a ellos ya que el lenguaje carece de los elementos necesario. En lenguajes híbridos se puede introducir referencias explícitas a los elementos del dominio de un modelo; por ejemplo, momentos específicos (días años, etc.). De esta forma podemos mejorar el poder expresivo, modelar indexicales temporales (ayer, hoy, mañana, ahora,...) y definir propiedades de marcos relevantes para la lógica temporal (irreflexividad, asimetría). La lógica híbrida también posee una elegante teoría de la prueba, próxima a los sistemas deductivos etiquetados de Gabbay.

¿Cómo se crea una lógica híbrida?

Prior en sus últimos trabajos utiliza términos para referirse a instantes de tiempo y los trata como fórmulas. Así

$$\langle F \rangle (i \wedge p)$$

dice que el instante i y la proposición p están en el futuro y coinciden. Esto es, p ocurre en el instante futuro i . Para ello hemos de extender el lenguaje añadiendo a los átomos un conjunto de nominales

$$\text{ATOM} \cup \text{NOM}$$

la idea es usar fórmulas para referirse a los instantes. También agregamos un conjunto de operadores modales

$$\{\@_i \mid i \in \text{NOM}\}$$

que nos permite formar nuevas fórmulas $\@_i \varphi \in \text{FORM}$ para indicar que en el instante i la fórmula φ es verdadera. Debemos interpretar $i \in \text{NOM}$ en $\mathcal{A}$ como una clase unitaria: $i^{\mathcal{A}} = \{a\}$ y definir la interpretación de las fórmulas con nuevos operadores

$$\mathcal{A}, w \Vdash \@_i \varphi \quad \text{syss} \quad \mathcal{A}, i^{\mathcal{A}} \Vdash \varphi$$

En la lógica híbrida escribimos nuestro argumento del jade celeste de forma más simple:

$$\begin{array}{llll} \text{Hipótesis} & \alpha := q \rightarrow [P] q & \beta := \@_h q & \gamma := a \rightarrow [P] \perp \\ \text{Conclusión} & \delta := \@_a q & & \end{array}$$

Esta conclusión es deducible en lógica híbrida, pues ella cuenta entre sus axiomas el que establece que la relación temporal conecta fuertemente a dos instantes cualesquiera

$$\@_a h \vee \@_a \langle P \rangle h \vee \@_h \langle P \rangle a$$

La prueba procedería así:

- Primer caso: $@_a h$. Usando la premisa $@_h q$ concluimos que $@_a q$
- Segundo caso: $@_a \langle P \rangle h$. Usando la premisa $a \rightarrow [P] \perp$ obtenemos $@_a [P] \perp$ (La regla del operador $@_a$ nos permite escribir $@_a(a \rightarrow [P] \perp)$, la de reflexividad de la identidad nos da $@_a a$ y ahora basta emplear el axioma K y aplicar la regla de MODUS PONENS). Mediante la regla de BINDING aplicada a $@_a \langle P \rangle h$ y $@_a [P] \perp$ obtenemos lo deseado.
- Tercer caso: $@_h \langle P \rangle a$. Usando las premisas $q \rightarrow [P] q$ y $@_h q$ obtenemos $@_h [P] q$ por el mismo procedimiento que en el caso anterior. Ahora BINDING aplicada a $@_h \langle P \rangle a$ y $@_h [P] q$ produce la conclusión deseada $@_a q$.

Otros ejemplos nuestros también se formulan bien en lógica híbrida. El primer argumento contenido en el pasaje de Confucio 8 podría reformularse así:

Hipótesis 1 $\alpha := \text{Cuando el sol sale es grande}$

Hipótesis 2 $\beta := A \text{ mediodía el sol es pequeño}$

Hipótesis 3 $\gamma := \text{Lo grande está cerca y lo pequeño lejos}$

LUEGO

Conclusión $\delta := \text{Cuando el sol sale está cerca y a mediodía, lejos}$

Necesitamos un lenguaje híbrido de primer orden en que poder expresar las propiedades de ser grande y pequeño y estar cerca o lejos. Un nombre para el sol y dos nominales para el alba y el mediodía. Podemos emplear éste

$Gx := x \text{ es grande}$
 $Px := x \text{ es pequeño}$
 $Cx := x \text{ está cerca}$
 $Lx := x \text{ está lejos}$
 $m := \text{mediodía}$
 $s := \text{sol}$
 $a := \text{alba}$

Como veis, la formalización en lógica híbrida es simple y expresiva

$$\begin{aligned}
 \alpha &:= @_a Gs & \beta &:= @_m Ps & \gamma &:= \forall x(Gx \rightarrow Cx) \wedge \forall x(Px \rightarrow Lx) \\
 \delta &:= @_a Cs \wedge @_m Ls
 \end{aligned}$$

6. Procedimientos de búsqueda

Aquí no se trata de comprobar si un enunciado es consecuencia de un conjunto de hipótesis, sino de encontrar una solución “razonable” a un problema o una explicación “convinciente” de un hecho sorprendente.

6.1. Lógica abductiva

En el ejemplo 4 la conclusión A es que el Dr Watson ha estado en Afganistán. Sherlock se basa en la evidencia de que está herido y moreno $H \wedge M$. Su razonamiento basado en su experiencia y conocimientos le indica que el Dr ha viajado al trópico, ya que está moreno y éste no es su color natural (tampoco fácil de conseguir con el clima británico). Por otra parte, sabe que es médico militar y que está herido y que en Afganistán su país mantiene una contienda pues tanto el imperio ruso como el británico se lo disputan. Aparentemente ha concluido A de la premisa $H \wedge M$ usando una hipótesis $A \rightarrow H \wedge M$ que parece plausible y compatible con el resto de sus conocimientos.

$$\frac{H \wedge M \quad A \rightarrow H \wedge M}{A}$$

Esto en lógica clásica es una aberración, la conocida como *falacia de la afirmación del consecuente*. Sin embargo, en lógica abductiva el planteamiento es distinto. A pretende ser una explicación de un hecho sorprendente $H \wedge M$ compatible con sus conocimientos sobre el caso. Por supuesto, no hay certeza absoluta para A , y en esto se distingue claramente del caso deductivo.

La interpretación más usual de la abducción como inferencia lógica es como *deducción para atrás más condiciones adicionales*, según Aliseda. El razonamiento abductivo se realiza en base a una cierta teoría Γ y a una fórmula φ que ha de ser explicada, para la que se postula una explicación α . Debe suceder que de la explicación sea consecuencia lógica el hecho φ , módulo la teoría

$$\Gamma \cup \alpha \models \varphi$$

pero además la explicación debe ser consistente con la teoría $\Gamma \cup \alpha \not\models \perp$ y ser mínima, lo que significa que su forma lógica es muy simple. Una condición adicional, para que el hecho sorprenda, es que de la teoría ni él ni su negación se deduzcan.

$$\Gamma \not\models \varphi \quad \Gamma \not\models \neg\varphi$$

Un hecho sorprende por su novedad o su anomalía, en el primer caso ni ese hecho ni su negación se desprende de la teoría, en el segundo se trata de que en verdad la teoría apoya su contrario $\Gamma \models \neg\varphi$. Las operaciones abductivas de cambio epistémico están asociadas a las propiedades mencionadas. En particular,

- la *expansión abductiva* que dada una novedad abductiva φ —tal que $\Gamma \not\models \varphi$ y $\Gamma \not\models \neg\varphi$ — y una explicación consistente α —tal que $\Gamma \cup \alpha \models \varphi$ — nos permite añadir a la teoría tanto la novedad como la explicación $\Gamma \cup \varphi \cup \alpha$
- la *revisión abductiva* que dada una anomalía abductiva φ —tal que $\Gamma \not\models \varphi$ y $\Gamma \models \neg\varphi$ — una explicación consistente α se calcula a partir de un subconjunto Δ de Γ obtenido mediante revisión. Básicamente hacemos que $\Delta \not\models \neg\varphi$ al quitarle algunas de sus fórmulas y luego obtenemos la explicación consistente de la forma usual, pero usando la teoría revisada.

6.2. Soluciones “razonables”

El cálculo de enunciados subyace al razonamiento cotidiano, lo empleamos para hallar soluciones a nuestros problemas, como el Padrino en el caso que sigue:

Ejemplo 10 Robo de Archivos de la MAFIA

Al llegar el Padrino a su despacho notó que alguien había entrado en él, ¡incluso habían revuelto sus archivos! Pudo comprobar que faltaban algunos documentos comprometedores.

La investigación del caso arroja estos datos:

$A :=$ Nadie más que P, Q y R están bajo sospecha y al menos uno es traidor.

$B :=$ P nunca trabaja sin llevar al menos un cómplice.

$C :=$ R es leal.

Contamos sólo con las hipótesis. Lo primero que hacemos es comprobar si el conjunto es *satisfacible* (consistencia semántica) ya que en caso contrario cualquier fórmula se seguiría de él y esas no serían soluciones razonables. Cuando el conjunto de hipótesis encierra contradicciones, para cualquier fórmula F : tanto F como $\neg F$ sería consecuencia del conjunto. En el caso del problema planteado, si el conjunto de hipótesis fuera insatisfacible, se podría demostrar para cada uno de los implicados que es culpable. E incluso también la culpabilidad de cualquier otra persona, aunque no haya aparecido en el enunciado del problema. Más dramático aún, se demostraría que *tú* eres culpable. Bien es verdad que también se puede demostrar que todos somos inocentes como pajarillos...

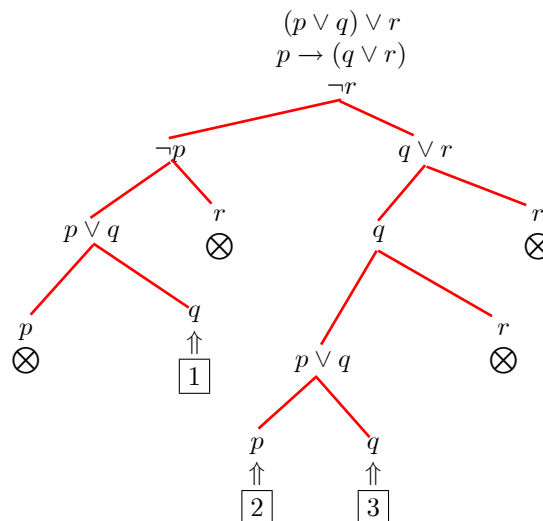
¡Descartamos por lo tanto las consecuencias de los conjuntos insatisfacibles!

Si el conjunto es satisfacible usaremos las ramas abiertas del tableau para hallar la solución: tomaremos los literales de dichas ramas y haremos la intersección; esto es, seleccionaremos los que están en todas las ramas, sólo esos. La conjunción de las fórmulas así obtenidas será la solución. Por supuesto, habrá otras muchas fórmulas que también serán consecuencia de las hipótesis, de hecho, infinitas. Hemos elegido ésta por ser la más simple. En los casos en los que la intersección de estos conjuntos de literales sea vacía, sigue habiendo fórmulas que son consecuencia de las hipótesis, nosotros hemos decidido descartarlas por no ser suficientemente contundentes.

Partimos del conjunto de hipótesis

$$\{(p \vee q) \vee r, p \rightarrow (q \vee r), \neg r\}$$

y queremos obtener una solución *razonable*. Para comprobar que son compatibles hacemos un árbol.



$\{A, B, C\}$ es satisfacible pues hay 3 interpretaciones que hacen a A, B y C simultáneamente verdaderas, basadas en los conjuntos

Hay tres ramas abiertas de las que extraemos el conjunto de sus literales

$$\boxed{1} = \{\neg p, \neg r, q\} \quad \boxed{2} = \{p, q, \neg r\} \quad \boxed{3} = \{q, \neg r\}$$

Para hallar la conclusión hacemos su intersección

$$\boxed{1} \cap \boxed{2} \cap \boxed{3} = \{q, \neg r\}$$

La conclusión resultante es: $q \wedge \neg r$

7. Ejercicios para resolver

Ejercicio 11 *El Péndulo de Foucault*

Mediante este experimento, Foucault pretende demostrar la rotación de la Tierra.

Parte de una serie de observaciones experimentales, utiliza sus conocimientos de física y llega a la conclusión de que efectivamente la tierra rota.

El experimento consta de un péndulo colgado de un punto fijo (idealmente, el del “**plano de las estrellas fijas**”) al que se le hace oscilar libremente. Alrededor del péndulo, en el plano de la Tierra, se dibuja un círculo formado por pivotes (perfectamente calculado según las coordenadas geográficas del lugar). Foucault observó que en su oscilación, el péndulo iba derribando sucesivamente todos los

pivotes. El sabía que el plano de oscilación del péndulo se mantenía fijo respecto del “**plano de las estrellas fijas**”. (La física establece que el plano de oscilación de cualquier péndulo se mantiene fijo respecto al plano sobre el que oscila.)

1. Formalizad en lógica proposicional el argumento que posiblemente utilizó Foucault usando las claves siguientes:

p := gira el plano del péndulo respecto del plano de la Tierra
 q := gira el plano del péndulo respecto del plano de las estrellas fijas
 t := gira el plano de la Tierra respecto del de las estrellas fijas
 s := caen más de dos pivotes

Reconstruyamos el razonamiento de Foucault. Vamos a emplear cuatro hipótesis. Os voy a dar unas pistas y vosotros escribireis las fórmulas empleando el lenguaje proposicional. La primera hipótesis es un hecho:

A := ? (observa los pilotes que derriba)

La segunda es una ley física:

B := ? (el plano de oscilación del péndulo se mantiene fijo)

C := ? (relación existente entre el giro del plano del péndulo respecto de la tierra y la caída de pivotes; se descartan otras posibilidades, el experimento está “vigilado”)

D := ? (expresa la relación entre los tres planos)

Conclusión:

E := t

2. Queremos demostrar que no existe ninguna interpretación $\mathfrak{S}$ en la que todas las hipótesis sean verdaderas sin que lo sea t también. O, lo que es equivalente, que $\{A, B, C, D\} \vdash E$

Ejercicio 12 Volvamos al ejemplo de la sopa de ratón. En el cálculo de primer orden es fácil deducir la conclusión. Demostrad que

$$\{A, B, C\} \vdash_{\text{tab}} D$$

Donde

$$\begin{aligned}
 A &:= Cws & B &:= \forall x(Cxs \rightarrow \exists y(Ry \wedge Iys)) & C &:= Rm \wedge \forall x(Rx \rightarrow x = m) \\
 D &:= \text{Im } s
 \end{aligned}$$

Ejercicio 13 Volvamos al ejemplo de Confucio 8. Vamos a emplear el lenguaje clásico de primer orden. Necesitamos un lenguaje en el que poder expresar las propiedades de ser grande y pequeño en un momento dado y también relativizar

las distancias. Podemos emplear éste

$Gxy := x$ es grande en el momento y
 $Pxy := x$ es pequeño en el momento y
 $Cxy := x$ está cerca en el momento y
 $Lxy := x$ está lejos en el momento y
 $Ox := x$ es un objeto
 $Mx := x$ es un momento de tiempo

$m :=$ mediodía
 $s :=$ sol
 $a :=$ alba

1. La formalización de las hipótesis y de la conclusión en este lenguaje formal de primer orden resulta un poco farragosa, especialmente la tercera hipótesis. Hacedlo:

$\alpha :=$?
 $\beta :=$?
 $\gamma :=$?
 $\delta :=$?

2. Para demostrar en el cálculo de tableaux que efectivamente $\{\alpha, \beta, \gamma\} \vdash \delta$ añadimos a las anteriores hipótesis las de sentido común del uso de la lengua

$\zeta := Os \wedge Ma \wedge Mm$

Resolvedlo en el cálculo de tableaux de primer orden; esto es, demostrad

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha Gsa \\ \beta Psm \\ \gamma \\ Os \wedge Ma \wedge Mm \end{array} \right\} \vdash_{tab} \delta$$

Ejercicio 14 El último encuentro

“¿Qué significa la fidelidad, qué esperamos de la persona a quien amamos? Yo ya soy viejo, y he reflexionado mucho sobre esto. ¿Exigir fidelidad no sería acaso un grado extremo de egolatría, del egoísmo y de la vanidad, como la mayoría de las cosas y de los deseos de los seres humanos? Cuando exigimos fidelidad a alguien, ¿es acaso nuestro propósito que la otra persona sea feliz? Y si la otra persona no es feliz en la sutil esclavitud de la fidelidad, ¿tenemos derecho a exigirle fidelidad y sacrificio? Ahora, al final de mi vida ya no me atrevería a responder a esta preguntas, si alguien me las formulase, de la misma forma inequívoca de hace cuarenta y un años...”

Referencias

- [1] Gabbay, D y Guenther, F. editores. [2001]. *Handbook of Philosophical Logic* 2nd edition. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. Holanda. vol 1 a 4. Segunda edición, 18 volúmenes en preparación.
- [2] Manzano, M. [1996]. *Extensions of first order logic*. Cambridge University Press. Cambridge. U.K.
- [3] Manzano, M. ed. [2004]. *Summa logicae en el siglo XXI*. Ediciones Universidad de Salamanca. (también en <http://logicae.usal.es>)
- [4] María Manzano y Antonia Huertas [2004]. *Lógica para principiantes*. Alianza Editorial
- [5] Johan van Benthem [2006]. “*Adiós a la soledad: modas dinámicas en la lógica actual*”. AZAFEA.