Capítulo 6

Lógica de cláusulas de Horn

6.1. Introducción

La lógica de las cláusulas de Horn es una parte de la lógica de primer orden. Fue definida por McKinsey [5] en 1943, cuando investigaba problemas de decidibilidad. Entre 1956 y 1970 Mal'tsev demostró que constituye el formalismo ideal para el álgebra universal. En 1970 se demostró que la teoría de la prueba de la lógica de las cláusulas de Horn era especialmente potente. En 1979 Kowalski [4] hizo notar que las sentencias de una teoría de cláusulas de Horn tienen una lectura bastante natural como instrucciones de un computador. Siguiendo dichas instrucciones el computador encuentra las pruebas de los teoremas de cualquier teoría así expresada.

Esta idea se ha usado con enorme éxito en programación lógica, tanto en *Prolog* como en *Datalog*.

6.2. Definición de fórmulas de Horn

El lenguaje es el de primer orden y la formación de fórmulas es la misma.

Definición 217 *Se llaman* ***hechos*** *a las fórmulas atómicas. Si son distintos de* $\perp$ *se llaman estrictas.*

Definición 218 *Se llaman* ***reglas*** *a las fórmulas de la forma*

$$\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n \to \beta$$

donde todas las fórmulas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *y* β *son atómicas (a* β *se le llama la cabeza y a las otras el cuerpo). Se puede decir que un hecho es un caso extremo de regla; cuando su cuerpo es* $\varnothing$.

Definición 219 *El conjunto de las* ***fórmulas básicas de Horn*** *es la unión de los anteriores.*

Definición 220 *Una fórmula básica de Horn es* ***estricta*** *si no contiene el signo para lo falso,* $\perp$

La fórmula

$$\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n \rightarrow \perp$$

no es estricta, equivale a

$$\neg\alpha_1 \vee ... \vee \neg\alpha_n$$

Una regla de Horn estricta equivale a

$$\neg\alpha_1 \vee ... \vee \neg\alpha_n \vee \beta$$

donde todas las fórmulas $\alpha_1, ..., \alpha_n$, y β son estrictas.

Definición 221 *Decimos que* $\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n$ *es una* ***fórmula de Horn sin cuantificadores****, si cada* γ_i *es una fórmula básica de Horn.*

Definición 222 *Decimos que* $Q\alpha$ *es una* ***fórmula de Horn****, si* Q *es una cadena de cuantificadores y* α *es una fórmula de Horn sin cuantificadores. Decimos que es* ***estricta*** *si no usa* $\perp$ *y que es una sentencia, si no contiene variables libres.*

Definición 223 *Una* ***teoría de Horn*** *es un conjunto de sentencias de Horn*

Ejemplo 224 *Para expresar "cada cadena de caracteres tiene una longitud, que es un número natural" podemos usar esta fórmula*

$$\forall x(cadena(x) \rightarrow \exists y(longitud(xy) \wedge n^o natural(y)))$$

que, aunque no es una sentencia de Horn, se reescribe así:

$$\forall x \exists y((cadena(x) \rightarrow longitud(xy)) \wedge (cadena(x) \rightarrow n^o natural(y)))$$

esta última es una sentencia de Horn estricta

Definición 225 *Una* ***sentencia de Horn universal*** *es una sentencia de Horn que sólo contiene cuantificadores universales.*

Puesto que la fórmula

$$\forall x(\alpha \wedge \beta)$$

es equivalente a

$$\forall x\alpha \wedge \forall x\beta$$

cada sentencia de Horn universal puede escribirse como conjunción de sentencias de la forma

$$\forall x_1...x_n\alpha$$

siendo α una fórmula básica

Definición 226 *Se llaman* ***cláusulas de Horn*** *a las fórmulas*

$$\forall x_1 ... x_n \alpha$$

Dependiendo de si la fórmula α *es un hecho o una regla, la cláusula también*

Definición 227 *Una* ***teoría de cláusulas de Horn*** *es un conjunto de sentencias que tienen esta forma*

$$\forall x_1 ... x_k \beta(x_V ... x_k)$$

$$\forall x_1 ... x_k (a_1(x_1 ... x_k) \wedge ... \wedge a_n(x_1 ... x_k) \to \beta(x_1 ... x_k))$$

6.3. Importancia de estas fórmulas

¿Hay alguna razón que explique porqué la lógica de las cláusulas de Horn es tan útil y sus propiedades tan interesantes?

Hodges responde a esta pregunta así:

Cláusulas de Horn e inducción

Las cláusulas de Horn permiten construir conjuntos inductivamente

Ejemplo 228 *Esta es una teoría de cláusulas de Horn*

$$par(0)$$

$$\forall x(par(x) \to impar(siguiente(x)))$$

$$\forall x(impar(x) \to par(siguiente(x)))$$

Esta teoría sirve para formar inductivamente dos conjuntos: el de los pares y el de los impares. Este ejemplo es típico: los hechos de Horn nos dicen qué elementos debemos poner en el conjunto al empezar, las reglas de Horn nos dicen que otros elementos debemos ir añadiendo, en función de los que ya tengamos en ese momento.

Ejemplo 229 *Imaginad una base de datos que almacena la información de la red de autobuses: cómo llegar de una ciudad española a otra utilizando este transporte*

$$\forall x \; enlazada(x, x)$$

$$enlace \; directo(Salamanca, Madrid)$$

$$enlace \; directo(Barcelona, Salamanca)$$

$$\vdots$$

$$\forall xy \; (enlazada(x, y) \to enlazada(y, x))$$

$$\forall xyz \; (enlazada(x, y) \wedge enlace \; directo(y, z) \to enlazada(x, z))$$

De esta forma conseguimos los pares de ciudades que están enlazadas mediante autobús, tanto si es directo, como con transbordo.

Subteoría de hechos atómicos

Dada una teoría T cualquiera de cláusulas de Horn, existe un único conjunto S (es el menor de los que existen) formado exclusivamente por hechos atómicos, que deben ser verdaderos para que lo sean las fórmulas de T. Los hechos atómicos de S son descripciones de los conjuntos y relaciones definidos mediante T. En el ejemplo de los autobuses, el conjunto S contiene estas sentencias

$$enlace\ directo(Salamanca, \acute{A}vila)$$

$$enlace\ directo(Zamora, Salamanca)$$

$$\vdots$$

En el ejemplo de los pares y los impares el conjunto es infinito.

Esta propiedad de poseer una subteoría atómica con tan buenas prestaciones no la tiene cualquier teoría lógica; basta pensar en cualquiera que contenga esta fórmula

$$p \vee q$$

Elementos de S

El conjunto S (que define el modelo inicial de la teoría T) está formado por las fórmulas atómicas que se deducen a partir de T.

Debido a esta condición y a la mencionada en el apartado anterior, las diferencias entre verdad y demostrabilidad para cláusulas de Horn no es tan clara como en el resto de la lógica de primer orden. Ello permite una simplificación de la metateoría y abre ciertos debates tales como si una *Base de Tipos* es una teoría (un conjunto de sentencias) o un álgebra (un modelo)

Procedimiento de prueba

Se puede demostrar que una sentencia dada está en S siguiendo el procedimiento mediante el cual se definen los conjuntos en la teoría T.

6.4. Niveles de estudio

El conjunto S puede estudiarse a tres niveles diferentes. En el inferior, se analiza su construcción; esto nos lleva a la semántica del punto fijo del Prolog (Emden-Kowalsky). En el segundo se observan los itinerarios de prueba; nos conduce a la definición de un cálculo específico para cláusulas de Horn, directamente emparentado con la metateoría. Finalmente, se describe la colección completa de todas las pruebas y se examina el modo de encontrar entre ellas una concreta, la de un *hecho* preciso. Al traducir estas pruebas *simples* en pruebas mediante resolución nos encontramos cómodamente instalados en la programación lógica.

6.5. Usos destacados

Como se sugirió en el apartado 6.3, las cláusulas de Horn aparecen cuando se selecciona a los elementos de un conjunto mediante la aplicación de reglas. Por ejemplo, el conjunto de las oraciones de una gramática (de una lengua natural cualquiera, pero que posea estructura de frases) se obtiene al aplicar las reglas a un *léxico básico.* Se puede escribir el léxico básico como un conjunto de *hechos* y las reglas como *cláusulas* de Horn. (No es una casualidad el hecho de que el creador del Prolog, Alain Colmenauer, fuera un investigador de lingüística computacional.)

El resultado apunta a otro mucho más general: todo conjunto recursivamente enumerable puede ser definido mediante una teoría de cláusulas de Horn.

Puesto que el conjunto de los teoremas lógicos de la lógica de primer orden es recursivamente enumerable, la lógica de cláusulas de Horn puede servir para simular toda la lógica de primer orden. Siendo esto así resulta que el problema de la decisión para la lógica de primer orden y para su subteoría de cláusulas de Horn es de la misma *complejidad computacional.*

Sin embargo, hay ciertos conjuntos de sentencias de Horn que, desde el punto de vista de la teoría de la decidibilidad, se comportan mucho mejor que sus sentencias asociadas de primer orden.

La lógica ecuacional es un caso particular de cláusulas: las identidades son *hechos* de Horn y los axiomas de sustitución son *leyes de Horn.* Justamente aquí es donde se establece el vínculo entre el álgebra universal y nuestras cláusulas. Las reglas de reescritura son las que mayormente se utilizan en la lógica ecuacional; en nuestra lógica se añaden a éstas las proposicionales.

6.6. Conversión

En el ejercicio 224 vimos que aún cuando las sentencias de primer orden no sean de Horn, algunas de sus equivalentes podrían serlo.

¿Cómo sabemos cuando se puede reescribir una sentencia de primer orden dada en una de Horn y cuando no?

A veces la conversión no es tan inmediata, requiriendo un cambio de lenguaje.

Ejemplo 230 *Aunque esta fórmula no es de Horn*

$$\forall x(p(x) \to \exists y(y = g(x) \land r(y)) \lor q(x))$$

es lógicamente equivalente a esta otra

$$\forall x \exists y(((y \neq g(x) \land \neg q(x)) \to \neg p(x)) \land ((\neg r(y) \land \neg q(x)) \to \neg p(x)))$$

que aunque tampoco lo es, se convierte al cambiar $\neg p, \neg q$ *y* $\neg r$ *por* $\widetilde{p}, \widetilde{q}$ *y* $\widetilde{r}$ *e introducir* $D(x, y)$ *por* $x \neq y$*. El resultado es la fórmula*

$$\forall x \exists y(((D(y, g(x)) \land \widetilde{q}(x)) \to \widetilde{p}(x)) \land ((\widetilde{r}(y) \land \widetilde{q}(x)) \to \widetilde{p}(x)))$$

A este procedimiento se le denomina *renombrado* y a la función correspondiente *función de renombrado.*

No siempre se puede convertir un conjunto de sentencias en sentencias de Horn mediante este procedimiento.

Ejemplo 231 *Este conjunto* $\left\{\begin{array}{c} \forall x(p(x) \vee q(x) \vee r(x)), \\ \forall x(p(x) \vee \neg q(x) \vee \neg r(x)), \\ \forall x(\neg p(x) \vee q(x) \vee \neg r(x)), \\ \forall x(\neg p(x) \vee \neg q(x) \vee r(x)) \end{array}\right\}$ *no es convertible.*

La respuesta a la pregunta planteada sobre si hay un procedimiento general para determinar convertibilidad nos la proporciona el siguiente teorema.

Teorema 232 *(Lewis 1978). Sea* T *un conjunto de cláusulas* $\gamma_V, ..., \gamma_m$ *donde cada* γ_i *es de la forma*

$$\forall \overline{x}(\alpha_{V,h} \vee ... \vee \alpha_{k_h,h})$$

Sea T^{Lewis} *la teoría formada por todas las sentencias de la forma*

$$\forall \overline{x}(\alpha_{i,h} \vee ... \vee \alpha_{j,h})$$

donde $V \leq h \leq m$ *y* $V \leq i \leq j \leq k_h$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe una función de renombrado que convierte* T *en un conjunto de cláusulas de Horn*

2. *La Teoría* T^{Lewis} *es consistente.*

6.7. El cálculo simple de Horn

Por supuesto, cualquier cálculo de primer orden serviría, pero éste refleja mejor el comportamiento de las cláusulas de Horn.

Definición 233 *Una* T***-inferencia*** *es un diagrama de sentencias de la forma*

$$\frac{\alpha_1(\overline{\mu})...\alpha_n(\overline{\mu})}{\beta(\overline{\mu})}$$

siendo

$$\forall \overline{x}(\alpha_1(\overline{x}) \wedge ... \wedge \alpha_n(\overline{x}) \rightarrow \beta(\overline{x}))$$

una sentencia de T *y* $\overline{\mu}$ *una secuencia de términos cerrados. Cuando* $n = 0$ *tenemos*

$$\overline{\beta(\overline{\mu})}$$

siendo

$$\forall \overline{x}\beta(\overline{x})$$

un hecho.

Definición 234 *Una $T-$**prueba** de una sentencia atómica γ a partir de una teoría de cláusulas de Horn T se define como un árbol formado por $T-$inferencias que cumple:*

1. *Las $T-$inferencias de inicio no tienen premisas (provienen de hechos)*

2. *γ es la sentencia final*

3. *$\perp$ no ocurre jamás en el árbol, excepto, tal vez, al final.*

Ejemplo 235 *Sea* $T = \left\{ \begin{array}{c} \forall x p(x) \\ \forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \\ \forall x(p(x) \wedge q(x) \rightarrow r(x)) \\ \forall x(r(f(x)) \rightarrow \perp) \\ r(c) \end{array} \right\}$ *la deducción es así:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p(f(c)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p(f(c)}}{q(f(c))}}{r(f(c))}}{\perp}$$

Notación 236 *En el caso anterior decimos que $\perp$ es deducible de T en el cálculo simple de Horn y usamos esta notación*

$$T \vdash_{simple} \perp$$

6.8. Modelo inicial

Cuando una teoría de cláusulas de Horn es sintácticamente consistente, tiene modelos muy simples; en particular tiene un modelo inicial, $\Im$

Definición 237 *Sea T una teoría de cláusulas de Horn y $\Im$ un modelo. Decimos que $\Im$ es un* **modelo inicial** *de T si se verifica lo siguiente:*

1. *Cada elemento del universo de $\Im$ tiene esta forma $\mu^{\Im}$ (es la denotación de un término cerrado)*

2. *Para cada sentencia atómica se cumple:*

$$\Im \vDash \alpha \quad syss \quad T \vdash_{simple} \alpha$$

3. *$\Im$ es un modelo de T*

Usos de los modelos iniciales

Una de las aplicaciones de los modelos iniciales es de índole psicológica. En deducción automática es importante subrayar la relación lógica entre fórmulas. De manera natural tratamos de usar el significado de la fórmula. Es difícil comprender cómo se puede usar el significado de una fórmula sin dar un modelo de ella; una interpretación semántica. Éste es justamente el problema: lo normal es que las relaciones lógicas entre fórmulas no sean privativas de un modelo, de una interpretación particular, sino de todas en conjunto. $\Gamma \vDash \alpha$ significa que todas las interpretaciones que son modelo de Γ lo son también de α. Toda teoría de cláusulas de Horn sintácticamente consistente tiene la siguiente propiedad: ser deducible a partir de Γ equivale a ser verdadera en el modelo inicial: Por lo tanto podemos asociar la deducibilidad a partir de Γ con la verdad en su modelo inicial.

Con todos los reparos hacia el *psicologicismo* es interesante señalar las tesis de Johnson-Laird y Byrne; según ellos cuando las personas normales deducen algo lo que hacen es representarse modelos esquemáticos de las premisas y examinarlos. La dificultad de una deducción (medida en el tiempo que se tarda en hacerla o en la cantidad de gente que se equivoca) está directamente relacionada con la cantidad de modelos que deben ser examinados: Si ello es cierto, deducir sentencias atómicas a partir de cláusulas de Horn es especialmente sencillo ya que basta con examinar un modelo.

Estos autores analizan veintisiete silogismos y los ordenan por su dificultad (estadística de los que se equivocan al hacerlo). De entre ellos destacan seis, que son básicamente razonamientos con cláusulas de Horn, y que se encuentran entre los nueve más fáciles de todo el bloque.

6.9. Codificación de la lógica de primer orden

¿Cual es la relación existente entre la lógica de primer orden y la de las cláusulas de Horn?

Hemos visto que no todas las teorías son de Horn, ni convertibles en ellas mediante alguna función de renombrado (teorema 232). Sin embargo, puesto que todo conjunto recursivamente enumerable puede ser definido mediante una teoría de cláusulas de Horn, parece que hay esperanzas de poder usar esta teoría incluso para determinar validez. De hecho, hay dos casos en los que la suerte nos acompaña:

1. La pregunta de si una sentencia cualquiera de primer orden es lógicamente válida puede convertirse en la pregunta sobre la inconsistencia de una cláusula de Horn asociada a ella.

2. Para cada teoría de primer orden existe una teoría de cláusulas de Horn que tiene los mismos modelos (o “casi”)

Bibliografía

[1] Gabbay, D., Hogger, C.J. y Robinson, J. A. eds [1996]. Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. vol 1. Oxford University Press, Oxford.

[2] Hodges, W. [1996] *"Logical features of Horn clauses".* En [1].

[3] Horn, A. [1951]. *"On sentences which are true of direct unions of algebras".* Journal of Symbolic Logic, 16, 14-21.

[4] Kowalsky, R. [1979]. *Logic for problem solving.* North Holland. Amsterdam.

[5] McKenzie, J. C. C. [1943]. *"The decision problem for some classes of sentences without quantifiers".* Journal of Symbolic Logic, 8, 61-76.

[6] Smullyan, R. [1956] *"On definability by recursion".* Bulletin of the American Mathematical Society, pp 601.

[7] Dellunde, P. [1996]. *Contributions to the model theory of equality-free logic.* Tesis doctoral, Barcelona.