

Capítulo 17

Recapitulemos

17.1. Fundamentos (*Lógica*)

Hemos estudiado la lógica clásica en la primera parte de este libro; esto es, en los cinco primeros capítulos. Allí vimos los fundamentos de la disciplina tal y como se desarrolló bajo la presión de las necesidades de la matemática, con el énfasis puesto en la justificación del razonamiento atemporal y estático propio de este área del saber. Se sentaron las bases del resto de las ramas de la *Summa Logicae*, tanto de los desarrollos clásicos, como de las diversas alternativas y extensiones, que comparten cuanto menos el espíritu de rigor y precisión¹ que se fraguó en ese ámbito. Introdujimos la lógica matemática en sus diversas ramas de *teoría de modelos*, *de la recursión* y *de la prueba*, así como la *teoría de conjuntos*. Por supuesto, se pretendía presentar los resultados de manera crítica, comentada, como corresponde al espíritu filosófico de nuestra Área de conocimiento², pero hemos aprovechado el espacio para hacer hincapié tanto en los aspectos que pudieran interesar a un filósofo de la matemática, como a un informático, o a un estudioso de la Inteligencia Artificial. Por ejemplo, en el capítulo 5 dedicado a la teoría de conjuntos no nos hemos contentado con enumerar sus axiomas y algunas de sus consecuencias, sino que hemos seguido el ejercicio abductivo, cuasi detectivesco de Devlin y los hemos justificado por servir de andamiaje imprescindible en la construcción de la jerarquía de Zermelo, que es a mi juicio la imagen más satisfactoria intuitivamente del universo matemático.

Los cálculos deductivos que hemos desarrollado con más detalle son los que mejor se *implementan* y que por consiguiente despiertan un interés mayor en la comunidad informática; a saber, los de tableaux y de resolución, así como el de cláusulas de Horn. Para servir a los intereses de la *I.A.* se ha puesto énfasis en el planteamiento de los razonamientos expresados en lenguaje natural

¹Mi tesis es que comparten algo más, que encierran a la *logicidad*, según veremos al final de este capítulo.

²*Lógica y Filosofía de la Ciencia.*

y en la búsqueda de soluciones en un árbol formado sólo de hipótesis. A su vez el concepto de computabilidad se ha estudiado ligado al concepto intuitivo de *procedimiento efectivo*.

17.2. Sistemas Lógicos (*Lógicas*)

En la segunda parte hemos seleccionado de entre la enorme variedad de sistemas lógicos existentes a seis, cinco de ellos extienden a la lógica clásica y el de cláusulas de Horn es una subteoría, tratándose en todos los casos de lógicas que tienen aplicaciones en filosofía, informática, matemáticas, lingüística e inteligencia artificial.

Hemos presentado con cierto detalle la lógica de segundo orden y la teoría de tipos —en los capítulos 10 y 11— que interesan al filósofo porque explicitan la tensión existente entre lo que sabemos y lo que podemos probar, y lo sensible que es la lógica superior a los supuestos ontológicos de la teoría de conjuntos subyacente. La interdependencia de la capacidad expresiva respecto de la deductiva quedó gráficamente fijada con el teorema de incompletud de la lógica estándar de segundo orden, o con la recuperación de la completud al admitir modelos no estándar. Viendo que el razonamiento de orden superior queda plasmado con naturalidad en la semántica de modelos no estándar, se fortalece la intuición de que en *SOL* con semántica estándar muchos de los resultados a ella atribuidos nada tienen que ver con la naturaleza del razonamiento efectuado, sino con su abigarrado envoltorio de teoría de conjuntos. La inspiración de la conversión de otras lógicas a la multivariada parte de la prueba de completud de la lógica superior con modelos generales y así lo expliqué en su momento, en la página 343.

Dejadme citarme a mí misma³:

Further motivation for using general models may be found in van Benthem's recent essay "*The sources of complexity*", where the author considers that with general semantics

"...we achieve a moral rarity, being a combination of philosophical virtue with computational advantage,..."

In fact, when considering the arguments used in the second chapter of this book, one can argue that the standard semantics is not logically adequate in the sense that it does not allow all logically possible interpretations of second order formulas as models because of the argument posed by Némethi in the following form:

"We have to be placed in a set-theoretical universe, even assuming that there could be more than one such. Nevertheless, in the set theoretical universe you choose to be in, the GCH is either true or false.

³En la página XVI del prefacio de mi libro *Extensions of First Order Logic*.

Assume it is true. Then, in every standard model for SOL the SOL formula φ expressing this hypothesis is true and so φ is valid. But since GCH is not derivable from ZFC, the result suggest that an interpretation \mathfrak{S} such that $\mathfrak{S} \not\models \varphi$ can not be excluded as 'logically impossible'. So, at least one \mathfrak{S} with $\mathfrak{S} \models \neg\varphi$ is a logical possibility (by Paul Cohen's classical result). But such a model is not allowed in the standard semantics. So, we feel that the standard semantics does not include all logically possible worlds as models (we have to think about formulas, like GCH, which are both expressible in second order logic and independent from Zermelo-Fraenkel set theory). This argument is reinforced by the fact that there is an inexhaustible supply of independent formulas like GCH. In Henkin's general semantics many possibilities are restored as possible models; for instance, models with or without the GCH."

As you will see, the general model strategy is also used in modal logic and dynamic logic. Both logics are faithfully represented by many-sorted theories with a comprehension schema restricted to a definable subclass of many-sorted formulas.

17.3. Tratamientos unificadores (*Logicidad*)

Intentaré sintetizar mi punto de vista. Para poder comparar sistemas lógicos es preciso saber qué son, ello nos conduce a una disyuntiva que se concreta en dos programas de investigación, posiblemente convergentes:

1. Ver qué problemas intentaban resolver con la esperanza de que la "*logicidad*" se oculte allí⁴; Este proyecto se retroalimenta ya que conlleva, además de la reflexión sobre el concepto de lógica, la investigación de aquellas áreas de estudio emergentes del análisis que estén necesitadas de lógicas que las comprendan y expresen de forma natural, relevante, explicitando mediante reglas de la lógica sus raíces empíricas, pero exigiendo al producto no sólo coherencia interna —consistencia— sino todo el rigor metodológico y la precisión matemática al que la lógica nos tiene acostumbrados. Por su propia naturaleza, este ambicioso proyecto se puede poner en marcha, pero no efectuar su balance ahora, por lo que en el presente trabajo no entra en consideración.
2. Pasando por alto el hacer previamente la definición comprensiva del concepto, usamos como criterio demarcador el meramente extensional, —obtenido de la colección de *Handbooks*— y tomamos una definición conceptual provisional, como herramienta de trabajo. Analizamos qué posibilidades tenemos para comparar lógicas, considerando de interés los siguientes criterios:

⁴Bajando la escalera, junto al *Aleph* de Borges.

- a) Propiedades matemáticas de la relación de consecuencia
- b) Equilibrio entre potencia expresiva y deductiva
- c) Recursos matemáticos precisos para su desarrollo
- d) Traducibilidad a un marco común

Así traducidas la comparación será sencillamente entre teorías de una misma lógica. El propio concepto de traducción y de lógica marco tiene que ser esclarecido; hemos optado por una traducción que permita que haya una correspondencia entre todos los componentes de las lógicas —modelos y cálculo— y hemos elegido a la lógica multivariada como marco.

Reducción de otras lógicas a la multivariada

El planteamiento está inspirado en la prueba de Henkin de completud de la teoría de tipos. Convertimos los modelos de la lógica en estudio XL en modelos extendidos en cuyos universos aparecen explícitamente todos los constructos definibles con las expresiones de XL . Para axiomatizar esta nueva clase de estructuras usamos la lógica multivariada, de la misma forma que en la prueba de completud mencionada. El *espíritu* de la correspondencia que se establece es *semántico*.

El programa se desarrolla a tres niveles, o etapas; en el primero nos detenemos en la mera representación de la verdad en la lógica en estudio como verdad de su traducción en estructuras multivariadas, módulo una cierta teoría cuya definición constituye una parte importante del programa de reducción; en el segundo la equivalencia se extiende al concepto de consecuencia a partir de conjuntos cualesquiera de hipótesis; en el tercero se demuestra la equivalencia del cálculo de la lógica en estudio con la teoría multivariada que la simula. Pese a su inspiración semántica, ya desde el primer nivel —incluso si la lógica XL careciera de cálculo—, podemos usar el cálculo multivariado para demostrar las fórmulas válidas de la lógica en estudio. La razón es que a partir del *teorema de representación* se demuestra fácilmente el *teorema de enumerabilidad* para la lógica XL . Por lo tanto, sabemos que podremos diseñar un cálculo para XL , pero también sabemos que en MSL podemos simular ese cálculo e incluso usar un *demostrador* de teoremas de MSL .

Así que, aunque la reducción se hubiera detenido en este nivel, los resultados desde un punto de vista práctico serían impresionantes.

Cuando la correspondencia supera también los niveles segundo y tercero obtenemos como subproducto los *teoremas de compacidad*, *Löwenheim-Skolem* y *completud* para la lógica XL .

En suma: Pretendemos una unificación del “*lenguaje máquina*” y realizar en él todos los cómputos que en otro caso se harían en una multiplicidad de sistemas, y arrastrar las metapropiedades de la lógica multivariada a los sistemas lógicos en estudio. Sin embargo, mantenemos los diversos lenguajes como “*lenguaje de usuario*” por ser más naturales y adaptarse mejor a sus respectivos ámbitos de estudio.

Otros planteamientos unificadores

Hemos estudiado otros planteamientos unificadores; a saber, el de las lógicas generales —en el capítulo 15— y el de los sistemas deductivos etiquetados —en el capítulo 16.

1. El análisis llevado a término en el primer caso es *supraestructural*, lo que quiere decir que se sitúa a un nivel de abstracción muy elevado. No nos extraña: la lógica subyacente es aquí la *teoría de la categorías*, que ocupa un nivel de abstracción superior al de la *teoría de modelos* que, a su vez, olvida la naturaleza de los objetos de la “*realidad matemática*” inmediata —números naturales, reales, etc.— y estudia las relaciones entre ellos. Una conceptualización de este tipo es matemáticamente muy poderosa, pero necesariamente más alejada del significado de las fórmulas.
2. En el segundo caso la maquinaria que se pone en funcionamiento es fundamentalmente sintáctica y a ella revierte la semántica. Se trata igualmente de una herramienta muy poderosa y de aplicabilidad en sistemas extraordinariamente diversos.

No deja de ser curioso que tanto cuando se utilizan en la traducción criterios *semánticos*, como cuando son *supraestructurales* o *sintácticos* el resultado obtenido sea el mismo.

¿No será que la “logicidad” equivale a la traducibilidad a lógica clásica?