Capítulo 13

Lógica Multivariada es Unificadora

13.1. Introducción

Este capítulo será una sucinta exposición de la segunda parte de mi libro [19]. En *Extensions of first order logic* se estudian varias extensiones de la lógica de primer orden que tienen aplicación en filosofía, informática, matemáticas, lingüística e inteligencia artificial. En él se introducen con cierto detalle los siguientes sistemas lógicos (ver figura 13.1): lógica de segundo orden (*SOL*), tres lenguajes para la teoría de tipos, lógicas modales proposicionales (*PML*) y lógica modal de primer orden-*S5*, lógica dinámica proposicional (*PDL*) y lógica multivariada o heterogénea (*MSL*).

Una de las características del libro es que en él se administra una sustanciosa dosis de lo que Johan van Benthem denominaría *perspectiva lógica* (ver figura 13.2).

El primer objetivo es, sencillamente, el de presentar al lector una colección de lógicas —es relativamente detallada en el caso de la lógica de orden superior y de la multivariada, y como meros ejemplos de aplicación de la maquinaria de traducción propuesta para las modales y dinámica— ; el segundo objetivo es desarrollar la tesis de que la mayoría de los sistemas *"razonables"* de lógica se traducen de forma natural a la lógica multivariada. Esta tesis se mantiene a lo largo de todo él, pero se desarrolla abierta y explícitamente en el último capítulo, en el que todas las lógicas consideradas se ponen en correspondencia directa con la lógica *MSL*.

En el presente libro he decidido reducir la exposición al caso general y a un sólo ejemplo, el de la lógica modal proposicional.

Me cito a mí misma[1]:

[1] Lo digo en el prefacio de [19].

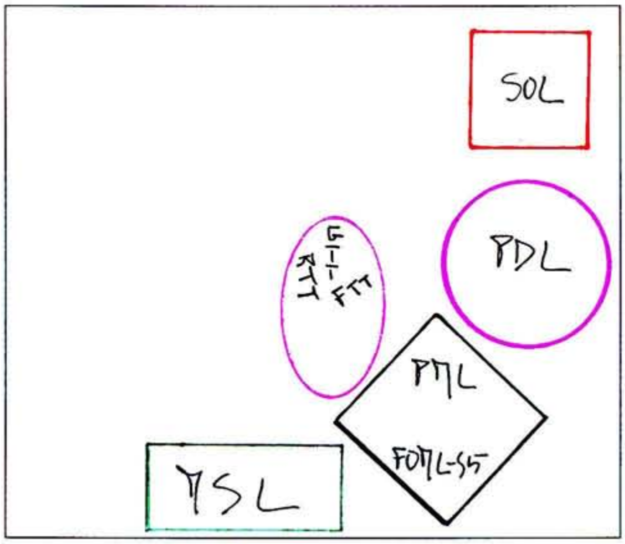

Figura 13.1: *Lógicas estudiadas*

The book is also connected to my own intellectual and personal biography, not only in the obvious sense, in terms of the time it took me to write it, but because the subject has been around me (back and forth) for many years. The subject of my Master's thesis was completeness for second order logic and my PhD thesis was on second order logic as well. Both were presented in the Department of Logic in the University of Barcelona. It was decisive for this book that I spent the academic year 1977-1978 as a Fulbright Scholar in Berkeley, and that Leon Henkin guided me as my advisor. There I learnt many of the things that directly or indirectly, I hope, will show in these pages, including an intellectual appreciation of the beauty of teaching and the value of effort put into pedagogical issues. I have always thanked Leon Henkin for introducing me, with his enormous gifts for teaching, in a non-traumatic style, to his own wise overview of metamathematics and algebra. The subject presented was the usual one in graduate courses, but the presentation and insights were a challenge. The daily handwritten handouts in the unmistakable violet color of the Vietnamese copier... unforgettable!

When I first learnt about modal logic, the idea of translating it into first order many-sorted logic appeared immediately. Right from the start for me it was directly connected with what had been done in higher order logic. I have always had the feeling that this was just putting another piece of the puzzle[2] in the right place. I soon

[2] Como muestra la figura 13.3.

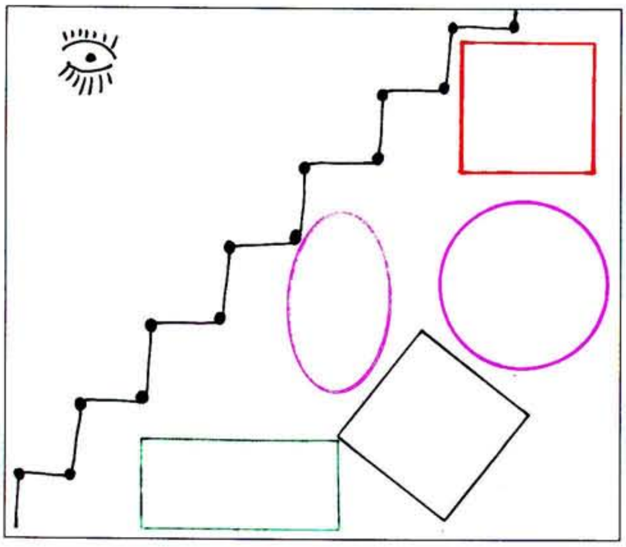

Figura 13.2: *Perspectiva lógica*

discovered that this idea had already generated a whole industry and I became very happy afterwards when reading Johan van Benthem's survey and book. Wonderful, hats off! I applied the same treatment to dynamic logic and wrote a paper on this. I was in Leeds at that time, at the Centre for Theoretical Computer Science. Somehow this book grew from that paper and that visit.

13.2. ¿Por qué la lógica multivariada?

¿Por qué MSL?, se podría preguntar.

Vimos en el capítulo 7 que *MSL* es una lógica muy flexible, resultando ser la elección obvia cuando se pretende tratar con más de un tipo de objetos. Pero además de ser la lógica *natural* para estos casos, es también una lógica *eficaz* ya que su teoría de la prueba está bien desarrollada —posee un cálculo no sólo correcto, sino también completo. Debido a su versatilidad, *MSL* puede ser usada como *marco unificador* en el que situar a otras lógicas.

Como ya comenté anteriormente, la proliferación actual de lógicas usadas en filosofía, informática, lingüística, matemáticas e inteligencia artificial hacen urgente y muy necesaria la reducción operativa de todas ellas. El objetivo es triple:

1. Usar en todos los casos un único cálculo deductivo y, a ser posible, un único demostrador de teoremas

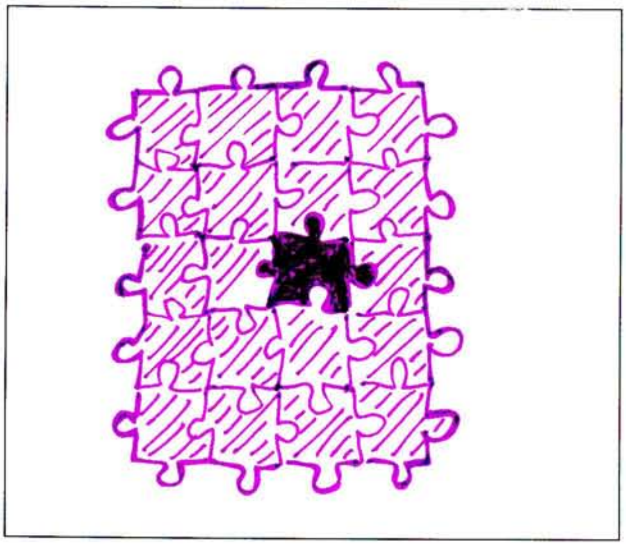

Figura 13.3: *La pieza del puzzle*

2. Arrastrar algunas de las metapropiedades desde MSL hasta otras lógicas en estudio

3. Comparar entre sí a las diferentes lógicas, mediante la comparación entre las teorías multivariadas que las representen.

Desde mi punto de vista, este planteamiento es tan obvio e intuitivo que sólo precisa de un poco de sentido común para entender la construcción. Además, si se modifican los ingredientes básicos, la receta puede adaptarse para cocinar diferentes platos[3].

Es difícil rastrear el origen y desarrollo de este enfoque, ya que cada lógica no clásica contó con su *"doble"* clásica casi desde su nacimiento. Sin embargo, debo atribuir la mayoría de las ideas que yo uso en este planteamiento a dos artículos de Henkin que menciono en las referencias: *"Completeness in the theory of types"*, de 1950, y *"Banishing the rule of substitution for functional variables"*, de 1953.

Sin embargo, no quisiera inducir a error. No hay en su mencionado artículo de 1950 traducciones de fórmulas, ni tan siquiera aparece explícitamente el lenguaje y el cálculo multivariado. En conexión con la lógica de orden superior, este cálculo se usa, que yo sepa, por primera vez en el artículo de 1953. En él Henkin propone el axioma de definición de clases y relaciones (*comprehensión*) como alternativa a la regla de sustitución usada en los cálculos anteriormente

[3] Así lo planteamos en [17].

propuestos para la lógica superior. Si del nuevo se elimina el axioma de comprehensión, obtenemos uno multivariado; es decir, el cálculo *MSL*. Otra de las ventajas del que Henkin propone en 1953 es que permite aislar a otros cálculos situados entre el de *MSL* y los de orden superior. El procedimiento es sencillo: debilitando comprehensión. En el último capítulo de mi libro *Extensions of First-order Logic* esta idea se usa tanto en el estudio de la lógica dinámica como en el de la lógica modal.

El Teorema de Completud en la Lógica de Orden Superior

En la sección 10.6 vimos que las ventajas de la nueva semántica no-estándar son evidentes ya que:

1. Conseguimos así un *teorema de completud*
2. Sirve para destacar no sólo a la lógica *MSL* sino también a *otras lógicas* entre *MSL* y *SOL*, obtenidas *debilitando comprehensión.*

Debilitar el axioma de comprehensión

Aquí radica el programa de investigación que quiero comentar a continuación, pero permitidme que os recuerde donde se sitúan esas lógicas intermedias[4].

Esta otra idea, ahora tomada del artículo de 1953, también resulta interesante: Si debilitamos el axioma de comprehensión —por ejemplo, lo restringimos a fórmulas de primer orden, o a traducciones de fórmulas dinámicas o modales, o a cualquier otro conjunto recursivo— obtenemos cálculos entre *MSL* y *SOL*. Y resulta fácil encontrarles su semántica correspondiente. Naturalmente, la clase de estructuras que les corresponde estará situada entre $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}.\mathfrak{S}$. La nueva lógica, llamémosla *XL*, será también completa. El motivo es que esta clase de modelos es axiomatizable. Esta idea se explotará tanto en *PML* como en *PDL*, aunque con distinto alcance.

13.3. Reducción de otras lógicas a la multivariada

Lo que haré ahora es explicar brevemente la idea general del programa de reducción. Dicho programa se desarrolla en tres niveles, o etapas (ver figura 13.4); en el primero nos detenemos en la mera representación de la verdad en la lógica en estudio como verdad de su traducción en estructuras multivariadas, módulo una cierta teoría cuya definición constituye una parte importante del programa de reducción; en el segundo la equivalencia se extiende al concepto de consecuencia a partir de conjuntos cualesquiera de hipótesis; en el tercero se demuestra la equivalencia del cálculo de la lógica en estudio con la teoría multivariada que la simula.

[4] Consultad la figura de la página 278.

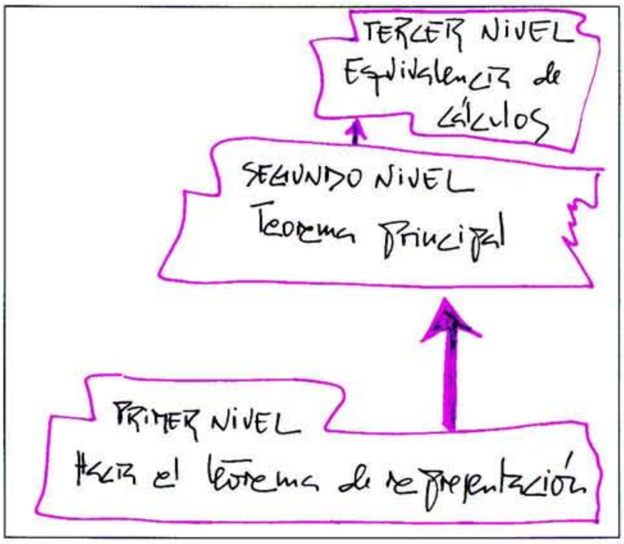

Figura 13.4: *Niveles del proceso de reducción*

13.3.1. Primer nivel: Teoremas de representación

El plan general es como sigue:

La signatura de la lógica en estudio —llamémosla *XL*— se transforma en una signatura heterogénea, las expresiones de la lógica *XL* se traducen a *MSL* y las estructuras propias de *XL* se convierten en estructuras heterogéneas. Por consiguiente, necesitamos definir una función recursiva *TRANS* para la traducción y una conversión directa de estructuras, $CONV_1$.

Una posibilidad es añadir a las estructuras heterogéneas universos que contengan todas las categorías de objetos matemáticos de los que queramos —y podamos— hablar en la lógica *XL*. Por consiguiente, en $CONV_1(\mathcal{A})$ añadiremos universos que contengan los conjuntos y relaciones definibles en las estructuras originales, $\mathcal{A}$, mediante los constructos de *XL*. A consecuencia de este cambio, parece que estemos tomando estructuras propias para *SOL* en vez de para *MSL*. Pero nosotros ya sabemos —lo aprendimos en la prueba de completud de Henkin— cómo evitar el uso explícito de *SOL*, cambiando a *MSL*: nuestros universos serán multivariados o heterogéneos, pero añadiremos relaciones de pertenecia y el axioma de extensionalidad.

El primer objetivo es definir $CONV_1$ y *TRANS* de forma que podamos demostrar

Lema 370 $\mathcal{A} \Vdash \varphi \Longleftrightarrow \mathrm{CONV}_1(\mathcal{A}) \Vdash \overline{\forall} TRANS(\varphi)$

Con la conversión directa de estructuras queremos obtener como resultado la equivalencia entre la validez de una fórmula cualquiera φ en las estructuras originales de la lógica en estudio —llamémoslas simplemente $\mathfrak{ST}$*(XL)*—, y la validez de la clausura universal de su traducción a lógica multivariada

$$\overline{\forall} TRANS(\varphi)$$

en la clase $\mathfrak{S}^*$ de las estructuras obtenidas por conversión

$$\text{donde } \mathfrak{S}^* = CONV_1(\mathfrak{ST}(XL))$$

Esto es,

Teorema 371 $\models_{\mathfrak{ST}(\mathrm{XL})} \varphi \Longleftrightarrow \models_{\mathfrak{S}^*} \overline{\forall} TRANS(\varphi)$

Naturalmente, la primera pregunta que uno debe hacerse es si $\mathfrak{S}^*$ puede reemplazarse por la clase de modelos de un conjunto de fórmulas heterogéneas a determinar, Δ. Por consiguiente, la clave para las definiciones de *TRANS* y de $CONV_1$, es el poder simplificar la demostración de la equivalencia semántica, y en este sentido la relevancia de los resultados que pudieran derivarse depende de si se puede o no axiomatizar $\mathfrak{S}^*$. En algunos casos, bastará con axiomatizar una clase algo más amplia, que incluya a $\mathfrak{S}^*$.

Resumiendo, nuestro primer objetivo es demostrar un teorema de representación; es decir, un teorema de esta forma

Teorema 372 *(De representación)* $\models_{\mathfrak{ST}(XL)} \varphi \Longleftrightarrow \Delta \models_{\mathfrak{ST}(MSL)} \overline{\forall} TRANS(\varphi)$.

A partir de este teorema se demuestra fácilmente el *teorema de enumerabilidad para la lógica XL*. Por lo tanto, sabemos que podremos diseñar un cálculo para *XL*, pero también sabemos que en *MSL* podemos simular ese cálculo e incluso, si lo hubiera, *usar el demostrador de teoremas de MSL*.

También se demuestra

Teorema 373 $TRANS(\Pi) \cup \Delta \models_{\mathfrak{ST}(MSL)} TRANS(\varphi) \Longrightarrow \Pi \models_{\mathfrak{ST}(XL)} \varphi$

Así que, aunque la reducción se hubiera detenido en este nivel, los resultados desde un punto de vista práctico serían impresionantes (ver figura 13.5).

13.3.2. Segundo nivel: El Teorema Principal

Una vez demostrado el teorema de representación la pregunta inmediata es,

¿Se puede hacer algo más?

¿Es el teorema de representación el objetivo máximo?

Cuando la lógica en estudio *XL* posee un concepto de consecuencia, podemos intentar demostrar lo que yo llamo el *teorema principal*; esto es, que consecuencia en *XL* equivale a consecuencia de las traducciones módulo la teoría Δ. Concretamente,

Teorema 374 *(Principal)* $\Pi \models_{\mathfrak{ST}(XL)} \varphi \Longleftrightarrow TRANS(\Pi) \cup \Delta \models_{\mathfrak{ST}(MSL)} TRANS(\varphi)$

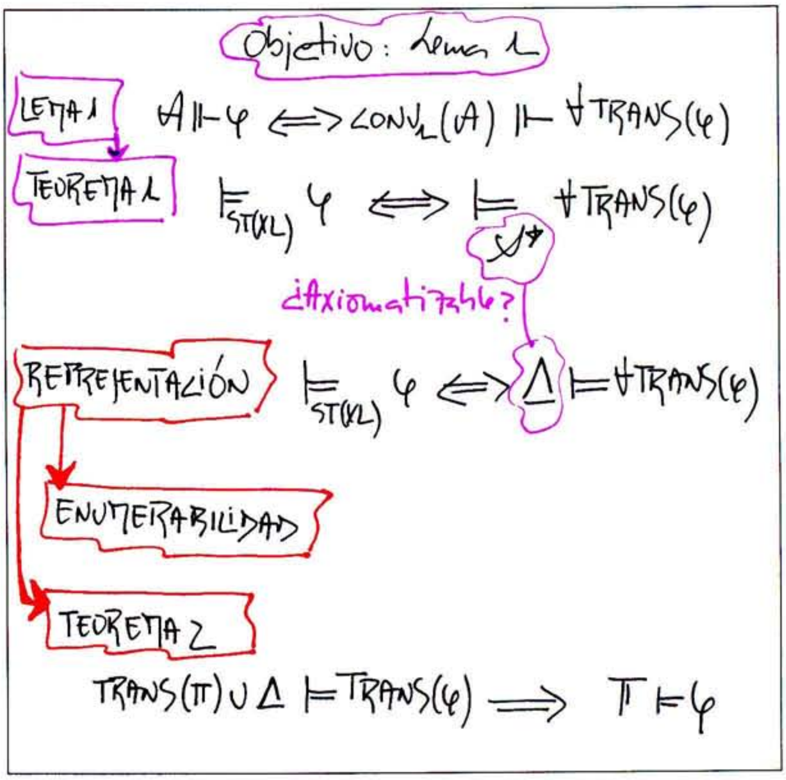

Figura 13.5: *Primer nivel*

A partir del teorema principal se obtienen *compacidad y Löwenheim-Skolem para XL*, usando las correspondientes propiedades de *MSL*. Para demostrar el teorema principal hace falta definir una conversión inversa de estructuras; nuestro objetivo al definirlas es demostrar que si partimos de un modelo de Δ, digamos, $\mathcal{B}$, y de una fórmula modal φ, $\mathcal{B}$ es modelo de la clausura universal de la traducción de φ, $\overline{\forall} TRANS(\varphi)$, si y sólo si la conversión inversa de $\mathcal{B}$ lo es de φ. Esto es,

Lema 375 $\mathrm{CONV}_2(\mathcal{B}) \Vdash \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{B} \Vdash \overline{\forall} TRANS(\varphi)$

Resumiendo, éste sería el resultado (ver figura 13.6)

13.3.3. Tercer nivel: Equivalencia de los cálculos

Cuando la lógica en estudio XL posee también un cálculo deductivo, podemos intentar utilizar la maquinaria de la correspondencia ya desarrollada para demostrar, si es posible, corrección y completud para XL.

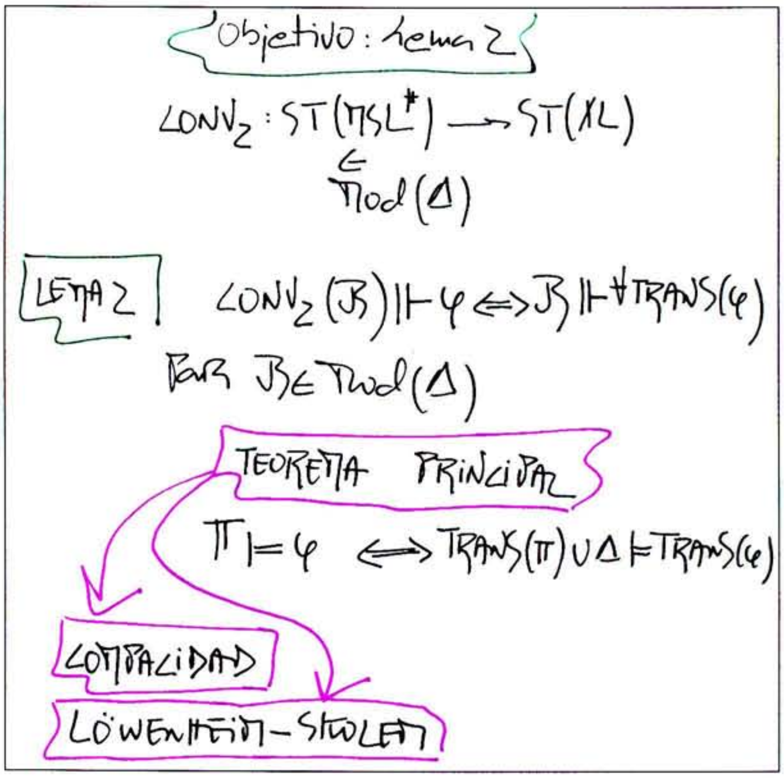

Figura 13.6: *Segundo nivel*

Puesto que contamos ya con el teorema principal y con completud y corrección para *MSL*, nos gustaría completar el cuadro demostrando la doble flecha en la línea de abajo

$$TRANS(\Pi) \cup \Delta \models_{\mathfrak{ST}(MSL)} TRANS(\varphi) \Longleftrightarrow \Pi \models_{\mathfrak{ST}(XL)} \varphi$$

$$\Updownarrow$$

$$TRANS(\Pi) \cup \Delta \vdash TRANS(\varphi) \Longleftrightarrow \Pi \vdash \varphi$$

La flecha hacia la izquierda es normalmente de demostración muy sencilla ya que podemos añadir a Δ las condiciones requeridas, como axiomas. En algunos casos resulta útil poder usar la construcción del modelo canónico $\mathcal{A}_{CAN}$ para poder demostrar

Lema 376 $\mathrm{CONV}_1(\mathcal{A}_{CAN}) \Vdash \overline{\forall} TRANS(\varphi) \Longrightarrow \vdash_{XL} \varphi$

13.4. Lógicas modales *K* y *S4*

En esta sección lo que haremos es analizar el caso de la lógica modal y muy especialmente la minimal, K y la lógica *S4*. La traducción de fórmulas será la estándar, la conversión de estructuras consiste en añadir un universo en donde situar los conjuntos de mundos significativos y definiremos una teoría heterogénea que representa y equivale a la modal, tanto en el caso de K como de *S4*.

13.4.1. El teorema de representación en PML

En este caso se reducirá *PML* a $MSL^{\Box}$. Este lenguaje multivariado contiene los símbolos siguientes: $\bot, \neg, \rightarrow$, los relatores monarios $P_0, P_1, P_2, ...$ el relator binario S, un signo de pertenecia y dos de igualdad; para individuos y relaciones. Hay variables de dos tipos, para individuos y para conjuntos. Usaremos la conocida traducción estándar, que expresa en primer orden las condiciones de verdad de las fórmulas modales. En particular,

- $TRANS^{\Box}(\bot)[u] = u \neq u$
- $TRANS^{\Box}(p)[u] = Pu$
- $TRANS^{\Box}(\neg\varphi)[u] = \neg TRANS^{\Box}(\varphi)[u]$
- $TRANS^{\Box}(\varphi \rightarrow \psi)[u] = (TRANS^{\Box}(\varphi)[u] \rightarrow TRANS^{\Box}(\psi)[u])$
- $TRANS^{\Box}(\Box\varphi)[u] = \forall v(Ruv \rightarrow TRANS^{\Box}(\varphi)[v])$

Lo que hacemos es formular en lógica clásica las condiciones semánticas de verdad de las fórmulas modales. Prescindimos de nuestras lógicas *de-moda-modales* y nos ponemos los anteojos clásicos (ver figura 13.7).

Es fácil ver que las traducciones de los axiomas K y $Df\Diamond$ indican propiedades obvias de la cuantificación y que por lo tanto estas fórmulas pueden demostrarse en *MSL* como teoremas lógicos.

Ejercicio 377 $\vdash_{MSL} \forall u TRANS^{\Box}(K)[u]$

Ejercicio 378 $\vdash_{MSL} \forall u TRANS^{\Box}(Df_{\Diamond})[u]$

Por otra parte, las traducciones tanto del axioma T como del axioma 4 no son fórmulas válidas en *MSL* pues necesitan que se verifiquen ciertas hipótesis.

Ejercicio 379 $(???) \vdash_{MSL} \forall u TRANS^{\Box}(T)[u]$

Ejercicio 380 $(???) \vdash_{MSL} \forall u TRANS^{\Box}(4)[u]$

¿Cuáles?, nos preguntamos.

Las estructuras multivariadas que usaremos se obtienen a partir de las estructuras modales al añadir universos que contengan conjuntos de estados, o

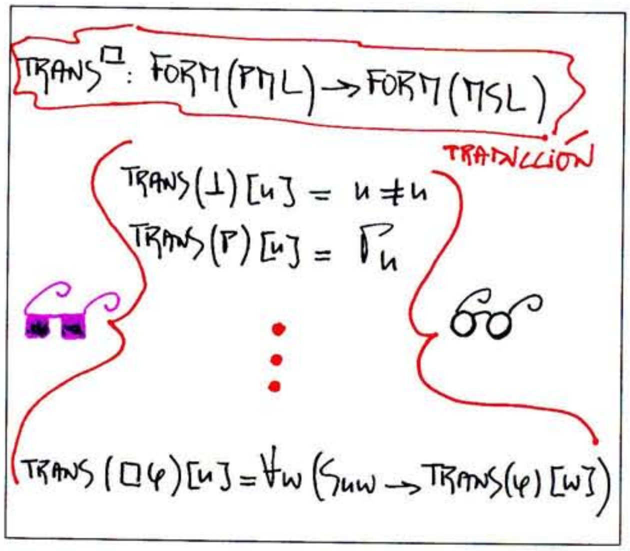

Figura 13.7: *Gafas*

mundos. La intuición aquí es que queremos tener explícitamente representados todos los conjuntos que pueden ser definidos modalmente —esto es, mediante fórmulas modales en estructuras de Kripke—.

Dada una estructura modal $\mathcal{A}$ construimos un marco al añadir un universo de subconjuntos de $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}'$. Una clase muy especial de marcos son los que denomino *modelos generales construidos sobre estructuras modales.* Para construir un modelo general de esta clase lo que hacemos en incluir en $\mathbf{W}'$ el conjunto DEF de los subconjuntos de $\mathbf{W}$ definibles algebraicamente —esto es, $DEF \subseteq \mathbf{W}'$ y está cerrado bajo ciertas operaciones—; añadiremos los conjuntos unitarios y el de los puntos accesibles a partir de uno dado. DEF contiene el conjunto vacío $\emptyset$, todo $\mathbf{W}$ y las interpretaciones de las proposiciones atómicas. DEF está cerrado bajo operaciones booleanas; esto es,

$$\forall T(T, S \in DEF \Rightarrow T \cup S, \mathbf{W} - T \in DEF)$$

y bajo la siguiente operación

$$\forall T(T \in DEF \Rightarrow Dom(R \cap (\mathbf{W} \times T)) \in DEF)$$

Fuera de DEF, pero en $\mathbf{W}'$, tenemos los unitarios de todos los elementos de $\mathbf{W}$. La pertenencia a $\mathbf{W}'$ también obedece esta regla

$$\forall w(w \in \mathbf{W} \Rightarrow Rec(R \cap (\{w\} \times \mathbf{W})) \in \mathbf{W}')$$

Llamemos $\mathfrak{F}$ a la clase de todos los marcos construidos sobre estructuras modales y $\mathfrak{G}$ a la clase de todas las estructuras generales contruidas sobre estructuras modales.

Se puede demostrar que $\mathfrak{G}$ está contenido en la clase de marcos construidos sobre estructuras modales cuyo universo $\mathbf{W}'$ contiene todos los conjuntos definibles mediante fórmulas modales en sus propias estructuras modales. Así mismo, se puede demostrar que una fórmula modal φ define en una estructura modal $\mathcal{A}$ el mismo conjunto que su traducción define en cualquier estructura general construida sobre $\mathcal{A}$; esto es, en $\mathcal{A}\mathfrak{G}$. Es decir,

Lema 381 $\mathcal{A}\mathfrak{G}(\lambda uTRANS(\varphi)[u]) = \mathcal{A}(\varphi)$

Finalmente, demostramos que la validez de una fórmula φ en *PML* equivale a la validez de la clausura universal de su traducción en la clase $\mathfrak{G}$. Es decir,

Teorema 382 $\models \varphi$ *en* PML $\Longleftrightarrow \models_{\mathfrak{G}} \forall uTRANS(\varphi)[u]$

Ahora la pregunta es, *¿podemos axiomatizar* $\mathfrak{G}$*?*

La respuesta en este caso es afirmativa, ya que definimos la teoría *MODO* cuyos axiomas son los esquemas de comprehensión para traducciones de fórmulas modales, para fórmulas atómicas con igualdad y para átomos que usan el relator binario S —que representa a la relación de accesibilidad—. Esto es,

$$\forall\exists X\forall u(\varepsilon uX \leftrightarrow \varphi) \text{ donde } \varphi \in TRANS(PML) \cup I \cup \Sigma$$

I contiene las fórmulas de la forma $u = v$, y Σ contiene todas las fórmulas de la forma Suv.

Añadiremos extensionalidad, porque queremos simular la lógica de segundo orden en la multivariada.

Se demuestra lo siguiente:

Teorema 383 $Mod(\text{MODO}) = \mathfrak{G}$

Usando estos resultados obtenemos un *teorema de representación* para la lógica minimal, K.

Teorema 384 *(De representación, para* K*)*

$$\models \varphi \textit{ en } \text{PML} \Longleftrightarrow \text{MODO} \models_{\mathfrak{F}} \forall uTRANS(\varphi)[u] \textit{ en } \text{MSL}$$

A partir del teorema de representación se demuestra *enumerabilidad* para la lógica K de *PML*. Además, caso de existir un probador de teoremas para *MSL*, podría ser usado para demostrar teoremas modales.

Ya que tenemos un teorema de representación para K, buscamos uno para la lógica *S4*. Llamemos *MODO(S4)* a la teoría heterogénea obtenida al añadir a *MODO* las condiciones abstractas de segundo orden correspondientes a las fórmulas modales T y 4 —llamémoslas *MS(T)* y *MS(4)*—. Sea $\mathcal{D}$ la clase de las estructuras de Kripke reflexivas y transitivas. El teorema de representación de *S4* tiene esta forma

Teorema 385 *(De representación, para* $S4$*)* $\models_{\mathcal{D}} \varphi$ *en* PML $\Longleftrightarrow$MODO(S4)$\models_{\mathfrak{F}}$ $\forall uTRANS(\varphi)[u]$ *en* MSL

Este resultado es de fácil obtención porque en el cálculo multivariado se puede demostrar que las formulaciones habituales de reflexividad y transitividad equivalen a *MS(T)* y *MS(4)* módulo la teoría *MODO*.

Ejercicio 386 *(Resultado crucial) En el cálculo multivariado,*

$$\text{MODO} \vdash \text{MS(T)} \leftrightarrow \text{Reflexividad}$$
$$\text{MODO} \vdash \text{MS(4)} \leftrightarrow \text{Transitividad}$$

Comentario 387 *Esta situación es mejor que la que encontramos en PML con la semántica de modelos. Allí una estructura de Kripke reflexiva es un modelo de T, una transitiva lo es de 4, etc, pero hay modelos irreflexivos de T y modelos intransitivos de 4. Por lo tanto, si pensamos que los axiomas modales tratan de definir la relación de accesibilidad que les es propia, esto puede ser considerado como un cierto fracaso. Verdad es que se puede tomar la conocida como semántica de marcos para PML. La alternativa que yo propongo es que vayamos al entorno de las estructuras generales aquí definidas, puesto que nos ofrece una caracterización de las propiedades semánticas de la relación de accesibilidad sin perder el cálculo.*

13.4.2. El teorema principal en PML

Puesto que ya tenemos el teorema de representación y en lógica modal contamos con el concepto de consecuencia, intentamos conseguir el teorema principal. En *PML* la conversión inversa es la función inversa de $CONV_1$ (borramos el universo $\mathbf{W}'$) y así obtenemos fácilmente el *teorema principal* tanto para K como para S4. Esto es,

Teorema 388 *(Principal, K)* $\Pi \vDash \varphi \Longleftrightarrow TRANS(\Pi) \cup MODO \vDash TRANS(\varphi)$

Teorema 389 *(Principal, S4)* $\Pi \vDash_{\mathcal{D}} \varphi \Longleftrightarrow TRANS(\Pi) \cup MODO(S4) \vDash TRANS(\varphi)$

(siendo $\mathcal{D}$ la clase de estructuras de Kripke reflexivas y transitivas.

Como dije antes, así conseguimos gratis los teoremas de *compacidad* y de *Löwenheim-Skolem* para las lógicas *K* y *S4*. La demostración se basa en el resultado crucial antes mencionado en el ejercicio 386.

13.4.3. Los cálculos modales K y S4

Queremos demostrar que los cálculos modales para *K* y *S4* tienen un correlato en *MSL*. Es decir, que las teorías heterogéneas que las representan, *MODO* y *MODO(S4)*, son también equivalentes sintácticamente a *K* y *S4*. Es decir,

$$TRANS(\Pi) \cup MODO \vdash TRANS(\varphi) \Longleftrightarrow \Pi \vdash_K \varphi$$

y

$$TRANS(\Pi) \cup \mathit{MODO(S4)} \vdash TRANS(\varphi) \Longleftrightarrow \Pi \vdash_{S4} \varphi$$

Por lo que a la lógica K se refiere la flecha hacia la izquierda se obtiene fácilmente porque las traducciones tanto de K como de $Df\Diamond$ expresan propiedades obvias de la cuantificación. La regla de necesariedad se preserva bajo traducción. Por lo que respecta a la lógica *S4*, usando *MS(T)* y *MS(4)* y comprehensión obtenemos la traducción deseada de cada ocurrencia de T o de 4.

En lógica modal, dada una lógica cualquiera, digamos B, hay un modelo canónico, $\mathcal{B}_B$, cuyo universo W contiene todos los conjuntos $B-$máximamente consistentes y cuya relación de accesibilidad se define así

$$\{\langle x, y\rangle |\, \{\varphi | \Box\varphi \in x\} \subseteq y\}$$

A partir de este modelo, mediante conversión directa, obtenemos el modelo canónico general, $\mathcal{B}_B\mathfrak{G}$.

En el caso de la lógica K esta estructura no es tan sólo un modelo de *MODO*, sino que también podemos demostrar que la traducción de una fórmula modal φ es verdadera en un punto del modelo canónico si y sólo si la fórmula pertenece a dicho punto,

$$\mathcal{B}_K\mathfrak{G}[t] \vDash TRANS(\varphi)[u] \Longleftrightarrow \varphi \in t$$

Ahora podemos demostrar que

$$\mathcal{B}_K\mathfrak{G} \vDash \forall u TRANS(\varphi)[u] \Longrightarrow \vdash_K \varphi$$

Concluimos finalmente que

$$\mathit{MODO} \vdash_{MSL} \forall u TRANS(\varphi)[u] \Longleftrightarrow \vdash_K \varphi$$

Usando este resultado llegamos a la completud y corrección de la lógica minimal de *PML*, *K*. No hemos hecho una demostración directa, la hemos traído de *MSL*.

Para la lógica *S4* se obtiene un resultado similar.

$$\mathit{MODO(S4)} \vdash_{MSL} \forall u TRANS(\varphi)[u] \Longleftrightarrow \vdash_{S4} \varphi$$

Ahora, los teoremas de *completud* y *corrección* se demuestran con facilidad.

Comentario 390 *Si alguien me preguntara que qué hemos obtenido, la respuesta sería que ahora tenemos a una serie de lógicas preciosamente enmarcadas (ver figura: 13.8).*

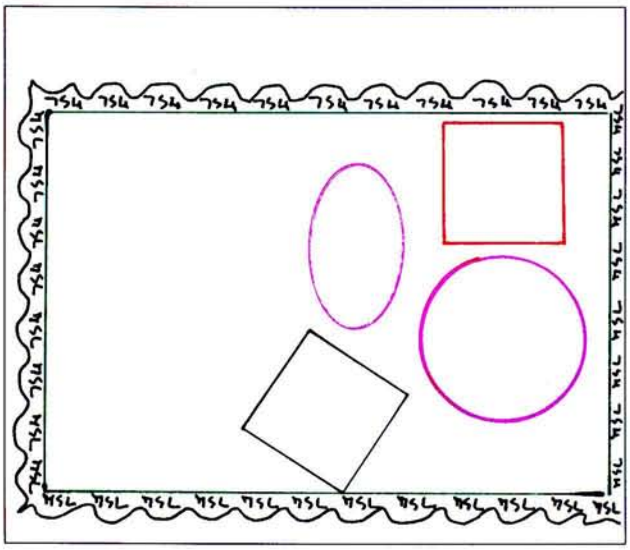

Figura 13.8: *Marco multivariado*

Bibliografía

[1] Abramsky, S, Gabbay, D. y Maibaum, T. [1992-2000]. *Handbook of Logic in Computer Science.* vol 1 a 6. OUP. Oxford. U.K.

[2] Allwein, G.y Barwise, J. [1996]. *Logical Reasoning with Diagrams.* Oxford University Press. New York. USA.

[3] Barwise, J y Etchemendy, J. [1994]. *Hyperproof.* CSLI. Stanford. USA.

[4] van Benthem, J. [1975]. *"A note on modal formulae and relational properties"*, **The Journal of Symbolic Logic**, vol. 40, n. 1, pp. 55-58.

[5] van Benthem, J. [1977]. *"Modal logic as second order logic"*, Mathematisch Institut, University of Amsterdam.

[6] van Benthem, J. [1983]. *Modal Logic and Classical Logic*, Naples, Bibliopolis.

[7] van Benthem, J. [2001]. *Correspondence theory.* (en [12])

[8] Clavel, M. y Manzano, M. [1997]. *"Mapas de Instituciones: de la Lógica Modal S4 a la lógica multivariada"* en

[9] Estany, A. y otros eds. [1997]. *Actas del II Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia.* Servei de Publicaciones de la UAB. Barcelona. España.

[10] D. Gabbay [1994] *What is a Logical System?* Oxford University Press. Oxford U.K.

[11] Gabbay, D. Hogger, G. y Robinson, J. [1993-1998]. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming.* vol 1 a 6. OUP.

[12] Gabbay, D y Guenthner, F. [2001]. *Handbook of Philosophical Logic 2^{nd}* edition. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. Holanda.

[13] Gerbrandy, J. y otros eds. *JFAK: Essays dedicated to Johan van Benthem on the occasion of his 50^{th} birthday.* Amsterdam University Press. Amsterdam. Holanda.

[14] Henkin, L. [1950]. *"Completeness in the theory of types"*. **JSL** vol. 15, pp. 81-91.

[15] Henkin, L. [1953]. *"Banishing the rule of substitution for functional variables"*. **JSL** vol.18, num. 3 pp. 201-208.

[16] Huertas, A. [1994]. *Modal Logic and Non-Classical Logic,* tesis doctoral de la Universidad de Barcelona.

[17] Huertas, A y Manzano, M. [1995]. *"Partial and Heterogeneous Logic: Cooking up your Logic"* en 10^{th} International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Florencia.

[18] Huertas, A y Manzano, M. [1999]. *"A fashionable partial and heterogeneous mirror for modality"* en [4].

[19] Manzano, M. [1996]. *Extensions of first order logic*. Number 19 in Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press. Cambridge. U.K.