

Lógica Modal Hoy

María Manzano mara@usal.es

Marzo 2005

1. Posibilidad y necesidad

Las lógicas modales se definieron diciendo que en ellas la verdad puede ser calificada; esto es, las sentencias adquieren una dimensión autorreflexiva, además de la meramente descriptiva o denotativa.

Calificativos más usados: *necesario, obligatorio, siempre, de ahora en adelante, después de ejecutar una acción, sabido, conocido, etc.*

Los lógicos modales crearon un formalismo capaz de captar situaciones dinámicas, de relativizar la verdad.

Desde una perspectiva actual:

- ★ herramientas para identificar fragmentos interesantes de la lógica clásica
- ★ lenguajes a medida para tareas de modelaje e inferencia

Condicional e implicación

Las denominadas *paradojas de la implicación material* fueron anticipadas por los filósofos medievales.

- Una proposición verdadera es implicada por cualquier proposición

$$q \rightarrow (p \rightarrow q)$$

- Toda proposición falsa implica cualquier proposición

$$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$$

- Todas las proposiciones están conectadas por implicación

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$$

Siglo XX

★ MacColl (1906) introduce las operaciones de:

disyunción: $(a + b)$

negación: (a')

implicación: $(a : b)$

equivalencia: $(a = b)$

y sostiene que es válida

$$(a : b) : ((a') + b)$$

pero no lo es

$$(a : b) = ((a') + b)$$

★ Lewis (1918) observa distintos sentidos de la disyunción:

α : Sócrates murió o Sócrates es una piedra

β : Frank me ama o Frank no me ama

Nueva implicación: $\alpha \hookrightarrow \beta$ equivalente a

$$\Box(\alpha \rightarrow \beta)$$

Semántica

★ Lukasiewicz

La interpretación de las conectivas como funciones veritativas es ciertamente fructífera. Sin embargo, ¿cómo interpretar $\Diamond\varphi$ y $\Box\varphi$?, ninguna de las conectivas monarias sobre $\{1, 0\}$ serviría para ello. Una posibilidad es tomar más valores de verdad. Así:

φ	$\Box\varphi$	φ	$\Diamond\varphi$
1	1	1	1
1/2	0	1/2	1
0	0	0	0

★ Carnap (Semántica para S5)

Idea retomada en modelos canónicos para prueba de completud.

U : descripciones de estados

s : un estado

p : proposición atómica

$U, s \Vdash p$ syss $p \in s$

$U, s \Vdash \Box\varphi$ syss para todo $t \in U : U, t \Vdash \varphi$

★ Kripke (Semántica actual)

Muy versátil, permite poner énfasis en las distintas relaciones de accesibilidad.

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, \langle p^{\mathcal{A}} \rangle_{p \in \mathbf{ATOM}} \rangle$$

$\mathbf{W}$: estados, mundos, situaciones, puntos,...

$\mathbf{R}$: relación de accesibilidad

$p^{\mathcal{A}}$ conjunto de mundos donde p es verdadera

$$\mathcal{A}, s \Vdash p \text{ syss } s \in p^{\mathcal{A}}$$

$$\mathcal{A}, s \Vdash \Diamond \varphi \text{ syss } \exists t (t \in \mathbf{W} \ \& \ \langle s, t \rangle \in \mathbf{R} \ \& \ t \in \mathcal{A}, t \Vdash \varphi)$$

★ Lógica multimodal

Permite tener varias relaciones de accesibilidad

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{W}, \langle \pi^{\mathcal{A}} \rangle_{\pi \in \mathbf{REL}}, \langle p^{\mathcal{A}} \rangle_{p \in \mathbf{ATOM}} \rangle$$

$\mathbf{W}$: estados, mundos, situaciones, puntos,...

$\pi^{\mathcal{A}}$: una relación de accesibilidad para cada $\pi \in \mathbf{REL}$

$p^{\mathcal{A}}$ conjunto de mundos donde p es verdadera

$$\mathcal{A}, s \Vdash \langle \pi \rangle \varphi \text{ syss }$$

$$\exists t (t \in \mathbf{W} \ \& \ \langle s, t \rangle \in \pi^{\mathcal{A}} \ \& \ t \in \mathcal{A}, t \Vdash \varphi)$$

Lecturas de Necesario:

Lógica, Física, Teorías del Tiempo, Teorías del Conocimiento, de la Creencia, de la Moral,...

φ es necesariamente verdadero

φ es siempre verdadero

φ es obligatorio

$\Box\varphi$: φ es sabido

φ es creído

φ es demostrable (en la Aritmética)

φ es verdadero tras ejecutar el programa

Por consiguiente, no hay una única lógica modal, sino multitud de ellas. Ello se concreta a nivel sintáctico y semántico.

Sintácticamente: distintos axiomas
distintas lógicas

Semánticamente: distintas propiedades
relación de accesibilidad

2. Semántica relacional: Impacto

Estudiando la clase de los modelos de Kripke y la validez en un modelo se demuestra:

- ★ $T := \Box\varphi \rightarrow \varphi$ es válida, si $\mathbf{R}$ es **reflexiva**
- ★ $4 := \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ es válida, si $\mathbf{R}$ es **transitiva**
- ★ $D := \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ es válida para $\mathbf{R}$ **serial**
- ★ $B := \varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ es válida para $\mathbf{R}$ **simétrica**
- ★ $5 := \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ es válida para $\mathbf{R}$ **euclídea**

Preguntas típicas de esta línea de investigación:

Dadas: $\mathcal{P}$ (propiedad) y $\mathcal{K}$ (clase estructuras relacionales que la satisfacen). Sea Γ el conjunto de todas las fórmulas modales verdaderas en $\mathcal{K}$,

$$\Gamma = \{\varphi \in \text{FORM}(\text{ML}) \mid \mathcal{A} \Vdash \varphi, \text{ para toda } \mathcal{A} \in \mathcal{K}\}$$

¿Podemos *axiomatizar* Γ en lógica modal?

¿Hay un cálculo $\text{CAL}(\Delta)$ para Γ ?

Completud y Corrección

Expresamos *completud* y *corrección* así:

$$\vdash_{CAL(\Delta)} \varphi \quad \text{syss} \quad \models_{\mathcal{R}} \varphi$$

¿Qué problemas resuelven estos teoremas?

- Describir recursivamente propiedades de las estructuras de $\mathcal{R}$.
- Encontrar una buena semántica para un cálculo deductivo $CAL(\Delta)$.

Los axiomas de una lógica modal intentan caracterizar las propiedades de la relación de accesibilidad que les es propia. Usando los resultados anteriores junto a las técnicas de construcción de modelos canónicos (o de filtrado), obtenemos equivalencias entre semántica y cálculo, por ejemplo:

★ Una fórmula modal es un teorema de *S4* syss es verdadera en todos los *modelos* de Kripke *reflexivos* y *transitivos*.

Correspondencia

Dada propiedad $\mathcal{P}$, ¿podemos axiomatizarla finitamente en lógica modal?

¿Hay Γ modal, finito, tal que para cada $\mathcal{A}$:
 $\mathcal{A} \models \Gamma$ sys $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$?

Las fórmulas modales puede ser eficazmente traducidas a lógica clásica

$$\text{TRANS}^{\Box}(\perp)[u] = u \neq u \quad \text{TRANS}^{\Box}(p)[u] = Pu$$

$$\text{TRANS}^{\Box}(\neg\varphi)[u] = \neg\text{TRANS}^{\Box}(\varphi)[u]$$

$$\text{TRANS}^{\Box}(\varphi \rightarrow \psi)[u] = (\text{TRANS}^{\Box}(\varphi)[u] \rightarrow \text{TRANS}^{\Box}(\psi)[u])$$

$$\text{TRANS}^{\Box}(\Box\varphi)[u] = \forall v(Ruv \rightarrow \text{TRANS}^{\Box}(\varphi)[v])$$

de manera que se puede demostrar que la validez modal equivale a la de la traducida en los modelos de ciertas teorías relacionales

$$\models \varphi \text{ en PML} \iff \models_{\mathfrak{G}} \forall u \text{TRANS}(\varphi)[u]$$

Definibilidad

¿Hasta qué punto la lógica modal define las propiedades de la relación de accesibilidad?

Toda fórmula modal se traduce a una de primer orden, pero hay algunas que equivalen a fórmulas de primer orden que sólo emplean un relator binario (para la relación de accesibilidad).

Durante un tiempo parecía que la lógica modal proposicional y la de primer orden (usualmente con un único relator binario) se correspondían. Pero se demostró que no era el caso.

Contraejemplos

El denominado axioma de McKinsey

$$M := \Box \Diamond \varphi \rightarrow \Diamond \Box \varphi$$

caracteriza una propiedad que no puede ser definida mediante ningún conjunto de sentencias de ese lenguaje de primer orden.

Hay propiedades binarias muy simples que sin embargo no se expresan mediante ningún esquema modal. Por ejemplo, la asimetría, la irreflexividad.

El lenguaje modal puede entenderse como el lenguaje ideal para expresar propiedades de las relaciones binarias, aunque puede mejorarse.

3. Lenguaje para relaciones binarias

¿Por qué empleamos estructuras relacionales?

- ▶ Abundan. Casi todas las estructuras matemáticas pueden ser vistas así. La lógica modal extiende su radio de acción.
- ▶ Permite centrarse en propiedades de la relación de *accesibilidad* de la estructura (órdenes parciales, relaciones de equivalencia, grafos y álgebras varias).

Sin embargo, estas estructuras ya se empleaban profusamente en muchas áreas de la matemática y de la informática sin usar lógica modal.

- ▶ La lógica modal y la clásica se complementan.

Moda Modal

¿Qué se gana al utilizar la lógica modal?

- ▶ Entender, precisar y axiomatizar las estructuras compuestas por *estados*, *transiciones entre estados* y *procedimientos*
- ▶ Expresión formal concisa (operador diseñado *ad hoc*)
- ▶ Lógicas modales *decidibles*, a diferencia de la lógica de primer orden.
- ▶ Enfoque *local*: Para estudiar y comprender las *estructuras de transiciones entre estados* nos situamos dentro.
- ▶ Perspectiva *interna* (AUTÓMATA:= se sitúa dentro del modelo y analiza los estados accesibles)

¿Qué defectos tiene la lógica modal?

Asimetría esencial:

- ▶ Los estados son cruciales
- ▶ No podemos referirnos a ellos
- ▶ Se complica el cálculo deductivo con herramientas del metalenguaje

4. Lógica temporal

Nuevos operadores modales:

$\langle P \rangle \varphi$ Alguna vez en el pasado, φ

$\langle F \rangle \varphi$ Alguna vez en el futuro, φ

$[P] \varphi$ Siempre en el pasado, φ

$[F] \varphi$ Siempre en el futuro, φ

$\Box \varphi \leftrightarrow_{Df} [P] \varphi \wedge \varphi \wedge [F] \varphi$ Siempre

$\Diamond \varphi \leftrightarrow_{Df} \langle P \rangle \varphi \vee \varphi \vee \langle F \rangle \varphi$ Alguna vez

Prior (1967) formula varias tesis sobre el tiempo, que servirán de axiomas en su lógica temporal

$[F] \varphi \rightarrow \langle F \rangle \varphi$ Lo que siempre será verdadero, lo será alguna vez

$\langle F \rangle \varphi \rightarrow \langle F \rangle \langle F \rangle \varphi$ Si φ será verdadero alguna vez, entonces será alguna vez verdadero que φ será verdadero alguna vez

$\neg \langle F \rangle \varphi \rightarrow \langle F \rangle \neg \langle F \rangle \varphi$ Si φ no será verdadero nunca, entonces será alguna vez verdadero que φ no será verdadero nunca

$[F](\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ([F]\varphi \rightarrow [F]\psi)$ Si siempre a partir de ahora, ψ se sigue de φ , entonces si φ es siempre verdadero también ψ será siempre verdadero

Novedad: el pasado y el futuro son interdefinibles

$\varphi \rightarrow [P]\langle F \rangle \varphi$ Lo que es verdadero, fue siempre verdadero que alguna vez sería verdadero

$\varphi \rightarrow [F]\langle P \rangle \varphi$ Lo que es verdadero, será siempre verdadero que alguna vez fue verdadero

Estos axiomas de la lógica temporal K_t expresan propiedades muy generales de los operadores temporales, independientes de la naturaleza de la relación de orden que representará al tiempo.

Aplicaciones

Tiempos verbales

q	María canta
$\langle F \rangle q$	María cantará
$\langle P \rangle q$	María cantó
$\langle P \rangle \langle P \rangle q$	María había cantado
$\langle F \rangle \langle P \rangle q$	María habrá cantado
$\langle P \rangle \langle F \rangle q$	María cantaría

Tragicomedia de Calisto y Melibea

$C :=$ Calisto ama a Melibea
 $M :=$ Melibea ama a Calixto
 $D :=$ Calixto es dichoso

Alguna vez amó Calisto a Melibea

$$\langle P \rangle C$$

El amor de Melibea por Calisto fue siempre correspondido

$$[P] (M \rightarrow C)$$

Melibea no amaba a Calisto en el mismo instante en que Calisto amaba a Melibea

$$\langle P \rangle (\neg M \wedge C)$$

Te amo ahora y siempre te amaré (Calisto a Melibea)

$$C \wedge [F] C$$

Te amo ahora, pero dejaré de hacerlo en algún momento (Melibea a Calisto)

$$M \wedge \langle F \rangle \neg M$$

Sólo si siempre me amas seré feliz

$$[F] D \rightarrow [F] M$$

¿Qué propiedades podemos exigir a la relación temporal?

R es una relación *transitiva*, *lineal hacia atrás*, *ramificado hacia el futuro*.

Axiomas modales de la lógica temporal (añadidos a la minimal)

$\langle F \rangle \langle F \rangle \varphi \rightarrow \langle F \rangle \varphi$ para la transitividad

$(\langle P \rangle \varphi \wedge \langle P \rangle \psi) \rightarrow ((\langle P \rangle (\varphi \wedge \psi) \vee (\langle P \rangle (\varphi \wedge \langle P \rangle \psi)) \vee (\langle P \rangle (\langle P \rangle \varphi \wedge \psi)))$ para un pasado lineal

Tiempo lineal

R es una relación de *orden lineal*, en ambos sentidos

Exigimos que la relación esté *conectada*, esto equivale a evitar ramificaciones en ambos sentidos por lo que añadimos a la lógica el axioma para un futuro también lineal

$$(\langle F \rangle \varphi \wedge \langle F \rangle \psi) \rightarrow (\langle F \rangle (\varphi \wedge \psi) \vee (\langle F \rangle (\varphi \wedge \langle F \rangle \psi)) \vee (\langle F \rangle (\langle F \rangle \varphi \wedge \psi)))$$

No podemos expresar

La relación temporal es *asimétrica* y es *irreflexiva*, pero eso no lo podemos expresar en este lenguaje modal.

¿Preguntas?

- ¿Hay un inicio y un fin?: Ni α ni ω

$\mathbf{R}(\neg\alpha) \quad \forall s \exists t \langle t, s \rangle \in \mathbf{R} \quad \text{no hay principio}$

$\mathbf{R}(\neg\omega) \quad \forall s \exists t \langle s, t \rangle \in \mathbf{R} \quad \text{no hay fin}$

Axiomas:

$\mathbf{A}(\neg\alpha) \quad [F] \varphi \rightarrow \langle F \rangle \varphi$

$\mathbf{A}(\neg\omega) \quad [P] \varphi \rightarrow \langle P \rangle \varphi$

- *Densidad* $\mathbf{R}_\rho$

$\forall st \exists r (\langle s, t \rangle \in \mathbf{R} \implies \langle s, r \rangle \in \mathbf{R} \& \langle r, t \rangle \in \mathbf{R})$

Axioma modal:

$\mathbf{A}_\rho \quad \langle F \rangle \varphi \rightarrow \langle F \rangle \langle F \rangle \varphi \quad \text{para la densidad}$

- *Continuidad* $\mathbf{R}_\xi$: Si cortamos el orden en dos hay un elemento en el medio, no hay agujeros

Axioma modal:

$\Box([P] \varphi \rightarrow \langle F \rangle [P] \varphi) \rightarrow ([P] \varphi \rightarrow [F] \varphi)$

5. Lógicas Híbridas

Asimetría lógica modal:

- ▶ Los estados son cruciales
- ▶ No podemos referirnos a ellos

En lenguajes híbridos se puede:

- ★ introducir referencias explícitas a los elementos del dominio de un modelo; por ejemplo, momentos específicos (días años, etc.)
- ★ mejorar el poder expresivo; por ejemplo, modelar indexicales temporales (ayer, hoy, mañana, ahora,...)
- ★ elegante teoría de la prueba, próxima a los sistemas deductivos etiquetados
- ★ definir propiedades de marcos relevantes para lógica temporal (irreflexividad, asimetría)

Cómo se crea una lógica híbrida

- Antecedente: Prior en sus últimos trabajos utiliza términos para referirse a instantes de tiempo y los trata como fórmulas

$$F(i \wedge p)$$

dice que el instante i y la proposición p están en el futuro y coinciden. Esto es, p ocurre en el instante futuro i .

- Extender lenguaje añadiendo un conjunto de nominales

$$\text{ATOM} \cup \text{NOM}$$

la idea es usar fórmulas para referirse a los mundos

- Agregar un conjunto de operadores modales

$$\{\@_i \mid i \in \text{NOM}\}$$

- Formar fórmulas en este lenguaje extendido, usando nuevas reglas:

$$1. \text{NOM} \subseteq \text{FORM} \qquad 2. \@_i \varphi \in \text{FORM}$$

- Interpretar $i \in \text{NOM}$ en $\mathcal{A}$ como clase unitaria:
 $i^{\mathcal{A}} = \{a\}$
- Definimos la interpretación de fórmulas con nuevos operadores

$$\mathcal{A}, w \Vdash @_i \varphi \quad \text{syss} \quad \mathcal{A}, i^{\mathcal{A}} \Vdash \varphi$$

Cambia la lógica:

★ La fórmula

$$\Diamond(\varphi \wedge p) \wedge \Diamond(\varphi \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$$

no es válida, ni tan siquiera lo es

$$\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$$

pero sí lo es

$$\Diamond(i \wedge p) \wedge \Diamond(i \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$$

ya que cada nominal es verdadero en un único estado o mundo.

Mayor capacidad expresiva

Añadimos a la lógica modal los conceptos de *identidad* y *referencia*:

★ Podemos verificar si dos estados coinciden

$@_{ij}$ indica que son idénticos los estados cuyos nombres son i y j

★ *Reflexividad, simetría y transitividad* de la identidad se expresan como esquemas axiomáticos

$$@_ii \quad @_ij \rightarrow @_ji \quad @_ij \wedge @_jk \rightarrow @_ik$$

★ En idénticos estados las proposiciones también

$$@_{ij} \rightarrow (@_i\varphi \leftrightarrow @_j\varphi)$$

★ Podemos expresar que dos estados están relacionados mediante la relación de accesibilidad

$@_s\Diamond t$ indica que están relacionados mediante R los estados cuyos nombres son s y t

Definibilidad

Algunas de las propiedades de la relación de accesibilidad que eran definibles en la lógica modal minimal (o en la temporal) se definen en la híbrida de forma más concisa:

★ *Reflexividad, simetría y transitividad* de la relación de accesibilidad ahora se expresan usando los nominales

$$i \rightarrow \Diamond i \quad i \rightarrow \Box \Diamond i \quad \Diamond \Diamond i \rightarrow \Diamond i$$

★ *Densidad y determinismo* (la relación de accesibilidad es una función) ahora se concretan así:

$$\Diamond i \rightarrow \Diamond \Diamond i \quad \Diamond i \rightarrow \Box i$$

Aumenta la definibilidad

Lo más importante es que muchas de las propiedades que no podían ser expresadas en lógica modal (o temporal) ahora pueden serlo:

★ *Irreflexividad, asimetría, antisimetría e intransitividad* de la accesibilidad ahora se expresan

$$i \rightarrow \neg \Diamond i \qquad i \rightarrow \neg \Diamond \Diamond i$$

$$i \rightarrow \Box(\Diamond i \rightarrow i) \qquad \Diamond \Diamond i \rightarrow \neg \Diamond i$$

★ También *universalidad, tricotomía* y que haya *al menos dos estados* (o cuarenta) se puede expresar:

$$\Diamond i \qquad @_j \Diamond i \vee @_j i \vee @_i \Diamond j \qquad @_i(\neg j \wedge \neg k) \rightarrow @_j k$$

Cálculo

Al cálculo deductivo modal le añadimos reglas para las nuevas fórmulas

Tenemos reglas para la negación

$$\frac{\@_s \neg \varphi}{\neg \@_s \varphi} [\neg] \quad \frac{\neg \@_s \neg \varphi}{\@_s \varphi} [\neg \neg]$$

Y para la conjunción; esta dice que si la fórmula

$$(\varphi \wedge \psi)$$

es verdadera en el estado s también lo son separadamente las fórmulas φ y ψ en ese estado

$$\frac{\@_s(\varphi \wedge \psi)}{\@_s \varphi \quad \@_s \psi} [\wedge] \quad \frac{\neg \@_s(\varphi \wedge \psi)}{\neg \@_s \varphi \mid \neg \@_s \psi} [\neg \wedge]$$

De forma similar para el resto de conectivas binarias. La simplificación de la nueva conectiva es también una regla

$$\frac{\@_s \@_t \varphi}{\@_t \varphi} [@] \quad \frac{\neg \@_s \@_t \varphi}{\neg \@_t \varphi} [\neg @]$$

Finalmente, la combinación de los operadores modales se resuelve así

$$\frac{\frac{\frac{\@_s \Diamond \varphi}{\@_s \Diamond a} [\langle \pi \rangle]}{\@_a \varphi} \quad \frac{\frac{\neg \@_s \Diamond \varphi}{\neg \@_t \varphi} \quad \@_s \Diamond t}{[\neg \langle \pi \rangle]} :$$

Hay otro grupo de reglas que afectan a los nominales junto al operador @ ya que ellos proporcionan igualdad entre estados. Por ejemplo, reflexividad y simetría

$$\frac{[s \text{ está en la rama}]}{\@_s s} \quad \frac{\@_t s}{\@_s t}$$