Capítulo 7

Lógica Multivariada

7.1. Introducción

7.1.1. Ejemplos

En muchas de las ramas de la matemática, de la filosofía, de la I.A. y de la informática formalizamos enunciados relativos a diversos tipos de objetos. Por consiguiente, tanto los lenguajes lógicos utilizados, como las estructuras matemáticas que los interpretan son multivariadas o heterogéneas; esto es, el conjunto de las variables del lenguaje toma valores sobre diversos universos o dominios.

Son numerosos los ejemplos de materias que utilizan fórmulas y estructuras multivariadas:

1. En *geometría*, por tomar un ejemplo clásico y sencillo, usamos distintos universos para *puntos*, *líneas*, *ángulos*, *triángulos*, etc

2. En la teoría de *espacios vectoriales* tenemos universos distintos para *vectores* y *escalares*. Además de eso, podemos incluir universos para *subespacios*, *métricas* y *aplicaciones lineales*.

3. En *teoría de grupos* las estructuras poseen distintos universos para *elementos* del grupo, *subgrupos*, *subgrupos normales*, *homomorfismos*, etc.

4. En la lógica de segundo orden SOL veremos que hay universos para *individuos*, para *conjuntos* de esos elementos básicos, para *relaciones* binarias entre ellos, etc.

5. En *teoría de tipos* la jerarquía corresponde a toda la del *universo matemático finito* que contiene en sus distintos niveles a: *individuos*, *conjuntos de individuos*, *conjuntos de conjuntos de individuos*, etc.

6. En *computación* utilizamos invariablemente estructuras multivariadas: lo típico es tener universos de *datos*, *números naturales* y *operadores booleanos*

nos. Podemos añadir otros para *números reales*, *cadenas de caracteres*, *matrices*, etc.

7. Cuando razonamos sobre programas los situamos en universos para ellos y añadimos otros para *estados* y para *tiempo*.

¿Qué lenguaje y qué lógica es el adecuado en cada uno de estos casos?
La respuesta es que la lógica multivariada es la que mejor les cuadra.

7.1.2. Comparación con la lógica de primer orden sin variedades

La lógica de primer orden *FOL* es sólida y equilibrada, con muchas propiedades interesantes: tiene un cálculo deductivo correcto y completo, es compacta y disfruta de las propiedades de Löwenheim-Skolen, entre otras.

Su lenguaje y sus modelos, tal y como se suelen presentar en la mayoría de los libros de texto, son *univariados*: contienen sólo un universo de objetos y el lenguaje formal sólo usa variables individuales para referirse y cuantificar sobre ellos. Por consiguiente podemos intentar, y así se ha hecho con frecuencia, reducir y codificar nuestras estructuras y lenguajes multivariados en estructuras y lenguajes univariados. Ello es posible y es de hecho lo que propuso en 1952 Hao Wang [18], uno de los primeros estudiosos de esta lógica.

Así que la reducción de la lógica multivariada *MSL* a la univariada *FOL* es un resultado no sólo bien conocido desde antiguo, sino también el planteamiento que normalmente se hace en los libros de texto. El proceso se lleva a cabo a dos niveles: hay una *traducción sintáctica* de las fórmulas multivariadas a las univariadas —conocida como *relativización de cuantificadores*— y una *conversión semántica* de estructuras —conocida como *unificación de dominios*—. Lo que nunca se suele decir en los libros de texto es el precio que debe pagarse, algo sobre lo que hablaré después.

Para traducir tomamos un lenguaje de primer orden sin variedades —esto es, con una sola clase de variables— con los mismos signos de operación que tuviéramos en la multivariada y le añadimos tantos relatores monarios como variedades hubiera. Cada fórmula cuantificada sobre una variedad i

$$\forall x^i \varphi(x^i)$$

será reemplazada por una fórmula cuantificada condicional, en cuyo antecedente decimos sobre qué variedad se restringe la cuantificación

$$\forall x(Q^i x \to \varphi(x)^*)$$

La nueva estructura univariada obtenida mediante unificación de dominios tendrá un solo universo constituido por la unión de todos los universos de la que se reduce, las relaciones de la estructura multivariada pasan a serlo de la nueva univariada y las funciones de la multivariada se extienden para que puedan serlo de la univariada, añadiendo valores arbitrarios para los nuevos elementos.

Voy a comentar brevemente a qué precio pagamos esta reducción.

1. *Naturalidad*
Las estructuras que queremos estudiar son multivariadas y el lenguaje más adecuado para llevar a término la investigación debería reflejar esa diversidad. El principio básico de *FOL* es por lo tanto inadecuado y así *perdemos naturalidad* cuando forzamos la conversión.

2. *Interpolación de Craig*
En 1967 Solomon Feferman [6], el primer lógico que desarrolló la lógica multivariada en sí misma[1], señaló que por lo que respecta al *teorema de interpolación de Craig* el de la multivariada es mejor porque en este caso se demuestra una versión mejorada. Sin embargo, al realizar la reducción aunque se conservan las demostraciones de otros teoremas como los de compacidad y Löwenhein-Skolem, pudiéndose *"arrastrar"* el resultado, sin necesidad de repetir la prueba, no sucede lo mismo con el de Craig. El teorema puede demostrarse desde la teoría de modelos y desde la teoría de la prueba, tanto en el caso de la *FOL* como de la *MSL*. Puesto que una de las posibilidades es derivarlo del teorema de completud del cálculo Gentzen sin regla de corte, cuando falla interpolación la esperanza de encontrar un cálculo de esta clase se reduce. De esta manera el teorema de Craig nos sirve de test para evaluar las bondades de una lógica desde el punto de vista de su teoría de la prueba. Por lo ya comentado en este mismo apartado es de suponer que el cálculo de *MSL* ofrezca buenas prestaciones, mejores incluso que el correspondiente de *FOL*.
En opinión de Ebbinghaus:
It is especially with interpolation that many-sortedness pays. As seen in Feferman [1974], the many-sorted version of the interpolation theorem together with its possible refinements is a powerful tool even for one-sorted model theory, offering for instance elegant proofs of various preservation theorems.
También piensa:
Interpolation properties seem to indicate some kind of balance between syntax and semantics. This can be seen, for instance, from the work of Zucker [1978] or from the fact that interpolation implies Beth's definability theorem, according to which implicit definitions can be made explicit. Hence we may expect that interpolation properties fail if syntax and semantics are not in an equilibrium.

3. *Interpretabilidad*
Hook [9] demuestra que una teoría multivariada puede ser interpretada en otra teoría multivariada sin que las correspondientes teorías de primer orden lo sean entre sí. Señala:
A theory can be proved consistent by exhibiting an interpretation in a known consistent theory. A many-sorted theory, therefore, may be useful in a consistency proof for which the corresponding one-sorted theory would

[1] Sin aplicar el *"procedimiento matemático"* del chiste, causa de tantas simplificaciones y empobrecimientos; esto es, la *"reducción al caso anterior"*.

not suffice. (Even if another consistency proof is known, the proof using interpretations has the advantage of being finitary and purely syntactic.)

4. *Eficiencia deductiva*
Las deducciones en el cálculo multivariado son más cortas que las correspondientes deducciones en el de primer orden obtenido mediante reducción. Se evitan conclusiones inútiles, tales como los teoremas de primer orden que no tienen contrapartida multivariada porque no son traducción de ninguna de estas fórmulas. La razón por la que aparecen fórmulas nuevas es que al hacer la traducción añadimos al lenguaje tantos relatores monarios como variedades. Por consiguiente, desde el punto de vista de la *deducción automática de teoremas*, cuyo objetivo principal es obtener conclusiones lógicas con eficacia y rapidez, evitando resultados indeseados, la reducción a la univariada es inaceptable.

Es evidente que aunque una se reduce a la otra tienen las propiedades diferentes ya señaladas; su naturalidad, la fuerza del teorema de interpolación, la eficiencia del cálculo nos inclinan a la multivariada. Además, la interpretabilidad entre teorías no siempre se preserva al pasar a la univariada. Por otra parte es verdad, aunque sea obvio, que la lógica univariada está contenida en la multivariada.

Las dos tienen un cálculo deductivo completo en sentido fuerte y se aplican los resultados de compacidad y Löwemheim-Skolem.

Por lo que respecta a su teoría de modelos, nociones tales como subsistema, imagen homomórfica, producto directo y reducido pueden también definirse para la multivariada y muchos de los teoremas se generalizan sin dificultad. La equivalencia elemental se preserva en la reducción; esto es, dos estructuras multivariadas que son elementalmente equivalente con el lenguaje multivariado siguen siéndolo cuando, mediante relativización de cuantificadores y unificación de dominios, pasamos al lenguaje y estructuras univariadas.

¿Es la lógica multivariada una extensión en el sentido propio y estricto de la de primer orden?

En 1969 Lindström descubrió que la lógica de primer orden es la más potente que satisface simultáneamente compacidad y Löwenheim-Skolem. También demostró que es así mismo la más potente que teniendo una sintaxis finita, retiene las metapropiedades de completud y Löwenheim-Skolem. Desde este punto de vista *MSL* no puede ser considerada una extensión propia de *FOL*.

Tal vez sea conveniente hacer una precisión terminológica. Hay varios sistemas lógicos cuyas estructuras, como las de la multivariada poseen varios universos: la lógica de segundo orden, la de tercer orden, la teoría de tipos; pero su semántica estándar es muy específica y difiere notablemente de la multivariada. Se cuelan en ella nociones nada inocentes de la teoría de conjuntos, tales como la ya mencionada de *"subconjunto"* y esto hace que la capacidad expresiva se dispare y la deductiva caiga bajo mínimos. Se trata aquí de extensiones de *FOL* en sentido estricto y son incompletas, no compactas y no poseen la propiedad de Löwenheim-Skolem.

Por otra parte, hay lógicas a las que etiquetamos como *extensiones* pero que lo son sólo parcialmente ya que al poseer simultáneamente todas las propiedades mencionadas, no lo son en el sentido del teorema de Lindström. Lo cierto es que en sentido estricto, tampoco cae en esta categoría la lógica multivariada; la cuantificación cambia, pero no se extiende. En primer orden cuantificamos sobre los elementos de un determinado dominio, mientras que en multivariada lo hacemos sobre los universos obtenidos mediante catalogación o incluso estratificación del mismo.

7.1.3. Usos de la lógica multivariada.

Aunque la lógica multivariada no sea una extensión en sentido propio de la de primer orden (univariada), atendiendo al resto de propiedades se la prefiere en aplicaciones tanto en informática como en lingüística. Por lo que respecta a la informática es ampliamente usada, sirvan los ejemplos siguientes:

1. Tipos abstractos de datos
2. Semánticas y lógicas de verificación de programas
3. Definición de lenguajes de programación
4. Álgebras para distintas lógicas
5. Bases de datos
6. Lógica dinámica
7. Semántica de lenguajes naturales
8. Solución de problemas computarizada
9. Representación del conocimiento
10. Programación lógica y deducción automática

Márkusz [15] hace un repaso detallado del uso de la lógica multivariada en informática, especialmente por el grupo de Hungría; el libro que editan Meinke y Tucker en el 1993, *Many-sorted logic and its applications* reúne una serie de trabajos en esa dirección.

La lógica multivariada se ha usado en matemáticas como procedimiento para buscar modelos no estándar; esto es esencialmente lo que se hace para conseguir los modelos generales de Henkin para la lógica superior, responsables de su teorema de completud.

Puede resultar también útil para entender la lógica dinámica de dos formas distintas:

1. la lógica dinámica proposicional se traduce a la lógica multivariada por un procedimiento claramente deudor al de Henkin
   y está también

2. la lógica dinámica no-estándar, heredera igualmente de los modelos generales de Henkin.

De la reducción de otras lógicas a *MSL* hablaré con detalle en el capítulo 13.

7.2. Lenguaje y estructuras

Nuestro primer objetivo es clasificar a las estructuras matemáticas mediante su signatura de manera que dos estructuras tengan la misma signatura siempre que y sólo cuando se pueda usar el mismo lenguaje para hablar de ellas. Antes de definir con precisión los conceptos de signatura y estructura, digamos informalmente qué son. Aquí las estructuras son concebidas como multivariadas, de manera que contienen más de un universo o dominio de objetos sobre los que toman valores los conjunto de variables. Usamos un conjunto de índices para distinguir los universos: para cada $i \in SORT$, $\mathbf{A}_i$ es el universo de variedad i. En particular, exijimos que $0 \in SORT$ y hacemos que $\mathbf{A}_0 = \{V, F\}$, $\mathbf{A}_0$ es el universo de valores de verdad —variedad booleana—. De hecho, esta presentación nos permitiría tener más de un valor de verdad; por ejemplo, tres $\mathbf{A}_0 = \{T, F, U\}$, añadiendo un valor indefinido[2].

Una estructura tiene operaciones de distintos tipos: para $i_0, ..., i_n \in SORT$, una operación $n-$aria de tipo $\alpha = \langle i_0, ..., i_n \rangle$ es una función cuyo dominio es el producto cartesiano de universos $\mathbf{A}_{i_V} \times ... \times \mathbf{A}_{i_n}$ en $\mathbf{A}_{i_0}$. Cuando $\mathbf{A}_{i_0}$ es $\mathbf{A}_0$, decimos que es una relación $n-$aria de tipo $\langle 0, i_V, ..., i_n \rangle$. Incluimos aquí las funciones veritativas e identificamos las constantes de la estructura con funciones de $\{\emptyset\}$ en $\mathbf{A}_i$; esto es, de tipo $\langle i \rangle$, que simplificamos como i.

También podemos tener relaciones $n-$arias sin tipo: funciones de

$$(\bigcup_{i \in SORT - \{0\}} \mathbf{A}_i)^n$$

en $\mathbf{A}_0$. La identidad es una de ellas. Si no tuviéramos esta modalidad de relaciones tendríamos una identidad fraccionada por tipos[3].

7.2.1. Signatura

Una signatura es un par ordenado

$$\Sigma = \langle SORT, FUNC \rangle$$

tal que

1. $SORT$ es un conjunto de índices, con $0 \in SORT$

[2] En Huertas ([10] y [11]) se usa el tercer valor para definir una lógica multivariada y parcial que sirve de lógica subyacente al hacer la traducción de la modal de primer orden con la semántica de *huecos de valor de verdad*.

[3] De la identidad hablaremos en la sección 11.4.

2. $FUNC : OPER.SYM \longrightarrow S_\omega(SORT) \cup \omega^+$ es una función cuyos valores son números naturales distintos de cero, o están en el conjunto formado por las sucesiones finitas de elementos de $SORT$. Por ejemplo:

   a) Las conectivas toman tienen estos valores:

   $$FUNC(\neg) = \langle 0, 0 \rangle \,,\ FUNC(\wedge) = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

   b) La identidad es binaria, sin tipos:

   $$FUNC(E) = 2$$

   c) Hay relaciones $n-$arias establecidas en la unión de tipos:

   $$FUNC(R) = n$$

   d) El resto tienen tipo:

   $$FUNC(f) = \langle i_0, ..., i_n \rangle$$

   distinguiéndose los predicados —$i_0 = 0$—
   de las funciones —$i_0 \neq 0$—

Estructuras

Una estructura es un par ordenado

$$\mathcal{A} = \left\langle \langle \mathbf{A}_i \rangle_{i \in SORT} \,, \langle f^{\mathcal{A}} \rangle_{f \in OPER.SYM} \right\rangle$$

donde:

1. $\mathbf{A}_i$ es el universo de variedad i, que ha de ser no vacío.
   Tomamos $\mathbf{A}_0 = \{V, F\}$

2. Cuando $FUNC(f) = \langle i_0, i_V, ..., i_n \rangle$, entonces

   $$f^{\mathcal{A}} : \mathbf{A}_{i_V} \times ... \times \mathbf{A}_{i_n} \longrightarrow \mathbf{A}_{i_0}$$

   Cuando $FUNC(f) = n$

   $$f^{\mathcal{A}} : \left(\bigcup_{i \in SORT - \{0\}} \mathbf{A}_i \right) \longrightarrow \mathbf{A}_0$$

   Algunos signos de $OPER.SYM$ tienen una interpretación fijada de antemano; por ejemplo, queremos que los conectores tengan la interpretación usual y que la igualdad denote identidad.

$$\begin{array}{lccc} \neg^{\mathcal{A}}: & \mathbf{A}_0 & \longrightarrow & \mathbf{A}_0 \\ & V & \longmapsto & F \\ & F & \longmapsto & V \end{array} \qquad \begin{array}{lccc} \vee^{\mathcal{A}}: & \mathbf{A}_0 \times \mathbf{A}_0 & \longrightarrow & \mathbf{A}_0 \\ & \langle V, V\rangle & \longmapsto & V \\ & \langle V, F\rangle & \longmapsto & V \\ & \langle F, V\rangle & \longmapsto & V \\ & \langle F, F\rangle & \longmapsto & F \end{array}$$

$E^{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = V \qquad \text{syss} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{y}$

Comentario 238 *Cuando* $FUNC(f) = \langle i\rangle$ *entonces* $f^{\mathcal{A}} \in \mathbf{A}_i$. *Y cuando* $FUNC(f) = \langle 0, i_V, ..., i_n\rangle$ *entonces* $f^{\mathcal{A}}$ *es una función característica que se identifica con*

$$\left\{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{A}_{i_V} \times ... \times \mathbf{A}_{i_n} \mid f^{\mathcal{A}}(\bar{\mathbf{x}}) = V\right\}$$

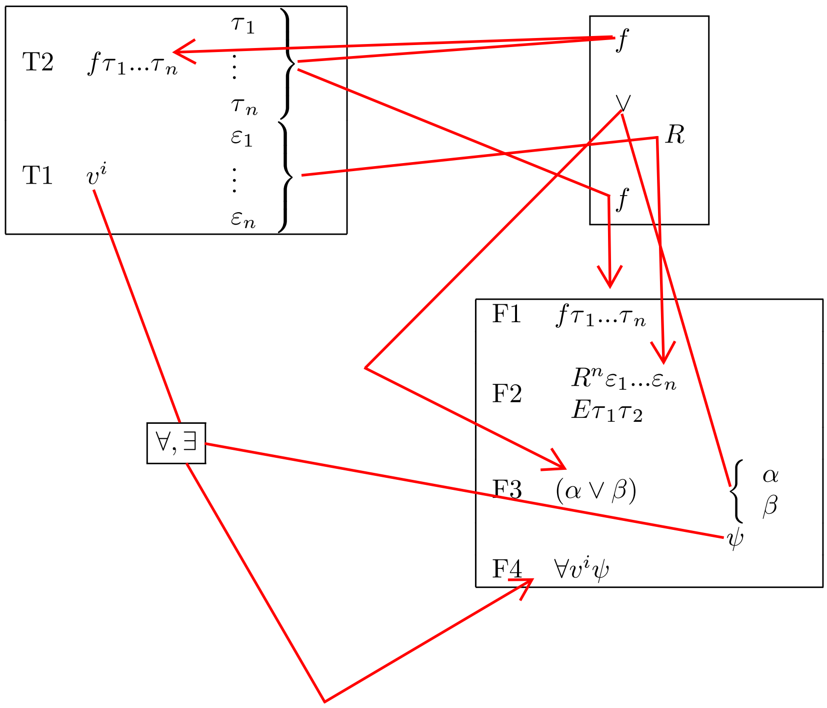
es decir, se trata de una relación $n-$*aria cuyas* $n-$*tuplas respetan la distinción de variedades. Finalmente, cuando* $FUNC(f) = n$ *entonces* $f^{\mathcal{A}}$ *es una relación* $n-$*aria establecida en el batiburrillo de la unión de tipos.*

Lenguaje

El alfabeto lo componen los siguientes signos

- Todos los signos del lenguaje, excepto los cuantificadores y las variables, son los que están incluídos en $OPER.SYM$
- Cuantificadores: $\forall, \exists$
- Variables: $v_0^i, v_1^i, v_2^i, ...$ para cada $i \in SORT - \{0\}$

Usando los signos del alfabeto se forman las expresiones del lenguaje; esto es, términos y fórmulas. Las reglas aparecen gráficamente representadas en el esquema siguiente:



7.3. Semántica

Asignación

Para poder definir las interpretaciones de las fórmulas precisamos de las asignaciones, que respetarán la clasificación en variedades

$$M : (\bigcup V_i)_{i \in SORT - \{0\}} \longrightarrow (\bigcup \mathbf{A}_{iI})_{i \in SORT - \{0\}}$$

—donde $M(v^i) \in \mathbf{A}_i$ para cada $i \in SORT$—

Interpretación

Finalmente definimos la interpretación

$$\Im = \langle \mathcal{A}, M \rangle$$

de expresiones de la manera habitual. En particular:

1. (E1) $\Im(v^i) = M(v^i)$
2. (E2) $\Im(f\varepsilon_1 ... \varepsilon_n) = f^{\mathcal{A}} \Im(\varepsilon_1) ... \Im(\varepsilon_n)$
3. (E3) $\Im(\exists v^i \varphi) = V$ syss $\left\{\mathbf{a} \in \mathbf{A}_i \mid \Im^{\mathbf{a}}_{v^i}(\varphi) = V\right\} \neq \emptyset$

Consecuencia y validez

Las definiciones son las usuales. Las expresiones

$$\Gamma \vDash \varphi \ \text{ y } \ \vDash \varphi$$

—denotan consecuencia y validez—

7.3.1. Metateoremas semánticos

De manera muy semejante a cómo se demuestran en primer orden[4], en la multivariada obtenemos:

Lema 239 *(de coincidencia). Sea $\mathcal{A}$ una estructura y M_1 y M_2 asignaciones sobre ellas*
Si

$$M_1 \upharpoonright LBR(\varepsilon) = M_2 \upharpoonright LBR(\varepsilon)$$

entonces

$$\langle \mathcal{A}, M_1 \rangle (\varepsilon) = \langle \mathcal{A}, M_2 \rangle (\varepsilon)$$

[4] El detalle puede encontrarse en [13].

Lema 240 *(de sustitución). Para cada expresión* ε *e interpretación* $\Im$:

$$\Im_{v^i}^{\Im(\tau)}(\varepsilon) = \Im(\varepsilon\frac{\tau}{v^i})$$

—donde τ *es de tipo* i*—*

Lema 241 *(de sustitución de iguales). Para cada expresión* ε *e interpretación* $\Im$ *se verifica:*

$$\Im(\varepsilon\frac{\tau}{v^i}) = \Im(\varepsilon\frac{t}{v^i})$$

siempre que $\Im(\tau) = \Im(t)$ *y "*v^i *es del mismo tipo que* τ *syss* v^i *es del mismo tipo que* t*"*

Teorema 242 *(de isomorfía). Sean* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *con universos disjuntos. Si*

$$\mathcal{A} \cong^h \mathcal{B}$$

entonces

$$h\langle\mathcal{A}, M\rangle(\varepsilon) = \langle\mathcal{B}, h\circ M\rangle(\varepsilon)$$

7.4. Cálculo deductivo

Se puede extender un cálculo deductivo de primer orden; por ejemplo, el que contiene las reglas de[5]: Introducción de hipótesis *IH*, monotonía *M*, prueba por casos *PC*, no contradicción *NC*, introducción del disyuntor en el antecedente *IDA*, introducción del disyuntor en el consecuente *IDC*. A este cálculo se le añaden las siguientes:

1. Introducción del particularizador en el antecedente *IPA*

$$\frac{\Omega \quad \varphi\left(\frac{y^i}{x^i}\right) \dashv \psi}{\Omega \quad \exists x^i\varphi \dashv \psi}$$

   $y^i \notin LBR\left(\Omega \cup \left\{\exists x^i\varphi, \psi\right\}\right)$ x^i e y^i son del mismo tipo.

2. Introducción del particularizador en el consecuente *IPC*

$$\frac{\Omega \quad \dashv \varphi\left(\frac{\tau}{x^i}\right)}{\Omega \quad \dashv \exists x^i\varphi}$$

   x^i y τ son del mismo tipo

3. Reflexividad de la igualdad *RI*

$$\frac{}{\tau = \tau}$$

[5]Las reglas están en la página 56. Este es también el cálculo que uso en mi libro *Teoría de Modelos*.

4. Sustitución de iguales *SI*

$$\frac{\Omega \quad \dashv \varphi\left(\frac{\tau}{x^i}\right)}{\Omega \quad \tau = t \dashv \varphi\left(\frac{t}{x^i}\right)}$$

se cumple: "x^i es del mismo tipo que τ syss x^i es del mismo tipo que t"

7.4.1. Propiedades sintácticas

Se definen las propiedades siguientes de la forma habitual; a saber,

Definición 243 $\Delta \subseteq FORM$ *es* ***contradictorio*** *syss*

$$\Delta \vdash \varphi \quad \textit{para toda} \quad \varphi \in FORM$$

Definición 244 $\Delta \subseteq FORM$ *es* ***consistente*** *syss no es contradictorio*

Definición 245 $\Delta \subseteq FORM$ *es* ***máximamente consistente*** *syss* Δ *es consistente y siempre que* $\varphi \in FORM$ *y* $\varphi \notin \Delta$ *entonces* $\Delta \cup \{\varphi\}$ *es contradictorio*

Definición 246 $\Delta \subseteq FORM$ *es* ***ejemplificado*** *syss para cada particularización* $\exists x^i \varphi$,

$$\textit{si} \quad \exists x^i \varphi \in \Delta \quad \textit{entonces} \quad \varphi\left(\frac{\tau}{x^i}\right) \in \Delta$$

para algún τ *del mismo tipo que* x^i

7.4.2. Teoremas sobre consistencia

Se demuestra fácilmente que todo subconjunto de un conjunto consistente lo sigue siendo:

Teorema 247 *Si* Δ *es consistente y* $\Gamma \subseteq \Delta$ *entonces* Γ *es consistente*

Y también, que si un conjunto contiene a otro contradictorio, también él lo será.

Teorema 248 *Si* Δ *es contradictorio y* $\Delta \subseteq \Gamma$ *entonces* Γ *es contradictorio*

etc...

7.4.3. Teoremas sobre consistencia máxima

Sea Δ un conjunto de fórmulas máximamente consistente. Se puede demostrar que la pertenecia a un conjunto de esta clase lleva de alguna forma *"interiorizada"* la interpretación estándar de los signos lógicos y metalógicos.

Proposición 249 *Si* $\Delta \vdash \varphi$ *entonces* $\varphi \in \Delta$

Proposición 250 *Si* $\vdash \varphi$ *entonces* $\varphi \in \Delta$

Proposición 251 $\neg\varphi \in \Delta$ *syss* $\varphi \notin \Delta$

Proposición 252 $\varphi \vee \psi \in \Delta$ *syss* $\varphi \in \Delta$ *ó* $\psi \in \Delta$

etc...

Lema 253 *Finitud de las consistencia:* Δ *es consistente syss cada subconjunto finito de* Δ *lo es también.*

7.4.4. Corrección

Teorema 254 *Corrección del cálculo. Si* $\Gamma \vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \models \varphi$

Corolario 255 *Si* Γ *tiene un modelo entonces* Γ *es consistente*

7.5. Metateoremas de completud, compacidad y Löwenheim-Skolem

La demostración directa de estos teoremas sigue exactamente el mismo esquema y se sirve de los mismos argumentos que usamos en la sección 2.4 al demostrarlos para la de primer orden sin variedades[6]. Arrojando los resultados esperados.

Lema 256 *(Lindenbaum) Si* Γ *es consistente y tiene sólo un conjunto finito de variables libres, entonces hay un* Γ^* *máximamente consistente y ejemplificado que lo contiene* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ *y está escrito en el mismo lenguaje*

Lema 257 *(Henkin) Si* Γ^* *es máximamente consistente y ejemplificado, entonces* Γ^* *tiene un modelo numerable*

Corolario 258 *Si* Γ *es consistente y el conjunto de sus variables es finito, entonces* Γ *tiene un modelo numerable*

Lema 259 *Si* Γ *es consistente y* $\Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$ *, siendo* $\overline{\Gamma}$ *un conjunto de sentencias que resulta de sustituir en* Γ *las variables libres por constantes nuevas y si* $\overline{\Gamma}$ *tiene un modelo numerable, entonces* Γ *tiene un modelo numerable*

[6] La demostración de este teorema para la lógica multivariada se halla desarrollada en detalle en [13], páginas 245-257.

Teorema 260 *Si* Γ *es consistente, entonces* Γ *tiene un modelo numerable*

Teorema 261 *(Completud fuerte de* MSL*) Si* $\Gamma \vDash \varphi$ *entonces* $\Gamma \vdash \varphi$

Teorema 262 *(Completud débil de* MSL*) Si* $\vDash \varphi$ *entonces* $\vdash \varphi$

Teorema 263 *(Compacidad) Si* Γ *tiene un modelo, entonces cada subconjunto finito suyo también*

Teorema 264 *(Löwenheim-Skolem) Si* Γ *tiene un modelo, entonces tiene un modelo de universo numerable*

El esquema *argumental* es el que sigue:

Lindenbaum	$\left\{\begin{array}{l}\Gamma \text{ consist } \& \ LBR(\Gamma) \text{ finito} \Longrightarrow \\ \Gamma^* \text{ máx consist y ejempl } \Gamma \subseteq \Gamma^*\end{array}\right.$
Henkin	$\left\{\begin{array}{l}\Gamma^* \text{ máx consist y ejempl} \Longrightarrow \\ \Gamma^* \text{ tiene un modelo num.}\end{array}\right.$
Corolario	$\left\{\begin{array}{l}\Gamma \text{ consist } \& \ LBR(\Gamma) \text{ finito} \Longrightarrow \\ \Gamma \text{ tiene un modelo numerable.}\end{array}\right.$
Lema	$\left\{\begin{array}{l}\Gamma \text{ consist } \& \ \Delta \text{ modelo numerable} \\ \Gamma \subseteq \Delta \text{ constantes nuevas} \Longrightarrow \\ \Gamma \text{ tiene un modelo num.}\end{array}\right.$
Henkin	$\left\{\begin{array}{l}\Gamma \text{ consistente} \Longrightarrow \\ \Gamma \text{ tiene modelo num.}\end{array}\right.$
Completud fuerte	$\Gamma \vDash \varphi \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi$
Completud débil	$\vDash \varphi \Longrightarrow \vdash \varphi$
Compacidad	$\left\{\begin{array}{l}\Gamma \text{ tiene un modelo} \Longleftrightarrow \text{cada} \\ \text{subconjunto finito suyo también}\end{array}\right.$

7.6. Reducción de *MSL* a *FOL*

Para reducir la lógica multivariada a la de primer orden sin variedades es preciso definir una traducción sintáctica y una conversión de estructuras.

Sea L un lenguaje multivariado de signatura Σ y $OPER.SYM$ el conjunto de sus signos de operación. Vamos a definir un lenguaje de primer orden sin variedades L^* añadiendo un relator unario Q_i para cada $i \in SORT - \{0\}$. Las variables de L se consideran variables de L^*[7], su signatura es Σ^*.

De hecho, la traducción que definimos a continuación es la relativización de cuantificadores a los nuevos relatores.

Definición 265 *$TRANS$ es una función que asigna a las expresiones de L expresiones en L^*, su traducción. La definición se hará mediante inducción:*

1. *(E1) Para cada variable de variedad i*

$$TRANS(x_i) = x_i$$

2. *(E2) Para las expresiones $\varepsilon\ \tau_{i_1}...\tau_{i_n}$*

$$TRANS(f\ \tau_{i_1}...\tau_{i_n}) = fTRANS(\tau_{i_1})...TRANS(\tau_{i_n})$$
$$TRANS(R\tau_{i_1}...\tau_{i_n}) = RTRANS(\tau_{i_1})...TRANS(\tau_{i_n})$$

3. *(E3) Para fórmulas cuantificadas*

$$TRANS(\exists x_i \varphi) = \exists x_i (Q_i x_i \wedge TRANS(\varphi))$$

Definición 266 *(Conversión de estructuras). Sea*

$$\mathcal{A} = \langle \langle \mathbf{A}_i \rangle_{i \in SORT-\{0\}}, \langle f^{\mathcal{A}} \rangle_{f \in OPER.SYM} \rangle$$

una estructura multivariada de signatura Σ. Vamos a construir una multivariada $\mathcal{A}^*$ por el método de unificación de dominios. Definimos:

$$\mathcal{A}* = \langle \bigcup_{i \in SORT-\{0\}} \mathbf{A}_i,\ \langle f^{\mathcal{A}*} \rangle_{f \in OPER.SYM-\{\neg,\vee\}},\ \langle Q_i^{\mathcal{A}*} \rangle_{i \in SORT-\{0\}} \rangle$$

donde

1. *El universo de $\mathcal{A}^*$ es la unión de los de $\mathcal{A}$*

2. *Para cada $f \in OPER.SYM$ con $FUNC(f) = \langle i_0, i_1, ..., i_n \rangle$ y $i_0 \neq 0$, entonces $f^{\mathcal{A}^*}$ es una extensión de $f^{\mathcal{A}}$ tal que*

$$Dom(f^{\mathcal{A}^*}) = (\bigcup_{i \in SORT-\{0\}} \mathbf{A}_i)^n \quad y \quad f^{\mathcal{A}^*} \restriction (\mathbf{A}_{i_1} \times ... \times \mathbf{A}_{i_n}) = f^{\mathcal{A}}$$

   en donde los nuevos valores se eligen arbitrariamente. La única diferencia entre $f^{\mathcal{A}}$ y $f^{\mathcal{A}^*}$ es que el dominio de la segunda es considerablemente mayor que el de la primera y hay que especificar nuevas tuplas
   Para cada $R \in OPER.SYM$ tal que o bien $FUNC(R) = \langle 0,\ i_1, ..., i_n \rangle$ o bien $FUNC(R) = n$, se define

$$R^{\mathcal{A}^*} = \{\langle x_1, ..., x_n \rangle \in (A^*)^n / R^{\mathcal{A}}(x_1...x_n) = V\}$$

   —en particular, $E^{\mathcal{A}^*} = E^{\mathcal{A}}$ y cuando la estructura es normal, la relación es la identidad—

[7] Esto no sería posible si la cardinalidad del conjunto $SORT$ fuera superior a $\aleph_0$. En tal caso la definición precisa de la traducción sería algo más compleja, pero posible.

3. Cada $Q_i^{\mathcal{A}^*} = \mathbf{A}_i$

Se pueden demostrar los teoremas que siguen:

Teorema 267 *Sea* $\mathcal{A}$ *una estructura normal de signatura* Σ *y* L *un lenguaje adecuado. Para cada sentencia* φ *se cumple*

$$\mathcal{A} \text{ es un modelo de } \varphi \text{ syss } \mathcal{A}^* \text{ es un modelo de } TRANS(\varphi)$$

Demostración. *Sea* $\mathcal{A}$ *una estructura normal de signatura* Σ *y* $\mathcal{A}^*$ *la conseguida mediante unificación de dominios. Lo que haremos es una reformulación más general del teorema, del que éste se seguirá sin dificultad. En realidad lo que se demuestra es que para cada asignación* M *sobre* $\mathcal{A}$

$$\langle \mathcal{A}, M\rangle(\epsilon) = \langle \mathcal{A}*, M\rangle(TRANS(\epsilon))$$

para cada término o fórmula del lenguaje multivariado, ϵ ■

Una estructura sin variedades $\mathcal{B}$ de signatura Σ^* no es siempre convertible en una multivariada. Hay dos problemas que pueden bloquear el proceso:

1. Las relaciones $Q_i^{\mathcal{B}}$ correspondientes a los nuevos relatores Q_i —aquellos que no estaban en $OPER:SYM$— podrían ser conjuntos vacíos
2. Para cada $f \in OPER.SYM$, $f^{\mathcal{B}}$ es simplemente una operación sobre $\mathcal{B}$ y no hay ninguna razón para que los valores de $f^{\mathcal{B}} \restriction (Q_{i_1}^{\mathcal{B}} \times ... \times Q_{i_n}^{\mathcal{B}})$ estén todos en $Q_{i_0}^{\mathcal{B}}$

Lo que haremos es formular en el lenguaje de primer orden tres condiciones que al cumplirse permiten que sus modelos sean fácilmente convertibles a sistemas multivariados. El conjunto Π lo constituyen todas las fórmulas de las siguientes formas:

1. $\exists x\, Q_i x$, para cada $i \in SORT - \{0\}$
2. $\forall x_1...x_n(Q_{i_1}x_1 \wedge ... \wedge Q_{i_n}x_n \rightarrow Q_{i_0} f\, x_1...x_n)$, donde $FUNC(f) = \langle i_0, i_1, ..., i_n\rangle$, $f \in OPER.SYM$
3. $Q_i c$, para cada $c \in OPER.SYM$ con $FUNC(c) = \langle i \rangle$

De manera que ahora un modelo $\mathcal{B}$ de Π se convierte fácilmente en una estructura multivariada $\mathcal{B}^{\blacktriangledown}$

Definición 268 *Sea* $\mathcal{B}$ *un modelo univariado de* Π *se define*

$$\mathcal{B}^{\blacktriangledown} = \langle \langle \mathbf{B}_i^{\blacktriangledown}\rangle_{i \in SORT}\ ,\ \langle f^{\mathcal{B}^{\blacktriangledown}}\rangle_{f \in OPER.SYM}\rangle$$

donde:

1. Para cada $i \in SORT - \{0\}$, $\mathbf{B}_i^{\blacktriangledown} = Q_i^{\mathcal{B}}$ *y* $\mathbf{B}_0^{\blacktriangledown} = \{V, F\}$

2. *Para cada* $f \in OPER.SYM$ *con* $FUNC(f) = \langle i_0, i_1, ..., i_n \rangle$

$$f^{\mathcal{B}^\blacktriangledown} = f^{\mathcal{B}} \upharpoonright (Q_{i_1}^{\mathcal{B}} \times ... \times Q_{i_n}^{\mathcal{B}})$$

3. *Para cada* $f \in OPER.SYM$ *con* $FUNC(f) = \langle i \rangle$

$$f^{\mathcal{B}^\blacktriangledown} = f^{\mathcal{B}}$$

4. *Para cada* $R \in OPER.SYM$ *tal que* $FUNC(R) = \langle 0, i_1, ..., i_m \rangle$ *y cada* $\mathbf{x}_1 \in Q_1^{\mathcal{B}}, ..., \mathbf{x}_m \in Q_m^{\mathcal{B}}$

$$R^{\mathcal{B}^\blacktriangledown}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m) = V \quad syss \quad \langle \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \rangle \in R^{\mathcal{B}}$$

5. *Para cada* $R \in OPER.SYM$ *tal que* $FUNC(R) = m$ *y cada*

$$\mathbf{x}_1 \in \bigcup_{i \in SORT-\{0\}} Q_i^{\mathcal{B}}, ..., \mathbf{x}_m \in \bigcup_{i \in SORT-\{0\}} Q_i^{\mathcal{B}}$$

se cumple

$$R^{\mathcal{B}^\blacktriangledown}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m) = V \quad syss \quad \langle \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \rangle \in R^{\mathcal{B}}$$

Teorema 269 *Si* $\mathcal{B}$ *es una estructura univariada que es modelo de* Π*, entonces* $\mathcal{B}^\blacktriangledown$ *es una estructura multivariada. Además, para cada sentencia multivariada* φ *se cumple*

$$\mathcal{B}^\blacktriangledown \Vdash \varphi \quad syss \quad \mathcal{B} \Vdash TRANS(\varphi)$$

Demostración. *Sea* $\mathcal{B}$ *un modelo de* Π*. Queremos demostrar que* $\mathcal{B}^\blacktriangledown$ *es una estructura multivariada. De hecho:*

1. $\langle B_i^\blacktriangledown \rangle_{i \in SORT}$ *es una familia de conjuntos no vacíos.*
   (Se sigue de que $\exists x Q_i x \in \Pi$*)*

2. $\langle f^{\mathcal{B}^\blacktriangledown} \rangle_{f \in OPER.SYM}$ *es una familia de funciones. Veámoslo:*
   Cuando $RANK(f) = \langle i_0, ..., i_n \rangle$ *con* $i_0 \neq 0$*, entonces, por definición de* $\mathcal{B}^\blacktriangledown$ *restringimos el dominio de la función al nuevo dominio estratificado. Puesto que* $\mathcal{B}$ *es modelo de*

$$\forall x_1 ... x_n (Q_{i_1} x_1 \wedge ... \wedge Q_{i_n} x_n \rightarrow Q_{i_0} f \ x_1 ... x_n)$$

   los valores de la función $f^{\mathcal{B}^\blacktriangledown}$ *están en* $Q_{i_0}^{\mathcal{B}}$
   Cuando $FUNC(f) = \langle 0, i_1, ..., i_n \rangle$ *o cuando es una constante individual o un conector, las definiciones pertinentes, junto a los axiomas de la forma* $Q_i c$ *hacen que la estructura cumpla los requisitos necesarios para la conversión.*
   El enunciado que se demuestra ahora mediante una sencilla prueba por inducción es el siguiente:
   Para cada asignación multivariada M *se cumple:*

$$\langle \mathcal{B}^\blacktriangledown, M \rangle (\epsilon) = \langle \mathcal{B}, M \rangle (\mathbf{TRANS}(\epsilon))$$

   Por consiguiente, $\mathcal{B}^\blacktriangledown \Vdash \varphi$ *syss* $\mathcal{B} \Vdash TRANS(\varphi)$

■

Teorema 270 *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq SENT(L)$*. Se verifica lo siguiente:*

$$\begin{array}{rcl} \Gamma & \models & \varphi \text{ en lógica multivariada} \\ \text{syss } \Pi \cup TRANS(\Gamma) & \models & TRANS(\varphi) \text{ en univariada} \end{array}$$

—donde $TRANS(\Gamma) = \{TRANS(\psi)/\ \psi \in \Gamma\}$*—*
Demostración. $[\Rightarrow]$ *Sea* $\mathcal{B}$ *una estructura univariada de* $\Pi \cup TRANS(\Gamma)$*. Entonces* $\mathcal{B}^{\blacktriangledown}$ *es un modelo multivariado de* Γ*. Puesto que la hipótesis es que* $\Gamma \models \varphi$*,* $\mathcal{B}^{\blacktriangledown}$ *es también modelo de* φ*. Así que* $\mathcal{B}$ *es modelo de* $TRANS(\varphi)$
$[\Leftarrow]$ *Sea* $\mathcal{A}$ *un modelo multivariado de* Γ*. Se vé claramente que* $\mathcal{A}^*$ *es un modelo univariado de* Π *y por lo tanto de* $TRANS(\Gamma)$*. Puesto que nuestra hipótesis es que*

$$\Pi \cup TRANS(\Gamma) \models TRANS(\varphi)$$

se sigue que $\mathcal{A}^*$ *es un modelo de* $TRANS(\varphi)$*. Por lo tanto,* $\mathcal{A}$ *es un modelo de* φ*.* ■

El teorema anterior nos permite inferir los tres teoremas siguientes de sus homónimos de la lógica de primer orden sin variedades: compacidad, enumerabilidad y Löwenheim-Skolem[8]. Pero nosotros ya los hemos demostrado directamente para la multivariada, así que en nuestro caso ha sido más un ejercicio de fidelidad histórica que de necesidad de obtener los resultados.

En el capítulo 13 realizamos la traducción inversa, de otras lógicas a la multivariada, y veremos cómo transferir propiedades del cálculo *MSL* a otros.

7.7. Implementaciones informáticas

Los siguientes proyectos de informática se hicieron bajo mi dirección, están disponibles en

$$http://aracne.usal.es$$

en donde se explican con detenimiento.

Todos ellos automatizan la traducción de lógicas:

1. *Traductor de Lógicas: Modal a Multivariada.* 1999. Iván Marcos Poza.
2. *Traductor de Lógicas: Dinámica a Multivariada.* [2000]. María Iglesias Alonso.
3. *Traductor de Lógicas: Multivariada a Primer Orden sin variedades.* [1999]. José Escuadra Burrieza.
4. *Traductor de Lógicas: Modal de Primer Orden a Multivariada y Parcial.* [2001]. Raquel Caño Mateos.

[8] See Enderton [1972], pp. 281.

Bibliografía

[1] Barwise, J. y Feferman, S. [1985]. *Model-Theoretic Logics.* Springer-Verlag. Berlín.

[2] Bramer, M, ed. [1986]. *Expert Systems 86.* Cambridge University Press. Cambridge. U.K.

[3] Cohn, A. [1986]. *"Many-sorted logic = unsorted logic + control"* en [2].

[4] Ebbinghaus, H.D. [1985]. *"Extended logics: the general framework"* en [1].

[5] Enderton, H. B. [1972]. *A Mathematical Introduction to Logic.* New York: Academic Press.

[6] Feferman, S. [1967]. *"Lectures on proof theory".* En **Proceedings of the Summer School in Logic, Leeds, 1967.** Lecture Notes in Mathematics, vol 70. Springer-Verlag. Berlín.

[7] Feferman, S. [1974]. *"Application of many-sorted interpolation theorems,* En **Proceedings of the Tarski Symposium.** Proc. Symps. in Pure Math., vol. XXV, pp 205-223,. Amer. Math. Soc. Providence.

[8] Gogen, J.A. y Meseguer, J. [1985]. *"Completeness of many-sorted equational logic".* Journal of Logic Programming, vol 1 (3), 179-210.

[9] Hook, J.L. [1985]. *"A note on interpretation of many-sorted theories".* Journal of Symbolic Logic, vol 50 (2), 372-374.

[10] Huertas, A. [1993]. *"El tercer valor de verdad en la lógica modal de predicados". Actas I Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia.* Departamento de Reprografía de la UNED Madrid, pp. 80-83. Madrid.

[11] Huertas, A. [1994]. *Modal Logic and Non-Classical Logic,* tesis doctoral de la Universidad de Barcelona.

[12] Manzano, M. [1993]. *"Introduction to Many-sorted Logic"* en [12], páginas 1-86.

[13] Manzano, M. [1996]. *Extensions of first order logic***.** Number 19 in Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press. Cambridge. U.K.

[14] Markusz, Z. [1981]. *"Knowledge representation of design in many-sorted logic",* Proc. Seventh. Int. Conf. on A.I. IJCAI-81 (Vancouver). 264-269.

[15] Markusz, Z. [1983]. *On first order many sorted logic.* Parts I y II. Computer and Automation Institute, Hungarian Academy of Science, Budapest, Tmulmányok 151/1983.

[16] Meinke, K. y Tucker, V. [1993]. *Many-sorted logic and its applications.* John Wiley & Sons. Chichester. U.K.

[17] Walther, C. [1983]. *A many-sorted calculus based on resolution and paramodulation.* Pitman. Londres.

[18] Wang, H. [1952]. *"Logic of many-sorted theories".* JSL 17 (2). 105-16

[19] Zucker, J.I. [1978]. *"The adequacy problem for classical logic".* Journal of Philosophical Logic. vol 7. 517-535.