

Capítulo 15

Lógicas Generales

15.1. Introducción

La teoría de las lógicas generales [7] es un estudio axiomático de los diferentes elementos de una lógica y de las relaciones entre diferentes lógicas; en particular, su relación de consecuencia sintáctica —integrada en el denominado *sistema implicativo*—, su cálculo y su aparato semántico —este último, se estudia bajo la noción de *institución*.

La idea más interesante, extraída de la teoría de categorías, es que las propiedades más fecundas de un sistema lógico o de una estructura matemática no residen en ellos mismos, sino en su interrelación con sistemas o estructuras similares. Por ejemplo, se estudia mejor la teoría de grupos partiendo del hecho de que ellos y sus homomorfismos constituyen una *categoría*. Este punto de vista se adopta también en la teoría de las lógicas generales, en donde se considera que la consecuencia sintáctica, el cálculo deductivo y las denominadas *instituciones* son estructuras semejantes a los grupos del ejemplo y se establecen entre ellas correspondencias (*mapas*) capaces de preservar su estructura. Así que el punto fuerte de estas lógicas generales reside en definir adecuadamente las correspondencias entre ellas de tal manera que los *mapas* entre sistemas implicativos preserven la relación de consecuencia sintáctica, los establecidos entre los cálculos dejen fija lo anterior y las propias pruebas y los que se definen entre instituciones conserven la relación semántica de satisfacibilidad.

En consonancia con esta *filosofía*, una lógica marco \mathfrak{F} será aquella capaz de representar a muchas otras y ello se concreta en el establecimiento de mapas de las lógicas en estudio a \mathfrak{F} .

En el capítulo 13 propuse una correspondencia entre lógicas basada en una traducción de fórmulas y una conversión de estructuras, pues al utilizar la lógica multivariada como marco en donde situar las lógicas en estudio se pueden economizar recursos; esto es, con frecuencia se pueden arrastrar resultados desde la multivariada a la lógica en estudio. Uno de los casos allí tratados es el de la lógica modal $S4$.

Así que tanto en la teoría de las lógicas generales, como en la teoría de la correspondencia —esto es, la corriente traduccionista a la que me ascribo— se persigue una reducción operativa. El trabajo que publiqué con Manuel Clavel [3] supone un primer esfuerzo hacia la construcción de un puente entre sendos planteamientos, que permita la comunicación de resultados ya establecidos en ambas direcciones. En la sección 15.2 se recogen las nociones relevantes para nuestro trabajo de la teoría de lógicas generales; en la 15.3 se define el aparato semántico de la lógica modal $S4$ como una institución; por último, en el apartado 15.4 se define el *mapa* de instituciones entre $S4$ y la lógica multivariada (o heterogénea), y proponemos una ampliación de las condiciones para establecer un *mapa* de instituciones tal que permita obtener un teorema de representación —lo hacemos en 15.4.1—.

15.2. Lógicas Generales

Estos son los componentes básicos de las lógicas generales:

Sintaxis

Para presentar un lenguaje se proporciona su *signatura* Σ y las reglas de formación de fórmulas. Para cada lógica hay una categoría *Sign* de sus posibles *signaturas* y un functor *sen* que a cada *signatura* Σ le asigna el conjunto de sus fórmulas, $sen(\Sigma)$

Sistemas implicativos

Dada una *signatura* Σ en *Sign* la derivabilidad de una *sentencia* $\alpha \in sen(\Sigma)$ a partir de un conjunto $\Gamma \subseteq sen(\Sigma)$ es una relación binaria que normalmente indicamos así:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

y que se establece siempre que a partir de los axiomas de Γ se siga α usando las reglas de la lógica en estudio —se dice que Γ *implica* α —

Formalmente se define un sistema implicativo como una tripla ordenada

$$\mathcal{E} = \langle Sign, sen, \vdash \rangle$$

La relación \vdash cumple reflexividad, monotonía y transitividad (corte) además de la propiedad de \vdash —traducibilidad; esto es,

Si

$$\Gamma \vdash_{\Sigma} \alpha$$

entonces para cada $H : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ en *Sign* se cumple

$$sen(H)(\Gamma) \vdash_{\Sigma'} sen(H)(\alpha)$$

Es decir, la derivabilidad se conserva aunque cambie el lenguaje¹.

¹A esto se le suele llamar principio de sustitución.

Instituciones

Una institución es una cuádrupla

$$\mathfrak{S} = \langle \text{Sign}, \text{sen}, \text{Mod}, \Vdash \rangle$$

tal que Sign es una categoría cuyos objetos llamamos *signaturas*, sen es un functor que asocia a cada signatura un conjunto de sentencias, Mod es un functor que asocia a cada signatura una clase de modelos y \Vdash es una función que asocia a cada signatura Σ una relación binaria que llamamos *satisfacción*.

La condición de satisfacción exige que para cada traducción sintáctica entre signaturas H un modelo de la segunda signatura satisface la traducción de una fórmula si y sólo si la traducción del modelo satisface la fórmula original. El functor Mod es contravariante, funciona hacia atrás.

Consecuencia

Sea Γ un conjunto de Σ -sentencias. Entonces, se define $\text{Mod}(\Sigma, \Gamma)$ como el subconjunto de $\text{Mod}(\Sigma)$ determinado por todos los modelos $\mathcal{M} \in \text{Mod}(\Sigma)$ tales que satisfacen todas las sentencias de Γ ; esto es, $\mathcal{M} \Vdash_{\Sigma} \varphi$ para cada $\varphi \in \Gamma$. Podemos ahora introducir una relación entre conjuntos de sentencias y sentencias, que denotamos \models del siguiente modo:

$$\Gamma \models_{\Sigma} \varphi \quad \text{sys} \quad \mathcal{M} \Vdash_{\Sigma} \varphi \quad \text{para cada } \mathcal{M} \in \text{Mod}(\Sigma, \Gamma)$$

Mapa de Instituciones

Sean las instituciones

$$\mathfrak{S} = \langle \text{Sign}, \text{sen}, \text{Mod}, \Vdash \rangle \quad \text{y} \quad \mathfrak{S}' = \langle \text{Sign}', \text{sen}', \text{Mod}', \Vdash' \rangle$$

Entonces, un mapa de instituciones (Φ, α, β) consta de una *transformación natural* α un functor α -sensible Φ entre las categorías de teorías de \mathfrak{S} e \mathfrak{S}' y una transformación natural β .

A continuación definimos con un poco más de detalle algunos de estos componentes básicos.

Definición 395 Una *institución* —véase [4] y [5]— es una cuádrupla

$$\mathfrak{S} = \langle \text{Sign}, \text{sen}, \text{Mod}, \Vdash \rangle$$

tal que Sign es una categoría cuyos objetos llamamos *signaturas*,

$$\text{sen} : \text{Sign} \longrightarrow \text{Set}$$

es un functor que asocia a cada signatura un conjunto de sentencias,

$$\text{Mod} : \text{Sign} \longrightarrow \text{Set}^{op}$$

es un functor que asocia a cada signatura una clase de modelos, y \Vdash es una función que asocia a cada signatura Σ una relación binaria

$$\Vdash_{\Sigma} \subseteq \text{Mod}(\Sigma) \times \text{sen}(\Sigma)$$

que llamamos *satisfacción*, tal que para todo

$$\mathcal{M}' \in \text{Mod}(\Sigma')$$

y para cada

$$H : \Sigma \longrightarrow \Sigma' \quad \text{y} \quad \varphi \in \text{sen}(\Sigma)$$

la siguiente propiedad, que llamamos **Condición de Satisfacción**, se cumple:

$$\text{Mod}(H)(\mathcal{M}') \Vdash_{\Sigma} \varphi \quad \text{sys} \quad \mathcal{M}'_{\Sigma'} \Vdash \text{sen}(H)(\varphi).$$

Definición 396 Sea Γ un conjunto de Σ -sentencias. Entonces, definimos $\text{Mod}(\Sigma, \Gamma)$ como el subconjunto de $\text{Mod}(\Sigma)$ determinado por todos los modelos $\mathcal{M} \in \text{Mod}(\Sigma)$ tales que satisfacen todas las sentencias de Γ , esto es, $\mathcal{M} \Vdash_{\Sigma} \varphi$ para cada $\varphi \in \Gamma$. Podemos ahora definir una relación entre conjuntos de sentencias y sentencias —que denotamos \models — del siguiente modo:

$$\Gamma \models_{\Sigma} \varphi \quad \text{sys} \quad \mathcal{M} \Vdash_{\Sigma} \varphi \quad \text{para cada} \quad \mathcal{M} \in \text{Mod}(\Sigma, \Gamma)$$

Definición 397 Sean las instituciones

$$\mathfrak{S} = \langle \text{Sign}, \text{sen}, \text{Mod}, \Vdash \rangle \quad \text{y} \quad \mathfrak{S}' = \langle \text{Sign}', \text{sen}', \text{Mod}', \Vdash' \rangle$$

Entonces, un mapa de instituciones

$$(\Phi, \alpha, \beta) : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}'$$

consta de una transformación natural

$$\alpha : \text{sen} \Longrightarrow \text{sen}' \circ \Phi$$

un functor α -sensible

$$\Phi : \text{Th} \longrightarrow \text{Th}'$$

entre las categorías de teorías de \mathfrak{S} e \mathfrak{S}' , y una transformación natural

$$\beta : \text{Mod}' \circ \Phi^{op} \Longrightarrow \text{Mod}$$

tal que para cada

$$\Sigma \in \text{Sign}, \varphi \in \text{sen}(\Sigma) \quad \text{y} \quad \mathcal{M}' \in \text{Mod}'(\Phi(\Sigma, \emptyset))$$

se cumple la siguiente propiedad:

$$\mathcal{M}'_{\text{sign}'(\Phi(\Sigma, \emptyset))} \Vdash \alpha(\varphi) \quad \text{sys} \quad \beta_{(\Sigma, \emptyset)}(\mathcal{M}') \Vdash_{\Sigma} \varphi$$

15.3. La Lógica Modal Proposicional S4

Dada la similitud de objetivos entre este planteamiento y el de mi libro [6], parecía natural establecer vínculos. En [3] se realiza un primer esfuerzo para construir un puente entre sendos planteamientos, que permita la comunicación de resultados ya establecidos en ambas orillas. Lo que hicimos en ese artículo fue centrarnos en una de las lógicas que habían sido satisfactoriamente traducidas a la multivariada, el sistema $S4$ de Lewis.

En primer lugar, definimos el aparato semántico de la lógica modal $S4$ como una institución

$$\langle \text{Sign}_{PM}, \text{Mod}_{PM}, \text{sen}_{PM}, \Vdash \rangle$$

A tal efecto se define la categoría de signaturas modales proposicionales, que denotamos Sign_{PM} y que tiene signaturas modales proposicionales como objetos y morfismos de signaturas modales proposicionales como morfismos; la composición y la identidad en Sign_{PM} se expresan como composición de funciones y la función identidad, respectivamente.

¿Cuales serán los modelos propios de esa lógica?

Un Σ -modelo de $S4$ es básicamente un modelo de Kripke cuya relación de accesibilidad es reflexiva y transitiva.

Se requieren también los funtores

$$\text{Mod}_{PM} : \text{Sign}_{PM} \longrightarrow \text{Set}^{op}$$

y

$$\text{sen}_{PM} : \text{Sign}_{PM} \longrightarrow \text{Set}$$

Para la introducción del concepto de verdad en un modelo de Kripke seguimos el procedimiento habitual, lo que nos lleva a establecer, por inducción sobre φ , que para todo morfismo $H : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ y Σ' -modelo \mathcal{M}' ,

$$\text{Mod}_{PM}(\phi)(\mathcal{M}') \Vdash_{\Sigma} \varphi \text{ syss } \mathcal{M}' \Vdash_{\Sigma'} \text{sen}_{PM}(\phi)(\varphi)$$

Por lo tanto así se presenta a la lógica $S4$ como una institución.

A continuación expongo algunos de los detalles de esta definición.

Una *signatura modal proposicional* Σ es la unión de dos conjuntos disjuntos de signos que llamamos proposiciones atómicas

$$P = \{P_n \mid n \geq 0\}$$

y el signo para lo falso; $\{\perp\}$.

Un *morfismo de signaturas modales proposicionales* H , desde una signatura Σ a una signatura Σ' es una función

$$f : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$$

tal que $f(\perp) = \perp$.

Definición 398 Sea Σ una *signatura modal proposicional*. Entonces, un Σ -modelo de S_4 consiste en: (1) un conjunto no vacío \mathbf{W} , llamado el universo de estados o mundos; (2) una relación binaria $\mathbf{R}, \mathbf{R} \subseteq \mathbf{W} \times \mathbf{W}$, que es reflexiva y transitiva; y (3) una función

$$V : \Sigma \longrightarrow \wp(\mathbf{W})$$

que asigna un conjunto de estados a cada proposición atómica y tal que $V(\perp) = \emptyset$

El functor

$$Mod_{PM} : Sign_{PM} \longrightarrow Set^{op}$$

envía cada *signatura* Σ a la clase $Mod(\Sigma)$ de todos los Σ -modelos, y cada morfismo de *signaturas*

$$H : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$$

a la función

$$Mod_{PM}(H) : Mod(\Sigma') \longrightarrow Mod(\Sigma)$$

que envía cada Σ' -modelo

$$\langle \mathbf{W}', \mathbf{R}', V' \rangle$$

al Σ -modelo

$$\langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, V \rangle$$

tal que

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}', \mathbf{R} = \mathbf{R}' \text{ y } V = V'; H$$

Una Σ -fórmula φ es un elemento del conjunto “carrier” del álgebra libre $sen_{PM}(\Sigma)$ que tiene como generadores los elementos de Σ y cuya *signatura* está constituida por los operadores prefijos unarios —esto es, \neg , \Diamond y \Box — y por los operadores infijos binarios —esto es, \vee , \wedge , \rightarrow y \leftrightarrow —.

El functor

$$sen_{PM} : Sign_{PM} \longrightarrow Set$$

envía cada *signatura* Σ al conjunto $sen_{PM}(\Sigma)$ de todas las Σ -fórmulas, y cada morfismo de *signaturas*

$$H : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$$

a la función

$$sen_{PM}(H) : sen_{PM}(\Sigma) \longrightarrow sen_{PM}(\Sigma')$$

inducida por H .

Sea φ una Σ -fórmula y $\mathcal{M} = \langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, V \rangle$ un Σ -modelo. Entonces, $\mathcal{M}(\varphi)$ es el conjunto de estados o mundos en los que φ es verdadero, y se define como en la sección 8.2.2.

Un Σ -modelo

$$\mathcal{M} = \langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, V \rangle$$

satisface una Σ -fórmula φ si y sólo si $\mathcal{M}(\varphi) = \mathbf{W}$. En este caso, escribimos $\mathcal{M} \Vdash_{\Sigma} \varphi$.

Por inducción estructural sobre φ , se puede demostrar que para todo morfismo $H : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ y Σ' -modelo \mathcal{M}' ,

$$Mod_{PM}(H)(\mathcal{M}') \Vdash_{\Sigma} \varphi \text{ syss } \mathcal{M}' \Vdash_{\Sigma'} sen_{PM}(H)(\varphi)$$

Por lo tanto,

$$\langle Sign_{PM}, Mod_{PM}, sen_{PM}, \Vdash \rangle$$

define la lógica $S4$ como una institución.

15.4. El Mapa de Instituciones $PMS4 \longrightarrow FOEQ$

Se define un *mapa* de instituciones entre la lógica proposicional modal $S4$ y la lógica multivariada. La función

$$\alpha(\varphi, u) = \forall u TRANS(\varphi, u)$$

—para la función $TRANS$ se usa la de la sección 13.4.1—
define una transformación natural.

Se precisa así mismo de un functor Δ que envía:

1. cada teoría modal proposicional (Σ, Γ) a una teoría multivariada de primer orden integrada por el conjunto $MODO(S4)_{\Sigma}$ y las traducciones de las fórmulas de la teoría (Σ, Γ)
2. cada morfismo de teorías modales proposicionales a un morfismo de teorías multivariadas de primer orden

Si añadimos a lo anterior la conversión de estructuras, $CONV_2$, el resultado es un *mapa de instituciones*.

Estos son algunos de los detalles del *mapa* de instituciones entre la lógica proposicional modal $S4$ y la lógica multivariada².

El functor

$$\Delta^{\diamond} : Sign_{PM} \longrightarrow Sign_{FOEQ}$$

envía:

- cada signatura modal proposicional Σ a la signatura heterogénea

$$\Omega = \langle S, \Upsilon, \Pi \rangle$$

tal que $S = \{0, 1\}$, Υ es una familia de conjuntos vacíos y Π es la familia formada por los conjuntos

$$\Pi_1 = \Sigma - \{\perp\}, \quad \Pi_{10} = \{\varepsilon\}, \quad \Pi_{11} = \{S, \equiv_1\}, \quad \Pi_{00} = \{\equiv_0\}$$

²Para la definición de la institución $FOEQ$, ver Ejemplo 67 en [4].

- cada morfismo de signaturas modales proposicionales $H : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$, al morfismo

$$\Delta^\diamond(H) = (H_1, H_2, H_3) : \Delta^\diamond(\Sigma) \longrightarrow \Delta^\diamond(\Sigma')$$

tal que H_1 y H_2 son las funciones identidad y $H_3 = H$ para todos los predicados en Π_1 y la función identidad para el resto de conjuntos de predicados.

La función

$$\alpha : \text{sen}_{PM}(\Sigma) \times \{u\} \longrightarrow \text{sen}_{Foeq}(\Delta^\diamond(\Sigma))$$

tal que para toda $\varphi \in \text{sen}_{PM}(\Sigma)$ y u una variable individual de la lógica multivariada,

$$\alpha(\varphi, u) = \forall u \text{TRANS}(\varphi, u)$$

define una transformación natural

$$\alpha : \text{sen}_{PM} \Longrightarrow \text{sen}_{Foeq} \circ \Delta^\diamond$$

El functor

$$\Delta : \text{Th}_{PM} \longrightarrow \text{Th}_{Foeq}$$

envía:

- cada teoría modal proposicional (Σ, Γ) a la teoría heterogénea de primer orden

$$(\Delta^\diamond(\Sigma), \text{MODO}(S4)_\Sigma \cup \alpha(\Gamma))$$

—Para la definición del conjunto $\text{MODO}(S4)_\Sigma$ ver la página 350, o consultad [6]—

- cada morfismo de teorías modales proposicionales

$$H : (\Sigma, \Gamma) \longrightarrow (\Sigma', \Gamma')$$

al morfismo de teorías heterogéneas de primer orden

$$\Delta(H) = \Delta^\diamond(H) : \Delta(\Sigma, \Gamma) \longrightarrow \Delta(\Sigma', \Gamma')$$

La familia de funciones CONV_2 , tal que para cada $(\Sigma, \Gamma) \in |\text{Th}_{PM}|$,

$$\text{CONV}_{2(\Sigma, \Gamma)} : \text{Mod}_{Foeq}(\Delta(\Sigma, \Gamma)) \longrightarrow \text{Mod}_{PM}(\Sigma, \Gamma)$$

envía cada $\Delta(\Sigma, \Gamma)$ -modelo $\langle A, \mu, \nu \rangle$ a un (Σ, Γ) -modelo $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, V \rangle$, tal que $\mathbf{W} = A_1$, $\mathbf{R} = \nu(S)$, y $V(P) = \nu(P)$, es una transformación natural. (Lema 4.5.2 en [6].) Para todo

$$\Sigma \in \text{Sign}_{PM}, \varphi \in \text{sen}(\Sigma) \text{ y } \mathcal{M} \in \text{Mod}_{Foeq}(\Delta(\Sigma, \emptyset))$$

se cumple que:

$$\mathcal{M} \Vdash_{\Delta^\diamond(\Sigma)} \alpha(\varphi) \text{ syss } \text{CONV}_{2(\Sigma, \emptyset)}(\mathcal{M}) \Vdash_\Sigma \varphi$$

Por tanto, $(\Delta, \alpha, \text{CONV}_2)$ define un mapa de instituciones: $\text{PMS4} \longrightarrow \text{FOEQ}$.

15.4.1. El Teorema de Representación para $PMS4$

En el capítulo 13 presento un plan general para definir correspondencias entre lógicas que tienen como objetivo arrastrar ciertas propiedades desde la lógica marco a la lógica objeto de estudio; por ejemplo, enumerabilidad, compacidad y Löwenheim-Skolem. El siguiente lema relaciona *mapas de instituciones* con *correspondencia entre lógicas*.

Lema 399 Sean

$$\mathfrak{S} = \langle \text{Sign}, \text{sen}, \text{Mod}, \Vdash \rangle$$

y

$$\mathfrak{S}' = \langle \text{Sign}, \text{sen}', \text{Mod}', \Vdash' \rangle$$

instituciones, y sea $(\Phi, \alpha, \beta) : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}'$ un mapa de instituciones tal que para cada $\Sigma \in \text{Sign}$, $\beta_{(\Sigma, \emptyset)}$ es una función epiyectiva. Entonces, para cada $\Sigma \in \text{Sign}$, $\varphi \in \text{sen}(\Sigma)$, se cumple que: (Teorema de representación)

$$\emptyset' \Vdash_{\text{sign}'(\Phi(\Sigma, \emptyset))} \alpha_{\Sigma}(\varphi) \quad \text{syss} \Vdash_{\Sigma} \varphi$$

donde \emptyset' es el conjunto de axiomas de la teoría $\Phi(\Sigma, \emptyset)$.

De hecho,

$$(\Delta, \alpha, \text{CONV}_2) : PMS4 \longrightarrow FOEQ$$

define una correspondencia en el nivel del teorema de representación.

Comentario 400 *Vimos [13] que hay tres niveles de correspondencia entre lógicas: (1) teorema de representación, (2) teorema principal, y (3) equivalencia de cálculos. El lema demostrado en [3] para mapas de instituciones establece el nivel de correspondencia entre lógicas del teorema de representación. Es de esperar que estos resultados puedan mejorarse en investigaciones futuras.*

Bibliografía

- [1] Estany, A. y otros eds. [1997]. *Actas del II Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia*. Serveis de Publicacions de la UAB. Barcelona.
- [2] Clarke, E. and Kozen, D. editores. [1984]. *Proceedings of the Logics of Programming Workshop*, volume 164 of Lecture Notes in Computer Science, pages 221–256. Springer-Verlag. Berlín. Alemania.
- [3] Clavel, M. y Manzano, M. [1997]. “*Mapas de Instituciones: de la Lógica Modal S_4 a la lógica multivariada*” en [1].
- [4] Goguen, J. y Burstall, R. [1984]. *Introducing institutions*. En [2].
- [5] Goguen, J. y Burstall, R. [1992]. “*Institutions: Abstract model theory for specification and programming*”. *Journal of the ACM*, 39(1):95–146, .
- [6] Manzano, M. [1996]. *Extensions of first order logic*. Number 19 in Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press. Cambridge. U.K.
- [7] Meseguer, J. [1989]. “*General logics*”. En *Logic Colloquium’87*, páginas 275–329. North-Holland. Amsterdam. Holanda.

