

LÓGICA INTUICIONISTA EN TRES HORAS (Y PICO)

Proyecto Aracne

F. Salto y J.M. Méndez

Diciembre 2000

1. Motivación
2. Negaciones
3. Existencia
4. Sistemas Ip, Iq
5. Semántica relacional
6. Consistencia
7. Completud y decidibilidad clásica
8. Completud y decidibilidad constructiva
9. Aplicaciones y Perspectivas
10. Referencias

1. MOTIVACIÓN.

Se llama lógica intuicionista a la amplia familia de sistemas formales que codifican el razonamiento constructivo. Una prueba es constructiva cuando ofrece un procedimiento reglado o algorítmico para “construir” o calcular explícitamente su resultado. Antes de ofrecer definiciones precisas de estos términos, consideremos intuitivamente algunos ejemplos. Una lectura de El Quijote nos asegura que del enunciado

(1) Dulcinea es una mujer

tenemos una demostración (informal) que apela a las definiciones contenidas en el libro. Sin embargo, del enunciado:

(2) Dulcinea tiene un número primo de pecas o no lo tiene

no tenemos información alguna que nos permita asertarlo ni negarlo. Si (2) se considera una instancia de la tautología clásica $A \vee \neg A$, entonces (2) puede considerarse verdadero. Considerémoslo verdadero. Con ello no hemos ganado información alguna acerca del número de pecas de Dulcinea. Nos hemos asegurado de la *verdad* de (2), pero no de su *demostrabilidad*. Desde el punto de vista constructivo, su verdad no es una razón suficiente para asertar (2): sólo información pertinente acerca de Dulcinea –no acerca de “o” ni acerca de “no”- permitirá asertar (2).

Consideremos ahora el siguiente razonamiento matemático informal. Hay dos números irracionales a y b tales que a^b es un número racional. Prueba: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional o no lo es. Si es racional, sea $a=b=\sqrt{2}$, y el teorema se cumple. Si es irracional, sea $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b=\sqrt{2}$. Entonces $a^b=2$, y el teorema también se cumple. Por tanto, el teorema se cumple en todo caso.

Esta prueba no es constructiva porque no establece su resultado para un valor específico de a (b) y no demuestra que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional (ni naturalmente demuestra que es racional). El teorema sin duda es verdadero si lo es el enunciado “ x es racional o x no es racional” (en general, si lo es $A \vee \neg A$). Concedamos que el argumento establece la *verdad* de su conclusión. La cuestión es que el argumento no establece la *demostrabilidad* (constructiva) de su conclusión.

Los dos casos señalados son ejemplos que muestran que apelar al principio de tercero excluido ($A \vee \neg A$) carece de justificación constructiva en ausencia tanto de una prueba tanto de A como de $\neg A$. Desde un punto de vista más general, si se trata de demostrar:

A

es falaz limitarse a *afirmar*:

Es verdad A

y es insuficiente el *hecho* que:

Es verdad A

Esto es, la verdad de A no *prueba* A . La operación clásica de consecuencia lógica no está concebida para reflejar este estado de cosas, ya que “ A ” y “Es verdad A ” son clásicamente equivalentes. Mientras que A es consecuencia clásica de Γ si y sólo si A es al menos tan verdadero como Γ en cualquier interpretación de ambos, aquí nos importan relaciones de consecuencia que preserven *demostrabilidad* y no verdad, de manera que $\Gamma \vdash A$ si y sólo si en cualquier interpretación de Γ en la que sea demostrable, también A es demostrable.

Obsérvese que el tipo de razonamiento no constructivo ejemplificado arriba en absoluto resulta extraordinario ni marginal. Por el contrario, relevantes teoremas en distintas áreas de la matemática se demuestran de manera no constructiva. El teorema del supremo es un ejemplo notable, como lo son los lemas de König, Zorn, o Lindenbaum y en general los teoremas equivalentes o implicados por el axioma de elección. Llamamos constructivos no a resultados (teoremas) sino a pruebas (argumentos). De manera que un mismo resultado puede eventualmente tener tanto demostración constructiva como no constructiva. Las lógicas intuicionistas o constructivas en general pretenden solucionar problemas como los siguientes: ¿qué tipos de razonamientos son constructivamente válidos? ¿qué teoremas son demostrables constructivamente? ¿existen procedimientos automáticos para reproducir cualquier inferencia constructivamente válida?

2. FUNDAMENTOS PROPOSICIONALES: NEGACIONES CONSTRUCTIVAS.

Desde un punto de vista proposicional, la clave de las lógicas constructivas está en la negación. Supongamos que estamos en una situación $\mathbf{a}$ en la que pretendemos evaluar la proposición $\neg A$. Si por “evaluar” entendemos asignar un único valor de verdad del conjunto $\{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$, entonces la negación clásica o booleana es paradigmáticamente simple: $\neg A$ es verdadero en $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \Vdash_c \neg A$) si y sólo si A no es verdadero en $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \nVdash_c A$). Esto es:

$$(\text{negación clásica}) \quad \mathbf{a} \Vdash_c \neg A \Leftrightarrow \mathbf{a} \nVdash_c A$$

Ahora bien, si el valor semántico que nos importa en A no es su verdad bivalente, entonces el postulado anterior pierde su sentido. En particular, no diremos que la situación $\mathbf{a}$ contiene información suficiente para garantizar $\neg A$ siempre que no contenga información suficiente como para garantizar A . Dado que los recursos de cualquier sistema son en general limitados, del hecho que en un estado $\mathbf{a}$ no se verifique A ($\mathbf{a} \nVdash_i A$), no concluiremos en general que en tal estado se verifica $\neg A$ ($\mathbf{a} \Vdash_i \neg A$).

El contenido informacional de los enunciados negativos es inespecífico en el sentido siguiente: en general no es reemplazable por un único enunciado positivo con el mismo contenido. Así por ejemplo, si careciésemos de negación y quisiera convencer a alguien de su error al creer que mis calcetines son blancos, podía sin duda convencerle de que son verdes. Pero entonces sólo está convencido de que son blancos y verdes. Se requiere adicionalmente algún expediente para excluir información, además de acumularla. Por este motivo los sistemas formales puramente positivos son expresivamente pobres (aunque ideales desde un punto de vista estrictamente constructivo).

Sea $\rightarrow$ la constante clásica de la implicación material, y sea $\perp$ una letra constante añadida al lenguaje formal. La negación positiva de cualquier proposición A es la prueba constructiva de que implica materialmente $\perp$:

$$(\text{negación positiva}) \quad a \Vdash \neg A \Leftrightarrow a \Vdash A \rightarrow \perp$$

El símbolo $\neg$ de la negación es entonces introducible o eliminable de acuerdo a la convención: $\neg A =_{\text{def}} A \rightarrow \perp$

La implicación material es la $\rightarrow$ clásica, de manera que toda la divergencia arriba propuesta respecto a la lógica proposicional clásica [Cp] proviene de la negación. Recordamos que la lógica proposicional clásica puede axiomatizarse con Modus Ponens y los esquemas siguientes:

$Cp^{\rightarrow}$

$$A1. A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A2. (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$Cp^{\neg}$

$$(Cp^{\neg}). (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Los axiomas implicativos A1 y A2 son axiomas constructivamente válidos y serán por tanto axiomas de la lógica intuicionista. Llamemos $Cp^{\rightarrow}$ al conjunto de todas las instancias de sustitución de teoremas deducidos de $\{A1, A2, MP\}$. El resultado de añadir (negación

positiva) a $Cp^{\rightarrow}$ nos muestra el conjunto de tesis negativas cuya validez es puramente implicativa (depende exclusivamente de A1, A2).

Por ejemplo, $(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ es un teorema de $Cp^{\rightarrow} + (\text{negación positiva})$, ya que lo es: $(B \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow (B \rightarrow \perp))$, que no es sino una instancia del teorema de $Cp^{\rightarrow}$: $(B \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))$.

La negación positiva es una negación mínima en el sentido que todos sus teoremas negativos no son más que instancias de teoremas implicativos positivos de $Cp^{\rightarrow}$. Por otra parte, no todo teorema implicativo clásico es un teorema de $Cp^{\rightarrow}$ (por tanto $Cp^{\rightarrow}$ no es el fragmento implicativo de Cp). La razón es que existen teoremas implativos clásicos para cuya prueba se requiere la negación clásica o booleana ($C^{\neg}$). Ejemplos notables son las tautologías clásicas siguientes, que no son constructivamente válidas:

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Ley de Peirce})$$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow B) \leftrightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$$

$Cp^{\rightarrow} + (\text{negación positiva})$ sí es en cambio idéntico al fragmento implicativo de la lógica intuicionista $[I^{\rightarrow}]$ (en lenguajes con (negación positiva)). Algunos teoremas característicos de $I^{\rightarrow}$ son los siguientes, que se indican señalando los axiomas que los demuestran y, en su caso, los operadores algebraicos que los identifican:

T1	$A \rightarrow A$	I (identidad) [A1,A2]
T2	$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	B (transitividad) [A1,A2]
T3	$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$	[A1,A2,T2]
T4	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	[T3]
T5	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$	C (permutación) [A2,T4,T2]
T6	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$	B' (transitividad) [T2,T5]
T7	$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	W (contracción) [A2,T5,T1]

A modo de ejemplo, la siguiente es una prueba de T3:

$$1. (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad [T2]$$

2. $(1) \rightarrow [(((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow B))) \rightarrow (T3)]$ [A2]
3. $[(((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow B))) \rightarrow (T3))$ [MP 1,2]
4. $(B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow B)))$ [A1]
5. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ [A1]
6. $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow B))$ [MP 4,5]
7. $T3$ [MP3,6]

Ejercicio 1:

1.i. Demostrar, siguiendo las indicaciones arriba, los teoremas T1-T7

1.ii. Demostrar los siguientes teoremas de $\Gamma^{\rightarrow}$:

$$T8. (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$T9. A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

$$T10. ((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B \clubsuit$$

Los teoremas siguientes indican algunos principales teoremas positivamente negativos de $\Gamma^{\rightarrow}$:

- | | |
|--|-----------|
| T11. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ | [A2] |
| T12. $A \rightarrow \neg \neg A$ | [T9] |
| T13. $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ | [T7] |
| T14. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$ | [T6, T12] |
| T15. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ | [T6] |

Ejercicio 2.

Demostrar T11-14 con las indicaciones ofrecidas.

Ejercicio 3.

Demostrar que el siguiente es un teorema de negación positiva:

$$T16. \neg \neg \neg A \rightarrow \neg A$$

Ejercicio 4.

Un sistema axiomático S colapsa en otro sistema S' siempre que todos los teoremas de S lo son también de S'. Demostrar que si $\neg \neg A \rightarrow A$ fuese un

teorema de la negación positiva [$I^{\rightarrow}$ ó $Cp^{\rightarrow} + (\text{negación positiva})$], entonces colapsaría en la negación clásica [Cp]. [Nota: basta demostrar que $C^{\neg}$ sería teorema]. ♣

Adviértase que la negación positiva es mínima en el sentido de contener todos y sólo los teoremas negativos que son instancias de teoremas implicativos de $I^{\rightarrow}$, y por lo tanto sistemas implicativos más débiles contienen negaciones submínimas. Ahora bien, sin duda hay distintas maneras de extender la negación mínima hasta codificar conceptos más fuertes o genuinos de negación, en los que la constante $\perp$ merezca ser interpretada designando falsedad. Por ejemplo, podemos entender que cualquier situación **a** que verifique $\neg\neg A$, verifique también A . Entonces tenemos, en esencia, la llamada negación De Morgan. Otra alternativa es interpretar la constante $\perp$ como el absurdo (la contradicción) y asumir que cualquier situación **a** que verifique $\perp$ verificará cualquier proposición. La lógica intuicionista estándar toma precisamente esta alternativa, que define la negación intuicionista y es preferible desde un punto de vista constructivo (que en **a** no se refute constructivamente $\neg A$ no aporta una prueba de A). Con independencia de que existen otras alternativas intermedias (paraintuicionistas, semiclásicas), aquí nos limitaremos a considerar la negación intuicionista estándar, que se axiomatiza añadiendo a $I^{\rightarrow}$ el axioma:

$$A3. \perp \rightarrow A$$

Que se corresponde a la interpretación siguiente: (negación positiva) y

$$(\text{negación intuicionista}) \ a \Vdash \perp \Leftrightarrow a \Vdash A \text{ (para toda } A)$$

El siguiente es el principal teorema característico de la negación intuicionista (además de los propios de la negación positiva), codificando las pruebas por reducción al absurdo en el sistema $\{A1, A2, A3, MP\}$, que es el fragmento implicativo y negativo de la lógica proposicional intuicionista [$I^{\rightarrow \neg}$]:

$$T17. A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \qquad \text{reductio } [A3, T5, T6]$$

Ejercicio 5.

Demostrar el teorema de $I^{\rightarrow \neg}$:

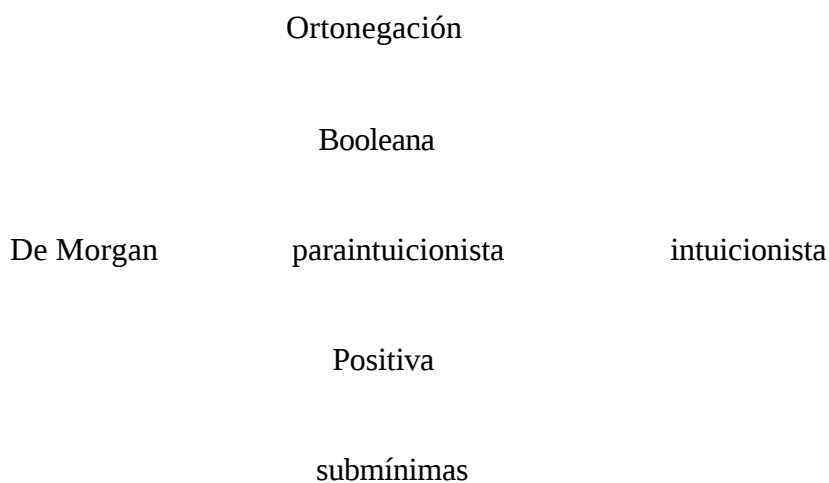
$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

Ejercicio 6.

Demostrar la equivalencia de A3 y T17 ♣

Adviértase que puede fortalecerse aún más la negación intuicionista hasta llegar a asumir $Cp^{\neg}$ (negación clásica o booleana), y en realidad también a negaciones más potentes que la clásica (ortonegaciones). Ello se indica plásticamente en el diagrama siguiente, en el que la altura en la página indica inclusión conjuntista:

Mapa de negaciones:



Una bonita peculiaridad de la lógica proposicional clásica es la posibilidad de definir cualquier conectiva $\rightarrow \wedge \vee$ sólo con la negación y una de ellas. Esta propiedad se pierde en cuanto la negación no es clásica, de manera que $I^{\rightarrow \neg}$ no es toda la lógica proposicional intuicionista I_p . Es necesario entonces añadir axiomas para la conjunción:

$$A4 \quad (A \wedge B) \rightarrow A$$

$$(A \wedge B) \rightarrow B$$

A5 $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

Y para la disyunción:

A6 $A \rightarrow (A \vee B)$ $B \rightarrow (A \vee B)$

A7 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

El resultado $\{A1-A7, MP\}$ axiomatiza Ip. Los siguientes son algunos teoremas característicos de Ip:

T18. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$	[A2, A5]
T19. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$	[A5, T2, T5]
T20. $(A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$	[A4, T18]
T21. $(A \vee (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$	[A6, A7]
T22. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	[A6, T18, T15]
T23. $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	[A1, A7, A3]
T24. $\neg(A \wedge \neg A)$	[A4, T18]
T25. $\neg\neg(A \vee \neg A)$	[T18, T21, T24]

Un ejemplo del procedimiento de prueba, que ya resultará familiar desde el estudio de la lógica clásica es el siguiente. Para demostrar T19 (derecha-izquierda) puede procederse así:

1. $(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))$ [T2]
2. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ [A5]
3. $(2) \rightarrow ((1) \rightarrow (A \rightarrow (((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))))$ [T6]
4. $A \rightarrow (((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))$ [2MP1, 2, 3]
5. $(4) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ [T5]
6. $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ [MP, 4, 5]

Ejercicio 7.

Demostrar T18-T25 empleando eventualmente los teoremas indicados como pistas. ♣

Nótese cómo las leyes clásicas de De Morgan sólo son válidas en sus versiones débiles (T22), mientras que las conversas de los siguientes teoremas de Ip son tautologías clásicas, no son constructivamente válidos:

$$\text{T26. } (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

$$\text{T27. } (A \vee B) \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$\text{T28. } (A \wedge B) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Análogamente, las interdefiniciones clásicas entre $\rightarrow$ y $\wedge(\vee)$ no son teoremas de Ip, sino T23 y:

$$\text{T29. } (A \wedge B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$$

$$\text{T30. } (A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

Ejercicio 8.

(i) Demostrar T26-T30.

(ii) Comprobar que las siguientes leyes distributivas clásicas son teoremas de Ip:

$$\text{T26. } A \leftrightarrow (A \wedge A) \leftrightarrow (A \vee A) \leftrightarrow (A \vee (A \wedge B)) \leftrightarrow (A \wedge (A \vee B))$$

$$\text{T27. } (A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

$$\text{T28. } (A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

$$\text{T29. } (A \rightarrow (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$$

$$\text{T30. } ((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \quad \clubsuit$$

3. FUNDAMENTOS CUANTIFICACIONALES: EXISTENCIA.

Proponemos entender cada enunciado A como un problema: el problema de encontrar una prueba (o una refutación) de A . Solucionar el problema A es aportar bien su prueba bien su refutación. El enunciado:

(B) existe una solución para cada problema

es a su vez un problema, y por cierto un problema que no ha encontrado solución. No existe una prueba de B , ya que existen multitud de conjeturas no demostradas ni refutadas.

Tampoco existe una refutación de B , por cuanto la ausencia de demostración o refutación de tales conjeturas no impide el ulterior avance del conocimiento (matemático o de otro tipo).

En general, se asertará B sólo si (i) asumimos que somos razonadores omniscientes, o bien, (ii) asertamos algunos enunciados indemostrados. (i) es una asunción empíricamente injustificada, y (ii) es constructivamente inaceptable. Por ello no se aserta B y en consecuencia tampoco el principio de tercero excluido ($A \vee \neg A$) —que es constructivamente equivalente a B —.

Obsérvese cómo este planteamiento también impone constricciones sobre el alcance y sentido de los cuantificadores. *Interpretar* A ya no es asignar verdad a tal enunciado en una u otra circunstancia, sino asignarle solución en una u otra circunstancia. Por tanto las inferencias válidas que se pretende codificar son aquellas que preservan su solución (no su verdad) cuando su interpretación varía arbitrariamente. Ello implica que en los enunciados o problemas cuantificacionales no se cuantifica sobre individuos arbitrarios o conjuntos de éstos, sino sólo sobre individuos capaces de entrar en alguna solución. Podemos entender tales individuos como *datos* de alguna solución. Constructivamente sólo se cuantifica sobre tales datos, que son individuos o colecciones dadas explícitamente. Enunciados o problemas cuantificados como: “existe un x tal que $P(x)$ ” significa que es posible producir

un x tal que Px . Si la solución depende de determinados parámetros, entonces debe ser posible producir explícitamente la solución por medio de alguna regla o algoritmo sobre tales parámetros. Por ejemplo, el enunciado o problema “para todo x existe algún y tal que $P(x,y)$ ” significa que se posee un procedimiento explícito para encontrar y dado x tal que $P(x,y)$. En consecuencia, el dominio de cuantificación no es simplemente cualquier conjunto, sino más bien cualquier colección de objetos o datos explícitamente accesibles.

Al menos en contextos matemáticos, es posible definir con precisión qué se entiende por “explícitamente”. Un numeral “ n ” refiere explícitamente a un número n si y sólo si existe algún algoritmo para calcular n y “ n ” designa n . Evidentemente, cada número natural es explícitamente designable mediante 0 y la función sucesor. Pares de numerales explícitos pueden a su vez designar explícitamente, de manera que todo número racional también es explícitamente designable. Pero, ¿qué puede significar referir explícitamente a un número real, que es un objeto infinito? Hay varias alternativas formales para una misma idea: literalmente se *identifica* un número real con cada secuencia (regladamente construible) de números racionales que se le aproxima indefinidamente.

Sea cual fuere la definición de “explícitamente”, la justificación constructiva de los siguientes axiomas es clara, si se considera cualquier estado informacional a en el que se prueban sus antecedentes:

$$A8. A(t) \rightarrow \exists x A(x)$$

$$A9. \forall x A(x) \rightarrow A(t)$$

E igualmente es claro que las reglas siguientes preservan validez constructiva, si se considera que sus antecedentes son demostrables en cualquier estado informacional:

$$RQ1. \vdash A \rightarrow B(x) \Rightarrow \vdash A \rightarrow \forall x B(x)$$

$$RQ2. \vdash A(x) \rightarrow B \Rightarrow \vdash \exists x A(x) \rightarrow B$$

(En todos ellos asumimos como es habitual que t es libre para x y x no ocurre libre en B).

El resultado de añadir A8,A9 y RQ1, RQ2 a Ip es una axiomatización de la lógica intuicionista de predicados Iq. Los siguientes son algunos teoremas característicos de Iq:

$$T31. \exists x \neg A(x) \rightarrow \neg \forall x A(x)$$

$$T32. \neg \exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

$$T33. (A \vee \forall x B(x)) \rightarrow \forall x (A \vee B(x))$$

$$T34. \forall x (A \rightarrow B(x)) \leftrightarrow (A \rightarrow \forall x B(x))$$

$$T35. \forall x (A(x) \rightarrow B) \leftrightarrow (\exists x A(x) \rightarrow B)$$

Ejercicio 9.

Demostrar T31-T35 siguiendo eventualmente las pistas indicadas.

Ejercicio 10.

Demostrar los siguientes teoremas de Iq:

$$T36. \exists x (A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow \exists x B(x))$$

$$T37. \exists x (A(x) \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow B)$$

$$T38. \neg \neg \forall x A(x) \rightarrow \forall x \neg \neg A(x) \clubsuit$$

Adviértase que la tesis:

$$\neg \forall x A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x)$$

no es constructivamente válida (razonando informalmente) y que su añadido a Iq colapsa en la lógica clásica de predicados.

4. SISTEMAS Ip, Iq.

El lenguaje formal en el que definimos Ip e Iq es un lenguaje (proposicional o cuantificacional) estándar de primer orden, compuesto por el habitual conjunto enumerable de símbolos-tipo (junto con, eventualmente, la constante proposicional $\perp$), las conocidas reglas recursivas para concatenarlos en fórmulas bien formadas y finalmente las rutinas habituales para concatenar fórmulas en pruebas con los siguientes axiomas y reglas:

Ip

$$A1. A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A2. (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A3. \perp \rightarrow A$$

$$A4. (A \wedge B) \rightarrow A \quad (A \wedge B) \rightarrow B$$

$$A5. A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

$$A6. A \rightarrow (A \vee B) \quad B \rightarrow (A \vee B)$$

$$A7. (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$$

$$\text{Modus Ponens: } \vdash A, \vdash A \rightarrow B \Rightarrow \vdash B$$

Iq.

$$A8. A(t) \rightarrow \exists x A(x) \quad [t \text{ libre para } x]$$

$$A9. \forall x A(x) \rightarrow A(t)$$

$$RQ1. \vdash A \rightarrow B(x) \Rightarrow \vdash A \rightarrow \forall x B(x) \quad [x \text{ no ocurre libre en } B]$$

$$RQ2. \vdash A(x) \rightarrow B \Rightarrow \vdash \exists x A(x) \rightarrow B$$

Alternativamente, A3 puede substituirse por $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ si el lenguaje carece de la constante $\perp$. Por otra parte, si a Ip se le añade cualquiera de las tesis: $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$, $A \vee \neg A$, $\neg \neg A \rightarrow A$, el resultado es una axiomatización de la lógica proposicional clásica con $\rightarrow, \wedge, \vee$ como conectivas primitivas.

Los teoremas de deducción e intercambio de equivalentes se demuestran para Ip e Iq del mismo modo que para la lógica clásica. De hecho, la lógica intuicionista también puede ser presentada como un cálculo de deducción natural con las reglas clásicas para la introducción y eliminación de símbolos lógicos, substituyendo la regla clásica de eliminación de la negación por:

$$\text{ECQ} \quad A \wedge \neg A \vdash B$$

y añadiendo la regla:

$$\text{Rep} \quad A \vdash A$$

ECQ abrevia “ex contradictione quodlibet” y Rep abrevia “repetición”. El sistema resultante puede llamarse DN_{Ip} (DN_{Iq}), y su funcionamiento es análogo al cálculo clásico. Tales sistemas son deductivamente equivalentes a Ip e Iq, respectivamente. Para demostrar $\Gamma \vdash_{\text{DNi}} A \text{ syss } \Gamma \vdash_I A$ úsese el teorema de deducción e inducción simple sobre la longitud de las pruebas $\Gamma \vdash_{\text{DNi}} A$, de acuerdo a las indicaciones del ejercicio siguiente:

Ejercicio 11.

- (i) Demostrar $\Gamma \vdash_{\text{Ip}} A \Rightarrow \Gamma \vdash_{\text{DNIp}} A$ [basta derivar en DN_{Ip} los axiomas de Ip]
- (ii) Demostrar $\Gamma \vdash_{\text{DNi}} A \Rightarrow \Gamma \vdash_I A$. [Ejemplo-pista. Supongamos que A ha sido derivada por E $\vee$. Entonces $\Gamma \vdash_{\text{DNi}} B \vee C$, $\Gamma, B \vdash_{\text{DNi}} A$, $\Gamma, C \vdash_{\text{DNi}} A$. Por hipótesis de inducción, $\Gamma \vdash_I B \vee C$, $\Gamma, B \vdash_I A$, $\Gamma, C \vdash_I A$. Por el teorema de deducción, $\Gamma \vdash_I B \rightarrow A$, $\Gamma \vdash_I C \rightarrow A$, de donde, por A7, se concluye $\Gamma \vdash_I A$ ♣

Señalamos que la siguiente elección de reglas define un cálculo Gentzen para la lógica proposicional intuicionista deductivamente equivalente a Ip:

Rep	$\frac{}{\Gamma, p, \Delta \Rightarrow p}$	ECQ	$\frac{}{\Gamma, \perp, \Delta \Rightarrow A}$
De $\rightarrow$	$\frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$	Iz $\rightarrow$	$\frac{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta \Rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta \Rightarrow C}$
De $\wedge$	$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$	Iz $\wedge$	$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \Rightarrow C}$
De $\vee$	$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}$	Iz $\vee$	$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C \quad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \vee B, \Delta \Rightarrow C}$

Señalamos algunos de los principales resultados acerca de la teoría de pruebas de I_p e I_q , que convierten la lógica intuicionista en un valioso instrumento formal. En primer lugar, obsérvese cómo las reglas recursivas para la formación de pruebas en principio no economizan recursos lógicos y permiten pruebas que los dilapidan o emplean superfluamente. Las reglas de inferencia aportan *todas* las fórmulas imprescindibles para alcanzar una conclusión deducible en el curso de una prueba, pero no aportan *sólo* tales fórmulas. Una prueba se llama normal sólo si es una secuencia de fórmulas ninguna de las cuales es superflua. La lógica intuicionista es fuertemente normalizable en el sentido siguiente:

Normalización fuerte: existe procedimiento efectivo para reducir cualquier prueba de I_p (I_q) en una prueba normal. De esta propiedad es resultado la siguiente, que simplifica la tarea de encontrar una prueba para cualquier teorema de I_p (I_q) hasta el punto que basta buscar entre sus subfórmulas:

Propiedad de la subfórmula: en una prueba normal de $\Gamma \vdash_I A$, sólo ocurren subfórmulas de Γ y A .

Corolario de ésta es el teorema siguiente, que muestra como “parasita” I_q respecto de I_p . (Por supuesto, hay un resultado análogo para la lógica clásica):

$\Gamma \vdash_{I_q} A \text{ syss } \Gamma \vdash_{I_p} A$ (si A es proposicional)

$\Gamma \vdash_{I_q} A \text{ syss } \Gamma \cup \{A8, A9, RQ1, RQ2\} \vdash_{I_p} A$.

Las lógicas intuicionistas comparten con la lógica clásica además el:

Teorema de interpolación: si $\vdash A \rightarrow B$, entonces existe una fórmula C tal que:

$A \rightarrow C$, $C \rightarrow B$, y todos los símbolos no lógicos que ocurren en C , ocurren en A y en B .

Peculiar de la lógica intuicionista es la **independencia deductiva** de las conectivas proposicionales. Cada fragmento $I^{\rightarrow}, I^{\wedge}, I^{\vee}$ ($I^{\neg\rightarrow}, I^{\neg\wedge}, I^{\neg\vee}$) se llama fragmento elemental, y son irreducibles entre sí. Notamos que el teorema de interpolación es válido en cada fragmento elemental.

Los resultados siguientes esclarecen la relación de Ip (Iq) con la lógica clásica:

(Glivenko): Si A es teorema proposicional clásico, entonces $\neg\neg A$ es teorema intuicionista

(Gödel): Si A es un teorema proposicional clásico sólo con conectivas $\neg, \wedge$ entonces A es un teorema intuicionista.

5. SEMÁNTICA RELACIONAL.

Existen diversas semánticas completas para la lógica intuicionista que responden a diferentes intereses y motivaciones. La semántica relacional estilo Kripke que se define a continuación es una interpretación clásica de la lógica intuicionista, que también es completa respecto de otras semánticas relacionales (árboles de Beth), semánticas algebraicas (álgebras de Heyting) y recursivo teoréticas (realizabilidad). El interés pedagógico de esta semántica radica en permitir el estudio unificado de distintas lógicas constructivas, lógicas modales y otras lógicas no clásicas.

Un modelo para Ip (mIp) es una estructura del tipo $\langle K, R, \pi \rangle$ donde:

(a) $K \neq \emptyset$ es un conjunto no vacío. Entre nosotros, puede convenir representarnos los elementos de K informalmente como puntos, situaciones o mundos y en general cualquier cosa que aporte valor semántico a las fórmulas del lenguaje. En el caso particular de la lógica intuicionista, puede convenir representarnos los elementos de K como estados informacionales.

(b) $R \subseteq K \times K$ es una relación diádica reflexiva y transitiva definida en K, esto es:

- $\forall a \in K (Raa)$
- $\forall ab \in K (Rab \Rightarrow (Rbc \Rightarrow Rac))$.

Extraoficialmente leeremos “b extiende a” al leer “Rab”.

(c) $\pi: F \times K \rightarrow \{1, 0\}$ es una función que asigna uno de los valores $\{1, 0\}$ a cada fórmula bien formada (tomada del conjunto F de fórmulas bien formadas del lenguaje) en cada estado informacional de K.

Cuandoquiera que π asigne el valor 1 a la fórmula A en el estado $\mathbf{a}$ escribiremos $\pi(A, \mathbf{a})=1$ ó simplemente $\mathbf{a} \models A$ con la siguiente interpretación pretendida: el estado informacional $\mathbf{a}$ garantiza (prueba) la proposición A . En caso contrario, $\pi(A, \mathbf{a})=0$ [$\mathbf{a} \not\models A$], estamos ante un estado informacional que no garantiza (prueba) A .

Las siguientes reglas recursivas estipulan qué valores asigna π a proposiciones de cualquier complejidad lógica dada cualquier asignación a sus componentes de complejidad 0 (fórmulas atómicas). Obviamente, ello implica la interpretación de las constantes lógicas de $\mathcal{L}$. Para cualesquiera fórmulas A, B de $\mathcal{L}$ y estados $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ de K , las reglas son las siguientes:

- (i) Si $\mathbf{a} \models B$ y $\pi(A, \mathbf{a})=1$, entonces $\pi(A, \mathbf{b})=1$
 - (ii) $\pi(A \vee B, \mathbf{a})=1$ syss $\pi(A, \mathbf{a})=1$ ó $\pi(B, \mathbf{a})=1$
 - (iii) $\pi(A \wedge B, \mathbf{a})=1$ syss $\pi(A, \mathbf{a})=1$ y $\pi(B, \mathbf{a})=1$
 - (iv) $\pi(A \rightarrow B, \mathbf{a})=1$ syss para todo $\mathbf{b} \in K$, si $\mathbf{a} \models B$ y $\pi(A, \mathbf{b})=1$, entonces $\pi(B, \mathbf{b})=1$
 - (v) $\pi(A, \mathbf{a})=1$ syss para todo $\mathbf{b} \in K$, si $\mathbf{a} \models B$, entonces $\pi(A, \mathbf{b})=0$
- o alternativamente
- (v') $\pi(\perp, \mathbf{a})=0$

Las cláusulas (i)-(v') explicitan semánticamente los desiderata considerados en #1 y #2. Una disyunción se prueba en un estado sólo si alguno de las proposiciones disjuntas se prueban. Un estado informacional garantiza una conjunción si y sólo si garantiza sendas proposiciones conjuntadas. La clave está sin embargo en los casos de las proposiciones condicionales y negativas, para cuya demostración constructiva no basta –en esta interpretación- un solo estado informacional, sino que depende del comportamiento de la proposición en todos los estados que lo extiendan. Esta es, por supuesto, una interpretación semántica muy poco constructiva de la implicación y la negación constructiva (ya que no podemos acceder constructivamente a la colección de todas las extensiones de un estado dado). Comprobaremos cómo aunque esta semántica es –metateóricamente- ella misma

clásica, sin embargo captura o reproduce todos y sólo los teoremas intuicionistas. (Puede entenderse como una interpretación o lectura clásica y modalizante de Ip).

A es válida ($\checkmark A$) syss $\pi(A, \mathbf{a})=1$ para todo $\mathbf{a} \in K$ de todo mIp. A es consecuencia lógica constructiva de Γ ($\Gamma \checkmark_i A$) syss A preserva la demostrabilidad constructiva de Γ cuando sus interpretaciones varían arbitrariamente syss toda interpretación que demuestra constructivamente Γ , también demuestra constructivamente A syss $\pi(\Gamma) \leq \pi(A)$ en todo $\mathbf{a} \in K$ de todo mIp.

6. CONSISTENCIA Y CORRECCIÓN.

Un sistema deductivo es correcto syss sólo demuestra consecuencias lógicas de las premisas que asume, lo que es decir:

$$\Gamma \checkmark_i A \Rightarrow \Gamma \checkmark_i A$$

Si Γ es vacío, un sistema deductivo correcto contendrá como teoremas sólo fórmulas válidas, esto es:

$$\checkmark_i A \Rightarrow \checkmark_i A$$

Para demostrar que Ip es correcto, basta comprobar que A1-A7 son válidos y que la regla Modus Ponens preserva validez. El razonamiento siguiente demuestra la validez de A3 y servirá de ejemplo al lector para demostrar la validez de los otros axiomas.

Problema: $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

- a. Planteamiento. Hay que mostrar que un estado arbitrario $\mathbf{a}$, $\pi(A \rightarrow (\neg A \rightarrow B), \mathbf{a})=1$. De acuerdo a la cláusula (iv) ése será el caso si cualquier estado $\mathbf{b}$ que extienda $\mathbf{a}$ (esto es, Rab) es tal que si $\pi(A, \mathbf{b})=1$, entonces $\pi(\neg A \rightarrow B, \mathbf{b})=1$. Asumamos entonces Rab y $\pi(A, \mathbf{b})=1$. Para comprobar $\pi(\neg A \rightarrow B, \mathbf{b})=1$ necesitamos, de nuevo por la cláusula (iv), acudir a cualquier estado arbitrario $\mathbf{c}$ que extienda $\mathbf{b}$ (Rbc) y que verifique A

$[\pi(\neg A, c)=1]$. El problema se reduce a demostrar que c verifica B . El planteamiento es por tanto el siguiente:

(1) $a \models A$

$\text{¿} b \models \neg A \rightarrow B \text{?}$

(2) $b \models \neg A$

(3) Rab

$\text{¿} c \models B \text{?}$

(4) Rbc

b. Razonamiento. Supongamos por reductio que la respuesta es negativa:

(5) $c \not\models B$ (esto es, $\pi(B, c)=0$)

Puesto que b extiende a y (1), aplicando la cláusula (i) deducimos:

(6) $b \models A$

Por tanto, b es un estado informacional inconsistente (6) y (2). Puesto que c extiende b , necesariamente (6) y cláusula (i):

(7) $c \models A$

Y por lo mismo [(2) y (i)]

(8) $c \models \neg A$

que es tanto como decir (cláusula (v))

(9) $c \models A$

Pero (7) y (9) son contradictorios, y en consecuencia (5) es falso.

c. Conclusión.

Se ha demostrado que $c \models B$. Puesto que c es un estado arbitrario que extiende b , necesariamente $b \models \neg A \rightarrow B$. Y Puesto que b es un estado arbitrario que extiende a , $a \models A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$. a es arbitrario, luego $A3$ es válido.

Ejercicio 12.

Siguiendo el procedimiento indicado, demostrar la validez de $A1$, $A2$, $A4$ - $A7$. ♣

La prueba de que MP preserva validez constructiva es esencialmente la misma que demuestra preserva la validez clásica. Con ello queda establecida la corrección de Ip.

Por un procedimiento análogo al esbozado arriba, puede igualmente mostrarse la existencia de mIp que refutan tautologías clásicas que no son constructivamente válidas.

Por ejemplo, $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ se falsa en un mIp en el que:

- $K = \{a, b, c\}$
- Rab, Rbc
- $\pi(A, b) = 0, \pi(A, c) = 1, \pi(B, c) = 0$

Y $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ se falsa en un mIp en el que:

- $K = \{a, b, c\}$
- Rab, Rbc
- $\pi(A, b) = 1, \pi(B, b) = 0; \pi(B, c) = 1, \pi(A, c) = 0$

Ejercicio 13.

Demostrar la invalidez constructiva de las siguientes tautologías clásicas:

- $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))$
- $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$
- $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
- $\neg \neg A \rightarrow A$
- $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$
- $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$
- $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
- $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
- $A \vee \neg A \clubsuit$

La consistencia de I_p ($\mathcal{U}_{I_p} A \wedge \neg A$) es, como en el caso de la lógica clásica, un corolario inmediato de su corrección. También se comprobará que I_p satisface la llamada **propiedad de la disyunción** (de la que carece la lógica clásica): si $\vdash_{I_p} A \vee B$, entonces $\vdash_{I_p} A$ ó $\vdash_{I_p} B$.

Ejercicio 14.

Un sistema deductivo S se dice trivial syss cualquier fórmula es un teorema de S .

Demostrar que I_p es trivial syss es inconsistente. ♣

7. COMPLETUD Y DECIDIBILIDAD: PRUEBA CLÁSICA.

A continuación damos una prueba de completud de I_p respecto de la semántica descrita en #5. La prueba es, en esencia, tipo Henkin. Esto es, definiremos el “modelo canónico” y se probará que todas las fórmulas que no sean teoremas de I_p son falsas (constructivamente indemostrables) en algún estado informacional del modelo canónico. Esta estrategia puede ser de aplicación en contextos y sobre sistemas muy diversos. Para la construcción del modelo canónico se empleará el llamado método de las teorías primas, que también es útil en muy diversos contextos.

Primero una batería de definiciones en las que las expresiones del (metalenguaje) castellano “no”, “o”, “y”, “syss”, “ $\Rightarrow$ ” deben leerse clásicamente.

Decimos de un conjunto arbitrario Z de fórmulas que:

- está cerrado por Modus Ponens syss: $(A \rightarrow B \in Z \text{ y } A \in Z) \Rightarrow B \in Z$
- está cerrado por la implicación material teorematizada syss: $(\neg A \rightarrow B \text{ y } A \in Z) \Rightarrow B \in Z$
- está cerrado por adjunción syss: $(A \in Z \text{ y } B \in Z) \Rightarrow A \wedge B \in Z$
- es teoría syss está cerrado por Modus Ponens

Decimos de una teoría arbitraria a que:

- es normal syss: $\neg \neg A \Rightarrow A \in a$

- es prima syss: $A \vee B \in a \Rightarrow (A \in a \text{ ó } B \in a)$
- es inconsistente syss: $\neg A \in a$ para alguna fórmula A tal que δA
- es consistente syss no es inconsistente

El modelo canónico para Ip es la estructura $mIp^* = \langle K^*, R^*, \pi^* \rangle$ donde:

- K^* es el conjunto de todas las teorías normales, consistentes y primas
- R^* es una relación binaria definida en K^* con la condición siguiente para cualquier $a, b \in K^*$: R^*ab syss $a \subseteq b$
- π^* se define como sigue: para cualquier fórmula A y $a \in K^*$: $\pi^*(A, a) = 1$ syss $A \in a$

Probamos tres lemas previos:

Lema 1. Si **a** es una teoría normal, entonces (i) está cerrada por la implicación material teorematizada, y (ii) está cerrada por adjunción.

Prueba: (i) Supóngase $\delta A \rightarrow B$ y $A \in a$. Siendo **a** normal, $A \rightarrow B \in a$. Siendo **a** teoría, $B \in a$.

(ii) Supongamos $A \in a$, $B \in a$. Por A5, y (i): $B \rightarrow (A \wedge B) \in a$. Siendo **a** teoría, $A \wedge B \in a$.

Lema 2. Si $\neg \text{Ip} A$, entonces hay una teoría T tal que $T \in K^c$ y $A \notin T$.

Es decir, si A no es teorema, entonces A no forma parte de alguna teoría normal, consistente y prima: A no pertenece a algún estado canónico T.

Prueba: La propia lógica Ip es la mínima teoría normal y consistente sin A. Ordénense todas las teorías normales y consistentes sin A con la inclusión conjuntista. El resultado es el conjunto ordenado de teorías normales y consistentes $\{Ip \subseteq T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots\}$. Puesto que cada teoría tiene un límite superior (una teoría del conjunto que la incluye), existe – por el Lema de Zorn- un límite máximo o teoría máxima T normal y consistente, que extiende Ip y no contiene A. [Que T es máxima significa que para cualquier teoría normal y consistente T', si $T \subset T'$, entonces $A \in T'$].

Ahora es necesario demostrar que T es prima. Supongamos que no lo es.

Entonces para algunas fórmulas B, C ocurrirá que $B \vee C \in T$, $B \notin T$, $C \notin T$.

Definimos los siguientes conjuntos de fórmulas:

$$[T, B] = \{E : \exists D (D \in T, \delta(B \wedge D) \rightarrow E)\}$$

$$[T, C] = \{E : \exists D (D \in T, \delta(C \wedge D) \rightarrow E)\}$$

Es decir, $[T, B]$ es el conjunto de todas las fórmulas E tales que $(B \wedge D) \rightarrow E$ es teorema de I_p , siendo D cualquier fórmula de T . $[T, C]$ puede interpretarse análogamente. Pues bien, probaremos que los conjuntos $[T, B]$, $[T, C]$ son en realidad (i) teorías (ii) normales y (iii) consistentes que (ii) incluyen estrictamente T . Como hemos visto que T es máxima, se seguirá (iv) $A \in [T, B]$ y $A \in [T, C]$. Pero de la definición de ambas teorías se deducirá (v) $A \in T$, lo cual es imposible y reduce al absurdo el supuesto inicial que T no es prima. Por tanto, T es prima [razonando por reductio clásica].

(i) $[T, B]$ y $[T, C]$ son teorías.

Podemos suponer (1) y (2), dada la definición de teoría:

$$(1) D \rightarrow E \in [T, B]$$

$$(2) D \in [T, B]$$

$$(3) \delta(B \wedge F) \rightarrow (D \rightarrow E) \quad \text{donde } F \in T \quad [(1), \text{def. } [T, B]]$$

$$(4) \delta(B \wedge F') \rightarrow D \quad \text{donde } F' \in T \quad [(2), \text{def. } [T, B]]$$

$$(5) \delta(B \wedge (F \wedge F')) \rightarrow (B \wedge F) \quad [T6]$$

$$(6) \delta(B \wedge (F \wedge F')) \rightarrow (B \wedge F') \quad [T6]$$

$$(7) \delta(B \wedge (F \wedge F')) \rightarrow (D \rightarrow E) \quad [(3), (5), T6]$$

$$(8) \delta(B \wedge (F \wedge F')) \rightarrow D \quad [(4), (6), T6]$$

$$(9) \delta(B \wedge (F \wedge F')) \rightarrow E \quad [(7), (8), A2]$$

Ahora bien, como T es teoría normal, está cerrada por adjunción (Lema 1).

De manera que $F \wedge F' \in T$. Por tanto,

$$(10) D \in [T, B] \quad [(9), \text{def. } [T, B]]$$

Demostrando que $[T, B]$ es teoría. Análogamente para $[T, C]$.

(ii) $T \subset [T,B], T \subset [T,C]$

Demostrar $T \subseteq [T,B]$ es mostrar que para cualquier fórmula D , si $D \in T$, entonces $D \in [T,B]$. Pero $(B \wedge D) \rightarrow D$ es A4, luego $D \in [T,B]$ por definición de $[T,B]$. O sea que efectivamente $T \subseteq [T,B]$. Ahora basta exhibir alguna fórmula D tal que $D \in [T,B]$ y $D \notin T$. Pues bien, B es una fórmula semejante, ya que por hipótesis $B \notin T$, y para cualquier $E \in T$:

$(B \wedge E) \rightarrow B$ [A4], luego $B \in [T,B]$ por definición de $[T,B]$.

De (ii) se sigue que $[T,B]$ es normal. Los razonamientos para $[T,C]$ son análogos.

(iii) $[T,B]$ y $[T,C]$ son consistentes

Supongamos por reductio que para alguna fórmula D ,

(1) $D \wedge \neg D \in [T,B]$

(2) $\delta (B \wedge F) \rightarrow (D \wedge \neg D) \quad (F \in T) \quad [(1), \text{def.}[T,B]]$

(3) $\delta F \rightarrow (B \rightarrow (D \wedge \neg D)) \quad [(2), T5, T19]$

Dado que T es normal y $F \in T$:

(4) $\delta B \rightarrow (D \wedge \neg D) \in T \quad [(3)]$

(5) $\delta (B \rightarrow (D \wedge \neg D)) \rightarrow (\neg(D \wedge \neg D) \rightarrow \neg B) \quad [T15]$

(6) $\neg(D \wedge \neg D) \rightarrow \neg B \in T \quad [(4), (5), T \text{ normal}]$

(7) $\neg(D \wedge \neg D) \in T \quad [T24, T \text{ normal}]$

(8) $\neg B \in T \quad [(6), (7)]$

(9) $\delta ((B \vee C) \wedge \neg B) \rightarrow C \quad [T19, T27]$

(10) $C \in T \quad [(8), (9)]$

Pero (10) contradice nuestra hipótesis ($B \vee C \in T, B \notin T, C \notin T$). Por tanto, $[T,B]$ es consistente. De modo similar se prueba que $[T,C]$ es consistente.

(iv) $A \in [T,B]$ y $A \in [T,C]$

Puesto que T es la máxima teoría normal y consistente sin A , dado que $[T,B]$ y $[T,C]$ son teorías normales y consistentes que incluyen estrictamente T

[(i),(ii),(iii)], necesariamente $A \in [T,B]$ y $A \in [T,C]$ (cfr. supra definición de “maxima”).

(v) $A \in T$

Utilizando algunos teoremas elementales sobre conjunción, disyunción y la relación entre ambas, el lector puede demostrar sin dificultad que si $A \in [T,B]$ y $A \in [T,C]$, entonces $A \in T$.

La prueba del Lema 1 es ahora inmediata: hemos construido una teoría normal y consistente T que no contiene A . Hemos supuesto por reductio que T no es prima. De esta suposición se sigue (v) $A \in T$. En consecuencia, T es una teoría normal, consistente y prima que no contiene A .

Lema 3. mIp^* es un mIp .

El modelo canónico es en efecto un modelo para Ip .

Prueba: Se trata de demostrar que la estructura mIp^* cumple las condiciones indicadas en la definición de mIp (p.17). K^*R^* y π^* en sus casos conjuntivos y disyuntivos no plantean problemas (aunque sí el ejercicio 14). Bastará demostrar π^* que satisface las cláusulas (iv) y (v) para π .

(iv $\Rightarrow$) Si $\pi^*(A \rightarrow B, a) = 1$, entonces para cualquier $b \in K^*$, si R^*ab y $\pi^*(A, b) = 1$, entonces $\pi^*(B, b) = 1$.

Suponemos:

(1) $A \rightarrow B \in a$, (2) $a \subseteq b$, (3) $A \in b$

De (1) y (2) deducimos: (4) $A \rightarrow B \in b$. Siendo b teoría, de (3) y (4) se sigue:

(5) $B \in b$, y en consecuencia: (6) $\pi^*(B, b) = 1$ [(5) y definición π^*].

(iv $\Leftarrow$) Si para cualquier $b \in K^*$, si dado R^*ab y $\pi^*(A, b) = 1$ tenemos $\pi^*(B, b) = 1$, entonces $\pi^*(A \rightarrow B, a) = 1$. Razonamos por contraposición.

Suponemos $\pi^*(AB, a) = 0$ y hemos de demostrar que hay un $b \in K^*$ tal que R^*ab y $\pi^*(A, b) = 1$ y $\pi^*(B, b) = 0$.

Pues bien, definamos el conjunto:

$$X = \{C : A \rightarrow C \in a\}$$

Con el objetivo de demostrar que X es una (I) teoría (II) normal, (III) consistente, (IV) $a \subseteq X$, (V) $A \in X$ y (VI) $B \notin X$:

(I) X es teoría	(II) X es normal	(III) X es consistente
1. $D \rightarrow E \in X$	1. D	1. $D \wedge \neg D \in X$
2. $D \in X$	2. $A \rightarrow D$	2. $A \rightarrow (D \wedge \neg D) \in a$ [1, def.X]
3. $A \rightarrow (D \rightarrow E) \in a$ [1, def.X]	3. $A \rightarrow D \in a$ [2, a es normal]	3. $\neg(D \wedge \neg D) \rightarrow \neg A \in a$ [2, T15]
4. $A \rightarrow D \in a$ [2, def.X]	4. $D \in X$ [3, def.X]	4. $\neg A \in a$ [3, T24, a teoría]
5. $A \rightarrow E \in a$ [A2, a teoría]		5. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ [A3, T5]
6. $E \in X$ [5, def.X]		6. $A \rightarrow B \in a$ [4, 5, a teoría]
		6 contradice $\pi^*(A \rightarrow B, a) = 0$.

(IV) $a \subseteq X$	(V) $A \in X$	(VI) $B \notin X$
1. $D \in a$	1. $A \rightarrow A \in a$ [T1, a normal]	1. $B \in X$
2. $A \rightarrow D \in a$ [A1, 1, a teoría]	2. $A \in X$ [1, def. X]	2. $A \rightarrow B \in a$ [1, def.X]
3. $D \in X$ [2, def. X]		3. 2 contradice $\pi^*(A \rightarrow B, a) = 0$

Ahora, de (I)-(IV) y las definiciones de π^* y R^* se sigue que X es una teoría normal y consistente tal que R^*aX , $\pi^*(A, X) = 1$ y $\pi^*(B, X) = 0$. Mostramos cómo extender X a una teoría que además es prima. Considérese el conjunto Y de todas las teorías consistentes tales que $X \subseteq Y$ y $B \notin Y$. Exactamente igual a como se demuestra en el Lema 1 que T es prima, se prueba que en Y hay una teoría prima, pongamos **b**, tal que $X \subseteq b$ y $B \notin b$. Puesto que **b** es normal, consistente y prima, $b \in K^*$. Al ser el caso R^*aX y $X \subseteq b$, necesariamente tenemos R^*ab . Por otra parte, $\pi^*(A, b) = 1$ [pues $\pi^*(A, X) = 1$] y $\pi^*(B, b) = 0$ [$B \notin b$]. Es decir, **b** es precisamente la teoría que se requería para demostrar (iv $\Leftarrow$).

Finalmente, notamos que la prueba de la cláusula (v) es –esencialmente– análoga a la ofrecida para la cláusula (iv), con lo cual mIp^* es efectivamente un mIp .

Teorema de Completud. Si δA , entonces δA .

Prueba: razonamos por contraposición clásica. Supóngase que $\neg A$. Por el Lema 2, hay una teoría T normal, consistente y prima tal que $A \notin T$. Por el Lema 3, $\pi^*(A, T) = 0$, es decir, A no es demostrable en el modelo canónico y, por tanto, $\neg A$.

Ejercicio 14.

Completar prueba de Lema 3 siguiendo las indicaciones ofrecidas. ♣

Ejercicio 15.

Considerando que cualquier prueba en Ip es una secuencia finita de fórmulas y empleando el teorema de deducción demostrar la siguiente versión fuerte del teorema de completud: Si $\Gamma \delta A$, entonces $\Gamma \delta A$. ♣

Ip carece de matriz característica finita, de manera que para mostrar su decidibilidad no cabe proceder al modo de la lógica proposicional clásica. La prueba no constructiva de decidibilidad de Ip procede mostrando la propiedad de los modelos finitos (de modo análogo a como se demuestra para distintos sistemas modales). Este tipo de prueba, a diferencia del que estudiamos a continuación, produce un mecanismo de decisión extraordinariamente inefectivo (consiste en recorrer “ciegamente” finitos modelos en búsqueda de la refutación de cualquier proposición intuicionista no teorematizada).

8. COMPLETUD Y DECIDIBILIDAD: VERSIÓN CONSTRUCTIVA

La semántica relacional expuesta en secciones anteriores ofrece una interpretación clásica de la lógica intuicionista. Tanto las definiciones de las constantes lógicas como la metalógica de la prueba de completud son clásicas. Las lógicas constructivas también son demostrablemente completas respecto de su interpretación intuicionista y, adicionalmente, las correspondientes pruebas de completud pueden ser constructivamente válidas. Ello tiene un notable interés teórico, y además tiene un gran interés práctico, pues permite construir algoritmos eficientes e implementables para producir automáticamente teoremas y refutaciones constructivas.

Sin pérdida de generalidad deductiva, podemos limitarnos a considerar el cálculo de secuentes presentado arriba (p.). Acerca de cualquier instancia de una regla de inferencia $\Gamma \Rightarrow A$ en tal cálculo, convengamos introducir las nociones siguientes:

- $\Gamma \Rightarrow A$ **preserva demostrabilidad** constructiva syss es posible computar una I_p -deducción de A a partir de finitas I_p -deducciones de fórmulas de Γ .
- $\Gamma \Rightarrow A$ **preserva refutabilidad** constructiva syss dado un mI_p que refute alguna fórmula de Γ , entonces también refuta A .

Además de preservar todas ellas I_p -derivabilidad, ocurre que las reglas $De \rightarrow$, $De \wedge$, $Iz \wedge$ e $Iz \vee$ preservan además refutabilidad, como el lector puede comprobar sencillamente. Las siguientes reglas preservan también derivabilidad y refutabilidad:

$$\begin{array}{c} Iz \perp \rightarrow \quad \Gamma, \Delta \Rightarrow A \\ \hline \Gamma, \perp \rightarrow B, \Delta \Rightarrow A \end{array}$$

$$\begin{array}{c} Iz \wedge \rightarrow \quad \Gamma, B \rightarrow C \rightarrow D, \Delta \Rightarrow A \\ \hline \Gamma, B \wedge C \rightarrow D, \Delta \Rightarrow A \end{array}$$

$$\text{Iz}^+ \vee \rightarrow \quad \frac{\Gamma, B \rightarrow p, C \rightarrow p, p \rightarrow C, \Delta \Rightarrow A}{\Gamma, B \vee C \rightarrow C, \Delta \Rightarrow A} \quad p \text{ no ocurre en la conclusión}$$

$$\text{Izp} \rightarrow \quad \frac{\Gamma, C, \Delta \Rightarrow A}{\Gamma, p \rightarrow C, \Delta \Rightarrow A} \quad p \in \Gamma, \Delta$$

Nótese que las reglas $\text{Iz} \rightarrow$ y $\text{De} \vee$ no preservan refutabilidad (aunque $\text{Izp} \rightarrow$ muestra preservación parcial en el caso de $\text{Iz} \rightarrow$).

Sea Ψ el conjunto de instancias de las reglas. Todos los elementos de preservan derivabilidad y refutabilidad, y además, el grado lógico de cada premisa es menor que el de su conclusión, de acuerdo con la definición siguiente de grado lineal g :

$$\begin{aligned} g(p) &= g(\perp) = 0 \\ g(A \rightarrow B) &= 1 + g(A) + g(B) \\ g(A \wedge B) &= 2 + g(A) + g(B) \\ g(A \vee B) &= 3 + g(A) + g(B) \\ g(B_1, \dots, B_n) &= g(B_1) + \dots + g(B_n) \\ g(\Gamma \Rightarrow A) &= g(\Gamma) + g(A) \end{aligned}$$

Decimos que un seciente $\Gamma \Rightarrow A$ es **reducible** syss es una instancia de una conclusión de una regla perteneciente a Ψ o bien es una instancia de una conclusión de Rep ó ECQ.

Lema A. Para cada $\Gamma \Rightarrow A$ pueden encontrarse secientes $S_1, \dots, S_n$ tales que:

- (a) $g(S_i) < g(\Gamma \Rightarrow A)$ para cada i
- (b) Si S_i es derivable, entonces $\Gamma \Rightarrow A$ también lo es.
- (c) Si mIp refuta al menos algún S_i , entonces también refuta $\Gamma \Rightarrow A$.

Prueba: Caso $\Gamma = \Gamma_0, B \wedge C, \Delta_0$. Sean S_1 y S_2 respectivamente las premisas izquierda y derecha de $\text{Iz} \wedge$, con $B \wedge C$ como fórmula principal. (a) es obvio, (b) es consecuencia de que Iz preserva derivabilidad y finalmente (c) de que preserve refutabilidad.

Caso $\Gamma = \Gamma_0, (B \vee C) \rightarrow C, \Delta_0$. Si C es fórmula compuesta, aplíquese $Iz^+ \vee \rightarrow$. Si C es atómica o es $\perp$, aplíquese $Iz \vee \rightarrow$.

El resto de casos se demuestra aplicando del mismo modo las reglas correspondientes.

El lema A nos asegura la decidibilidad de todos los secuentes reducibles, ya que:

Corolario A'. Si $g(G, A) \leq n$ y $\Gamma \Rightarrow A$ es reducible, entonces el secuyente aporta su derivación o su refutación.

Prueba. Si $n=0$, el corolario es obvio. Por hipótesis de inducción, es válido para cada $m < n$, de manera que cada secuyente S_i resultado de aplicar el Lema A aporta una derivación de $\Gamma \Rightarrow A$ o bien algún contramodelo que refuta $\Gamma \Rightarrow A$. Si $\perp \in \Gamma$ ó $\Gamma \Rightarrow A$ es atómica, obtenemos una derivación de $\Gamma \Rightarrow A$ por Rep ó ECQ.

¿Qué ocurre con los secuentes irreducibles? Por una parte, tenemos el problema de $Iz \rightarrow$, y en particular de la premisa $\Gamma, A \rightarrow B, \Delta \Rightarrow A$. Si A es una fórmula compuesta, entonces es $D \rightarrow E$, $D \wedge E$ ó $D \vee E$. De las reglas siguientes:

$$Iz2 \rightarrow \rightarrow \quad \frac{D, \Gamma, E \rightarrow B, \Delta \Rightarrow E}{\Gamma, (D \rightarrow E) \rightarrow B, \Delta \Rightarrow D \rightarrow E}$$

$$Iz2 \wedge \rightarrow \quad \frac{\Gamma, D \rightarrow B, \Delta \Rightarrow D \quad \Gamma, E \rightarrow B, \Delta \Rightarrow E}{\Gamma, (D \wedge E) \rightarrow B, \Delta \Rightarrow D \wedge E}$$

$$Iz2 \vee \rightarrow \quad \frac{\Gamma, D \rightarrow B, E \rightarrow B, \Delta \Rightarrow X}{\Gamma, (D \vee E) \rightarrow B, \Delta \Rightarrow D \vee E} \quad (X=D \text{ ó } X=E)$$

cabe demostrar que preservan derivabilidad y, adicionalmente, $Iz2 \wedge \rightarrow$ e $Iz2 \rightarrow \rightarrow$ preservan refutabilidad. Por otra parte, las fórmulas en la forma $p \rightarrow A$ se tratarán aplicando $Izp \rightarrow$ si p ocurre en el lado izquierdo del secuyente. En cualquier otro caso, será de aplicación el lema siguiente:

Lema B. Si $\Gamma \Rightarrow A$ es un seciente irreducible, mIp un modelo todos cuyos estados informacionales atestiguan Γ y si A es una disyunción $A_0 \vee A_1$, dados $a, b \in mIp$ refutando $\Gamma \Rightarrow A_0$ y $\Gamma \Rightarrow A_1$ respectivamente, entonces $c = \{p: p \in \Gamma\}$ refuta $\Gamma \Rightarrow A$.

Prueba: puesto que $a \ddot{\Gamma}$, necesariamente $a \ddot{\{p: p \in \Gamma\}}$ y por tanto $c \in mIp$. Por hipótesis, $mIp \ddot{\Gamma}$, de manera que a fortiori $c \ddot{\Gamma}$. Demostramos $c \hat{=} A$. Puesto que $\Gamma \Rightarrow A$ es irreducible, A es o bien atómica y $A \notin \Gamma$ o bien es $\perp$ o bien una disyunción $A_0 \vee A_1$. En el primer caso, $A \notin \{p: p \in \Gamma\}$ y en consecuencia $c \hat{=} A$ por canonicidad. Si $A = \perp$, entonces $c \hat{=} A$ por la definición de mIp . Finalmente, siendo $A = A_0 \vee A_1$, dado $a \leq c$ y $b \leq c$, la hipótesis del teorema y la monotonicidad de $\ddot{}$, necesariamente $c \hat{=} A_0$ y $c \hat{=} A_1$, esto es, por definición, $c \hat{=} A_0 \vee A_1$.

Los lemas A y B implican la decidibilidad de Ip , razonando por inducción sobre n :

Teorema decidibilidad Cada $\Gamma \Rightarrow A$ con $g(\Gamma, A) \leq n$ tiene una derivación o una refutación.

Decidibilidad en fragmentos primer orden.

9. APLICACIONES Y PERSPECTIVAS.

Los sistemas formales intuicionistas son los más estudiados y mejor conocidos de entre todos los sistemas no clásicos. Como consecuencia de ello, también son los más ricos en aplicaciones de todo tipo: aplicaciones a otros sistemas formales, aplicaciones metamatemáticas, fundacionales y computacionales. Señalamos someramente algunas aplicaciones principales, que agrupamos en categorías que atraviesan los diversos tipos de aplicaciones recién señalados.

(i) Reducciones (aplicaciones reductivas).

Primero unas palabras de contextualización. Del mismo modo como la primera aplicación de los sistemas formales en general fue representar la práctica matemática informal

enriqueciendo la lógica clásica con los axiomas pertinentes, así los sistemas formales intuicionistas representan la práctica matemática constructiva añadiendo tales axiomas a la lógica intuicionista. De este modo corresponden a los sistemas formales clásicos para la aritmética (aritmética de Peano PA), el análisis y la teoría de conjuntos -que están basados en la lógica clásica y pueden presuponer colecciones actualmente infinitas de objetos- sistemas formales constructivos para la aritmética (aritmética de Heyting HA), análisis constructivo y teoría constructiva de conjuntos –basados en la lógica intuicionista sin presuponer colecciones infinitas no accesibles constructivamente-. Hacemos notar que los avances logrados en la obtención de análogos constructivos de resultados clásicos en todos los campos de la matemática han sido notables en los últimos decenios ([06], [07], [11]).

Incluso desde una perspectiva clásica, los sistemas intuicionistas tiene múltiples aplicaciones demostrativo-teoréticas, permitiendo definir restricciones o extensiones constructivas de sistemas clásicos. En particular, es destacable el logro de reducciones de sistemas formales clásicos a sistemas más constructivos, que eventualmente permite la reducción de sistemas infinitarios a finitarios y la reducción de sistemas impredicativos a predicativos. El patrón general de estas reducciones fue inaugurado por Gödel en su llamada interpretación “dialéctica” de HA ([29],[26]):

- se reduce un sistema axiomático clásico a una variante intuicionista, basada en la lógica intuicionista, esto es, resultado de añadir a ésta los axiomas pertinentes de la teoría que se reduce (PA se reduce a HA, por ejemplo).
- Se explotan las propiedades constructivas de la variante obtenida, bien mediante su reinterpretación semántica (por ejemplo interpretaciones funcionales libres de cuantificadores) bien sintácticamente (por ejemplo obteniendo pruebas constructivas de normalización).

El interés de tales reducciones no es exclusivamente fundacional, ya que las mismas estrategias reductivas se aplican en la extracción de los elementos constructivos de pruebas clásicas, permitiendo el diseño de búsquedas automáticas de pruebas y procedimientos efectivos de decisión ([45]).

(ii) Pruebas como programas.

De nuevo primero unas palabras de contextualización. Supongamos que identificamos cada proposición intuicionista con el conjunto (constructivo) de sus pruebas. Adicionalmente, identifiquemos cada conjunto (constructivo) con una proposición, cuyas pruebas son los elementos del conjunto. Así el conjunto Q de los números racionales es la proposición intuicionista: hay algún número racional, que tiene tantas pruebas constructivas normales como instancias, esto es, elementos de Q . Esta es la idea básica de la propuesta de comprender las *proposiciones como tipos*. Martin-Löf construye semánticas completas para I_p e I_q basadas en esta idea([40],[46]). Puesto que, por otra parte, es bien conocida la correspondencia entre pruebas lógicas y programas (descubierta primero para pruebas puramente implicativas [44]), cabe afirmar que los teoremas intuicionistas pueden considerarse como programas, cuyas pruebas constructivas son algoritmos que los verifican, y en consecuencia, la lógica intuicionista es un método para desarrollar programas constructivamente correctos.

Este hecho explica que en los dos paradigmas de programación existentes, el paradigma funcional y el paradigma relacional (o programación “lógica”), la lógica intuicionista cuente con múltiples aplicaciones (tanto fundacionales como computacionales) que obviamos detallar.

(iii) Extensiones y restricciones.

Todas las extensiones de I_p que no colapsan en la lógica clásica son llamados sistemas intermedios o superintuicionistas. Entre ellos hay lógicas de gran interés, que coinciden con diversas lógicas multivaluadas, difusas o probabilísticas, a la vez que conservan diferentes peculiaridades constructivas. También restricciones de la lógica intuicionista, especialmente sobre su fragmento implicativo (lógicas intuicionistas sin contracción, lógicas lineales intuicionistas) cuentan con múltiples aplicaciones computacionales y fundacionales (demostración automática de teoremas, análisis sintáctico del lenguaje natural, codificación del razonamiento espacial, etc.). Evidentemente, en tres horas (y pico) sólo nos queda constatar la existencia de tales universos.

10. REFERENCIAS.

1. Introducciones

- [01] Dalen van, D. “The intuitionistic conception of Logic” en Varzi, A. (ed.) *European Review of Philosophy*, vol. 4, CSLI, 1999
- [02] Heyting, A. *Intuitionism*, North-Holland, 1971.
- [03] Kreisel, G. “Foundations of Intuitionist logic”, en: Nagel, E. et al. *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, North-Holland, 1962
- [04] Méndez, J.M. *Sistemas de lógica intuicionista*, manusc., 1989.
- [05] Restall, G. *Constructive Logic for All*, manusc., 2000.

2. Matemática constructiva

- [06] Beeson, M. *Foundations of Constructive Mathematics*, Springer, 1985.
- [07] Bishop, E. y Bridges, D.S. *Constructive Analysis*, Springer, 1985.
- [08] Dummett, M. *Elements of Intuitionism*, OUP, 1980.
- [09] Mines, R., Richman, F. y Ruitenburg, W. *A Course in Constructive Algebra*, Springer, 1988.
- [10] Shapiro, E. (ed.) *Intentional Mathematics*, Springer, 1998.
- [11] Troelstra, A.S. y van Dalen, D. *Constructivism in Mathematics*, North-Holland, 1988.

3. Referencias clásicas

- [12] Brouwer, L. E. J. *Collected Works I, II*, North-Holland/Elsevier, 1975
- [13] ---, *Brouwer’s Cambridge Lectures on Intuitionism*, D, van Dalen (ed.), CUP, 1981
- [14] Kolmogorov, A.N. “On the principle of tertium non datur” en van Heijenoort, From Frege to Gödel, CUP, 1967, 414-37.
- [15] Heyting, A. “Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik” *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1930, 42-56, 57-71
- [16] ---, “After thirty years”. En: Nagel et al. (eds.) *Logic, methodology and Philosophy of Science*, Stanford University Press, 1976, 194-7.

4. Fundamentos, motivación

- [17] Detlefsen, Brouwerian Intuitionism”, **Mind** 99 (1990) 501-33
- [18] Dummett, M. “The Philosophical basis of Intuitionistic Logic”, en: *Truth and other enigmas*, HUP, 1973. (Hay traducción española)
- [19] George, A. “The conveyability of Intuitionism” **JPL** 17 (1988) 133-56.
- [20] Martin-Löf, “Truth of a propositions, evidence of a judgement, validity of a proof”, **Synthese** 73 (1987) 407-20.
- [21] Richman, F. “Intuitionism as generalization”, **Philosophia Mathematica** 5 (1998) 124-38
- [22] Sundholm, G “Constructions, Proofs and the Meanings of Logical Constants”, **JPL** 12 (1983) 151-72.
- [23] Troelstra, A. "Concepts and Axioms". Tech. Rep ML-1998-02, Uni. Amsterdam, 1998

5. Teoría de pruebas

- [24] Buss, S.R. *Handbook of Proof Theory*, North-Holland, 1998.
- [25] Dalen van, D. *Logic and Structure*, Springer, 1997.
- [26] Fefermann, S. “Hilbert’s Program relativized” **JSL** 53 (1988), 364-384.
- [27] Friedman, H. “The Disjunction and Existence Properties for Axiomatic Systems of Truth”, **APAL** 40 (1988), pp. 1-10.
- [28] Gödel, K. “Zum intuitionistischen Aussagenkalkül”, *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien* 69, 65-66. (Collected Works II, 222-5).
- [29] ---, “Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes”, **Dialectica** 12, 280-7 (Collected Works II, 217-52).
- [30] Iemhoff, R. “A Modal Analysis of some Principles of the Provability Logic of Heyting Arithmetic”, *ILLC*, 1998.
- [31] Myhill, J., Kino, A. y Vesley, R. *Intuitionism and Proof Theory*, North-Holland, 1970.

6. Semánticas

- [32] Beth, E.W. “Semantic construction of Intuitionistic Logic” Kon. Nederlandse Academie Wtenschappen 19/11 (1956), 357-88.
- [33] Burgess, J. “Completeness of Intuitionistic Propositional Logic for its intended Interpretation” **NDJFL** 22 (1981) 17-29.
- [34] Coquand, T. y Dybjer, P. “Intuitionistic model constructions and normalization Proofs”. *Mathematical Structures in Computer Science*, 7 (1997)73-94.
- [35] Dekkers, W., Bunder, M. y Barendregt, H. “Completeness of the propositions-as-types interpretation of intuitionistic logic into illative combinatory logic”, **JSL** 63(1998):869-890,
- [36] Fitting, M.C. *Intuitionistic logic, Model Theory and Forcing*. North-Holland, 1969.
- [37] Kripke, S. “Semantic Analysis of Intuitionistic Logic”, en Crossley, J. y Dummett, M. *Formal Systems and Recursive Functions*, North-Holland, 1965.
- [38] Kleene, S.C. Realizability: a retrospective Survey” en Rogers, J. (ed.) *Cambridge Summer School Mathematical Logic*, Springer, 1973, 95-112.
- [39] --- y Vesley, R. *The Foundations of Intuitionistic Mathematics*, North-Holland, 1965.
- [40] Martin-Löf, P. *Intuitionistic Type theory*, Bibliopolis, 1994.
- [41] Scott, D. “Identity and existence in Intuitionistic Logic”, en Fourman et al (eds.) *Applications of Sheaves*, Springer, 1976, 660-96.
- [42] Veldman, W. “An intuitionistic completeness Theorem for Intuitionistic Predicate Logic”, **JSL** 41 (1976), 159-66.

7. Aplicaciones

- [43] Coecke, B. Quantum logic in intuitionistic perspective arXiv:math. LO/00 11208, 24 Nov. 2000
- [44] De Groote, P. (ed) *The Curry-Howard isomorphism*, Academia, 1995.
- [45] Dickhoff, R. Contraction-free sequent calculi for intuitionistic logic”, **JSL** 57 (1992), 795-807.
- [46] Martin Löf, P. “Constructive Mathematics and Computer programming”, en: Hoare, C. y Shepherdson (eds.) *Mathematical Logic and Computer Languages*, Prentice Hall, 1995.

- [47] Renz, J. y Nebel, B. "On the Complexity of Qualitative Spatial Reasoning: A Maximal Tractable Fragment of the Region Connection Calculus", **Artificial intelligence**, 108 (1999) 95-149.