Capítulo 4

Teoría de la Demostración

4.1. Introducción

En lógica construimos demostraciones en cálculos deductivos: ellas y estos constituyen el objeto de estudio en *Teoría de la Demostración.*

No hemos dejado de estar interesados en la verdad —en sentido matemático; por ejemplo, la de un enunciado aritmético en el modelo de los naturales, o la validez o verdad en todo modelo— pero ahora contamos con un mecanismo para establecerla, el cálculo.

¿Por qué queremos un cálculo?

Hay muchas razones para querer un cálculo y no contentarnos con el mero concepto de consecuencia que proporciona la semántica, que es poco operativo. Se me ocurren las siguientes:

1. *"Implementar"* es más sencillo, y esto es algo difícil de concebir sin el soporte de un cálculo. (Estoy pensando en un demostrador de teoremas.)

2. Un cálculo es un *modelo mejor del proceso mental* que seguimos para extraer conclusiones de ciertas hipótesis que su correspondiente formulación semántica. (No vamos al universo matemático a verificar que cada modelo de las hipótesis lo es también de la conclusión, sino que, sin levantarnos de la silla, transformamos las hipótesis para obtener la conclusión.)

3. Se usan *menos recursos matemáticos* para demostrar en un cálculo que para hacerlo semánticamente.

4. *Convencer* es más sencillo

   y en especial,

5. No tendrás que demostrar que tu prueba lo es en efecto. (Hay incluso un *algoritmo que comprueba* si una deducción lo es conforme a las reglas del cálculo.)

Desde los griegos hasta nuestros días se han desarrollado muchos procedimientos de prueba: la propia silogística, los métodos axiomáticos, los de deducción natural, los de secuentes, los tableaux semánticos y los de resolución, entre otros.

Presentaré varios para poder compararlos, acompañados de algún ejemplo sencillo de deducción en ellos. Por razones obvias de extensión me limitaré en este capítulo a la lógica clásica de primer orden[1] sin igualdad, aunque muchas de las características que quisiera destacar ya aparecen en la proposicional, su decidibilidad la singulariza en exceso.

¿Qué resultados se establecen en Teoría de la Demostración?

Por descontado, si un cálculo se ha introducido como contrapartida sintáctica a la noción de verdad en todo modelo, lo primero que se plantea es si este objetivo se ha alcanzado; esto es, si contamos con los teoremas de corrección y completud. Puesto que estos teoremas ya han sido tratados en la sección 2.4 del capítulo 2 no serán abordados aquí.

¿Existe alguna diferencia entre tener una demostración de un teorema en un cálculo deductivo y saber que es verdadero?

No nos ocuparemos en este capítulo del teorema de incompletud de Gödel, que por cierto responde afirmativamente a la pregunta: hay una gran diferencia entre verdad y demostrabilidad. En un modelo dado, por ejemplo el de la aritmética

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, s, +, \cdot \rangle$$

cada enunciado ha de ser verdadero o falso, pero hay verdades indemostrables. El que haya de ser necesariamente verdadero o falso no significa que nosotros sepamos siempre dilucidarlo: éste es el caso de la *conjetura de Goldbach*[2]. De los resultados de incompletud nos ocupamos en capítulos aparte, los hay tanto de incompletud de teorías de primer orden como de cálculos deductivos de orden superior. Este primer resultado establece que la teoría de los números naturales no es completa, habiendo en $Th(\mathcal{N})$ verdades sin prueba[3].

Pero tanto de los resultados de Gödel como de la capacidad expresiva de la lógica de segundo orden se desprende que ésta es incompleta en este otro sentido: hay fórmulas válidas en SOL que no son demostrables[4].

Los teoremas mencionados, son hasta cierto punto externos: establecen la relación entre demostrabilidad y verdad —o validez—. Hay otros teoremas internos, propios, característicos de esta teoría: son los de *Eliminación del Corte* —el Hauptsatz de Gentzen—, teorema de Herbrand, teoremas de Robinson y teorema de Craig. De todos ellos me ocupo en la última sección de este capítulo; aunque no los demuestro, los enuncio y comento brevemente.

[1] Otros sistemas lógicos, para lógicas no clásicas aparecen en la Parte II y en la Parte III de este volumen.

[2] En la novela *El tío Petrus y la conjetura de Goldbach* su protagonista, tras años de infructuosos intentos de demostrarla, se consuela pensando que la misma es una de esas verdades indemostrables que Gödel señalara.

[3] Lo vimos en 3.7

[4] Se demostrará en 10.5

Otro aspecto que también está directamente relacionado con las cuestiones aquí planteadas es el siguiente, *¿cómo programamos a una máquina para que use alguno de nuestros cálculos? ¿son implementables?*

Está claro que si la lógica no es decidible, y esto es lo que nos sucede en primer orden, no hay ningún algoritmo que resuelva la pertenencia a VAL. Pero de la misma manera que nosotros probamos teoremas *"a mano"*, usando el cálculo, podríamos enseñar a una máquina a hacerlo. De alguna forma deberíamos trasladarle nuestra experiencia y pericia. Los cálculos que mejor se prestan para ser implementados son los de resolución y los de tableaux, razón por la que los incluyo aquí. En el libro de Melving Fitting [6] se ha elegido Prolog como lenguaje de programación y también está escrito en él el programa *Winke*[5], que implementa una modificación del cálculo de tableaux con corte, que lo convierte en más efectivo.

En teoría automática de teoremas se persiguen dos objetivos: (1) demostrar teoremas —no triviales— y (2) hacerlo automáticamente. La experiencia nos enseña que desgraciadamente estos objetivos son bastante incompatibles; desde los años sesenta se han ido desarrollando demostradores y se observa que cuanto más complejo es el teorema, más tarda el demostrador y el crecimiento tiende a ser exponencial. Así que lo interesante reside en proporcionar al programa procedimientos heurísticos, trasmitirle nuestras estrategias, intuiciones y conocimiento. Sucede con frecuencia que éstas dependen del tema tratado, por lo que lo natural sería diseñar sistemas expertos: de *teoría de grupos* o de *geometría descriptiva*, pongamos por caso.

Gran parte del trabajo hecho en demostración automática se basa en *Resolución*, un método desarrollado por Robinson en los años 60, que está basado en los teoremas de Herbrand.

4.2. Silogística

Empecemos por Aristóteles, que fue el primero que de manera sistemática, trató con una cierta profundidad la relación que se establece entre las sentencias que forman parte de una razonamiento, observando que para estudiar la naturaleza de la deducción hace falta analizar primero la estructura de las que constituyen sus hipótesis y su conclusión. En la lógica tradicional, de Aristóteles a Leibniz, incluso en Boole, ésta se toma de la gramática de las lenguas naturales[6]; es decir, una sentencia se analiza en términos de *sujeto* S y *predicado* P.

Formas

Se distinguen cuatro formas típicas de proposiciones: A, E, I y O

A : Todo S es P (universal afirmativa)

[5] Este programa lo utilizo en clases prácticas, consultad http://www.dcs.kcl.ac.uk/staff/endriss/WinKE/

[6] Nosotros ahora utlilizamos un análisis más rico, basado en la concepción de Frege.

E : Ningún S es P (universal negativa)
I : Algún S es P (particular afirmativa)
O : Algún S no es P (particular negativa)

Estas cuatro formas aparecen relacionadas en el denominado cuadro de Boecio (ver figura: 4.1), así:

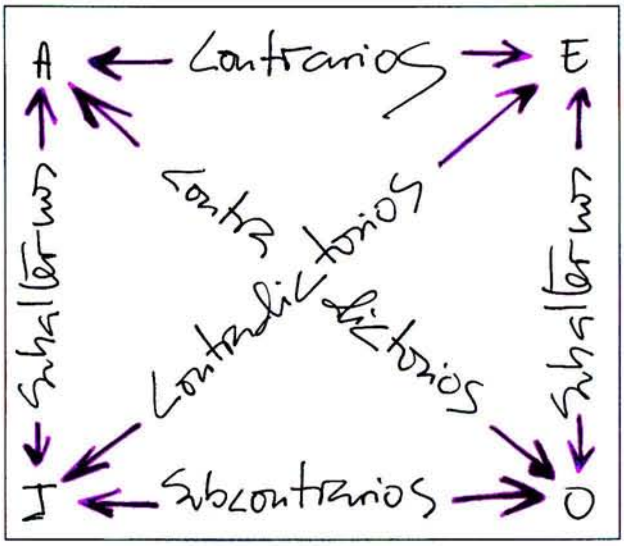

Figura 4.1: *Cuadro de Boecio*

Silogismo

El silogismo categórico es una estructura de proposiciones, propia de la lógica tradicional aristotélica, que se caracteriza:

1. Por tener dos premisas (mayor y menor) y una conclusión
2. Por tener sólo tres términos: Mayor P, medio M y menor S

Figuras

Se llaman figuras del silogismo a las distintas posiciones que ocupa el término medio —que desaparece de la conclusión— y que se expresan así:

Primera figura	Segunda figura	Tercera figura	Cuarta figura
$M\ P$	$P\ M$	$M\ P$	$P\ M$
$S\ M$	$S\ M$	$M\ S$	$M\ S$
$\overline{S\ P}$	$\overline{S\ P}$	$\overline{S\ P}$	$\overline{S\ P}$

Modos

El modo de un silogismo resulta de la combinación de las formas que contiene. Para cada figura hay sesenta y cuatro modos posibles. Una forma de construirlos es la que sigue:

$$\begin{array}{c} A \\ A \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} E \\ A \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} I \\ A \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} O \\ A \\ \hline A \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \\ E \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} E \\ E \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} I \\ E \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} O \\ E \\ \hline A \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \\ I \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} E \\ I \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} I \\ I \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} O \\ I \\ \hline A \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \\ O \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} E \\ O \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} I \\ O \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} O \\ O \\ \hline A \end{array}$$

Como puede verse, todos los casos que hemos construido concluyen en A; de igual modo en la siguiente vuelta se construyen los que concluyen en E, luego en I y finalmente en O, obteniéndose los sesenta y cuatro modos. Como hay cuatro figuras, el resultado final es de 256 silogismos posibles. Por supuesto, no todos son válidos. La lógica tradicional selecciona de entre ellos a 24, a los que considera silogismos válidos, a muchos de los cuales se les atribuyeron nombres nemotécnicos en el medioevo. Son los siguientes:

Primera figura	Segunda figura	Tercera figura	Cuarta figura
BARBARA	CESARE	DARAPTI	BAMALIP
CELARENT	CAMESTRES	FELAPTON	CAMENES
DARII	FESTINO	DATISI	DIMATIS
FERIO	BAROCO	DISAMIS	FESAPO
AAI	*AEO*	BOCARDO	FRESISON
EAO	*EAO*	FERISON	*AEO*

Comentario 137 *Un ejercicio interesante es el de comprobar, uno a uno los silogismos, para enmendar, en lo posible la plana a los clásicos. Efectivamente, no todos los seleccionados son razonamientos válidos con los estándares actuales.*

Ejemplo 138 *Como ejemplo de razonamiento siguiendo este esquema, pongamos éste:*

Hipótesis 1. *Los misóginos son impresentables*

Hipótesis 2. *Los que guardan silencio ahora son misóginos*

Conclusión *Los que guardan silencio ahora son impresentables*

1. *Las tres proposiciones que contiene son, respectivamente, de la forma* $E\ A\ E$*. Es decir, su modo es*
   E
   A
   E
2. *Este silogismos es del tipo* $CELARENT$*. Por tratarse de un silogismo de la primera figura, tiene la forma*
   $$\begin{array}{l} M \quad P \\ \underline{S \quad M} \\ S \quad P \end{array}$$
3. *Este es su esquema*
   $$\begin{array}{l} M\ E\ P \\ \underline{S\ A\ M} \\ S\ E\ P \end{array}$$
4. *En la lógica actual se expresa así:*
   $$\{\forall x(Mx \to \neg Px), \forall x(Sx \to Mx)\} \vdash \forall x(Sx \to \neg Px)$$
   Donde:
   $Mx := x$ *es un misógino*
   $Sx := x$ *guarda silencio ahora*
   $Px := x$ *es presentable*
5. *Para demostrarlo podemos usar el cálculo deductivo de primer orden, o el visual de los diagramas de Venn*

Llevemos a un diagrama de Venn las hipótesis y la negación de la conclusión (ver figura: 4.2)

Por consiguiente (ver figura: 4.3)

4.3. Cálculos axiomáticos

El cálculo de Frege-Hilbert, más comúnmente denominado de Hilbert, o axiomático, se caracteriza por poseer un cierto número de axiomas —en realidad, esquemas axiomáticos— y de reglas. Los axiomas son fórmulas y las reglas son transformaciones de las fórmulas en fórmulas. Una *prueba* en éste —o en cualquier otro axiomático— se caracteriza como sucesión finita de fórmulas, cada una de las cuales es un axioma o se ha obtenido de las líneas anteriores mediante la aplicación de reglas. Una *prueba de una fórmula* A es una prueba en el sentido anterior, cuya última fórmula es A. Escribimos $\vdash_H A$ para denotarlo.

Los axiomas del cálculo proposicional son los siguientes:

Axioma 1 $A \to (B \to A)$

Axioma 2 $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

Axioma 3 $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

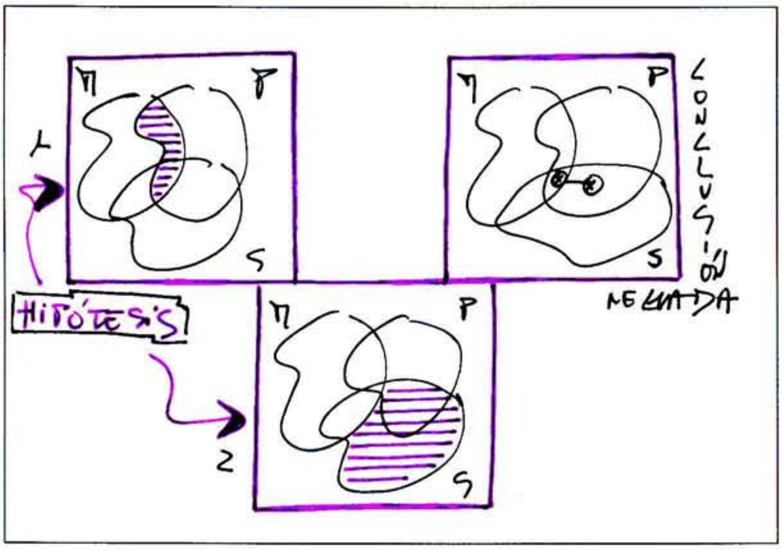

Figura 4.2: *Diagrama de hipótesis y negación conclusión*

Axioma 4 $(A \wedge B) \rightarrow A$

Axioma 5 $(A \wedge B) \rightarrow B$

Axioma 6 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$

Axioma 7 $A \rightarrow (A \vee B)$

Axioma 8 $B \rightarrow (A \vee B)$

Axioma 9 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

Axioma 10 $(((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A)$

Axioma 11 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

Axioma 12 $\neg A \vee A$

A los que para la lógica de primer orden se suman

Axioma 13 $\forall x(C \rightarrow C\left(\frac{\tau}{x}\right))$

Axioma 14 $C\left(\frac{\tau}{x}\right) \rightarrow \exists x C x$

Habiéndose definido previamente la sustitución recursivamente y de tal manera que sólo se sustituyan variables libres.

La única regla del cálculo proposicional es *Modus Ponens:*

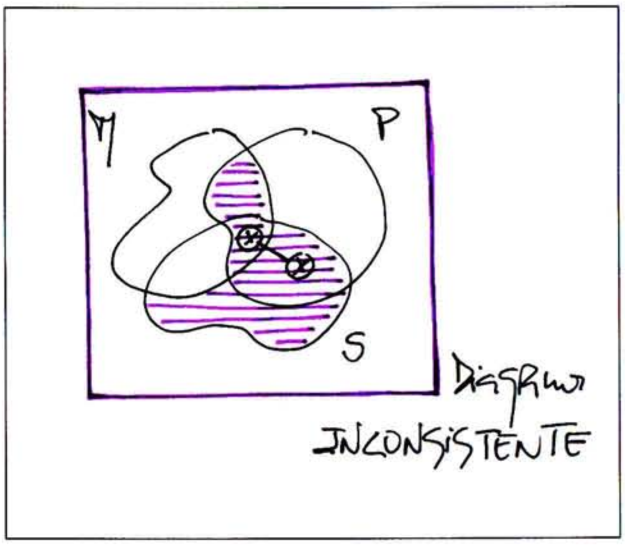

Figura 4.3: *Diagrama inconsistente, razonamineto válido*

Regla 1 Si $\vdash_H A$ y $\vdash_H A \to B$ entonces $\vdash_H B$

Para el de primer orden sin igualdad añadimos estas dos reglas

Regla 2 Si $\vdash_H B \to C\left(\frac{u}{x}\right)$ entonces $\vdash_H B \to \forall x C$

Regla 3 Si $\vdash_H A \to B$ entonces $\vdash_H \exists v(A \to B)$
—en la segunda regla la variable x no está libre en B; en la tercera, v no está libre en B—

Este es un cálculo axiomático para la lógica clásica, suprimiendo el **Axioma 12** obtenemos la lógica intuicionista, suprimiendo también el **Axioma 11** obtenemos la lógica minimal.

Ejemplo 139 *Una demostración de* $p \to p$ *es así:*

1. $p \to (p \to p)$ *Axioma 1*
2. $(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$ *Axioma 2*
3. $p \to p$ *MP 1 y 2*

Ejemplo 140 *Una demostración de* $Rb \to (Rb \to \forall x\,(Rb \vee Qx))$ *es:*

1. $Rb \to Rb \vee Qx$ *Axioma 7*
2. $Rb \to \forall x\,(Rb \vee Qx)$ *Regla 2*
3. $(Rb \to \forall x\,(Rb \vee Qx)) \to (Rb \to (Rb \to \forall x\,(Rb \vee Qx)))$

4. $Rb \rightarrow (Rb \rightarrow \forall x\,(Rb \vee Qx))$ *MP 2 y 3*

Este cálculo está tomado de Gentzen, tal y como lo reproducen Bibel y Ender [2]. Sin embargo, hay presentaciones mucho más escuetas, Gödel redujo considerablemente el número de axiomas y en el libro de Church [4] los axiomas proposicionales se reducen a estos tres:

Axm 1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Axm 2 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Axm 3 $((A \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow A$

El primero se denomina *ley de afirmación del consecuente*, el segundo *ley distributiva del condicional material* y el tercero *ley de la doble negación.*

Hemos usado los signos $\bot$ y $\top$ para lo falso y lo verdadero. Cuando no se tengan como primitivos, se introducen por definición así:

$$\bot :=_{Df} (p \wedge \neg p) \ \text{ y } \ \top :=_{Df} \neg\bot$$

Con el cálculo axiomático se da un método para generar el conjunto VAL de las fórmulas válidas a partir del de los axiomas. Pero un cálculo deductivo, además de mecanizar el concepto de validez, debe ofrecer una réplica del de consecuencia; esto es, debemos indicar cómo obtener conclusiones a partir de un conjunto Γ de hipótesis. Una forma sencilla de hacerlo es incorporar a los axiomas de H las fórmulas de Γ de manera que se defina la deducción a partir de hipótesis basada en la deducción de teoremas lógicos :

$$\Gamma \vdash_H A \ \text{ syss } \ \vdash_{H\cup\Gamma} A$$

Sin embargo, definiéndolo así, sin más cuidado, pueden fallar los teoremas de corrección y monotonía para fórmulas con variables libres. Lo que se debe hacer es modificar levemente las reglas de manera que las restricciones sobre variables libres afecten también a las fórmulas de Γ.

Por ejemplo, no queremos que se pueda demostrar esto

$$\{Px\} \vdash_H \forall x Px$$

El primer metateorema que se demuestra[7] tanto para éste como para otros cálculos es el de la deducción, que dice lo siguiente:

Teorema 141 *(de la deducción) Si* $\Gamma \cup \{A\} \vdash_H B$ *entonces* $\Gamma \vdash_H A \rightarrow B$

Los cálculos axiomáticos son buenos para demostrar metateoremas sobre ellos —el teorema de corrección es casi inmediato— y como hemos visto, permite visualizar a los subcálculos tales como el intuicionista o el minimal de forma

[7] Con detalle puede verse en Marraud [12].

evidente. otra de sus ventajas es que se extienden fácilmente a lógicas no clásicas, como la modal o la dinámica[8], añadiendo axiomas y reglas sobre un lenguaje asímismo extendido, pero conservando el chasis.

Los cálculos axiomáticos son desastrosos para efectuar deducciones en ellos: La razón principal es que puesto que la única regla de inferencia es *Modus Ponens*, para demostrar B debemos encontrar fórmulas A y $A \to B$ de las que deducirla, y la búsqueda de A se efectuará en un conjunto potencialmente infinito, siendo así que no tiene que estar directamente relacionada con B. Por estas mismas razones son inadecuados para la deducción automática y pedagógicamente ingratos.

Muchos de los cálculos que se introducen en este capítulo permitirán una búsqueda sistemática de una prueba de B. Se trata de sistemas que tienen la *propiedad de la subfórmula*; esto es, cada fórmula que aparece en la prueba es muy similar a una subfórmula de B. *Modus Ponens*, que es la regla que hemos apuntado como origen de la dificultad para automatizar el proceso de búsqueda de pruebas, es un caso particular de la regla que en las cálculos de Gentzen se denominan *Reglas de Corte* y que adopta formas diversas.

En Andrews [1] es

$$\text{Si} \vdash B \vee A \ \text{ y } \ \vdash \neg A \vee C \ \text{ entonces } \ \vdash B \vee C$$

Otra regla de inferencia, primitiva o derivada, que puede originar circularidad es la de doble negación

$$\vdash A \ \text{ syss } \ \vdash \neg\neg A$$

Pues bien, usando estas reglas y sin usarlas probamos los mismos teoremas. Este es el denominado *Teorema de eliminación del Corte*, el famoso *Hauptsatz* de Gentzen —Hauptsatz significa enunciado principal—

Comentario 142 *El que todavía se enseñen estos cálculos en el primer año de carrera y se les haga a los alumnos deducir teoremas en ellos me resulta incomprensible, habiendo, como veremos, otras posibilidades. Sin embargo, tanto por razones históricas como porque hay algunas lógicas que sólo cuentan con cálculos axiomáticos, no son completamente prescindibles.*

4.4. Deducción natural

Pese a sus ventajas en el plano metateórico, los axiomáticos no son de manejo intuitivamente fácil, ni reflejan el proceso que sigue alguien que quiera informalmente demostrar un enunciado matemático, donde se utilizan supuestos auxiliares que se puedan luego eliminar; por ejemplo, para demostrar $A \to B$ se supone A y se demuestra B y de esta forma, eliminando el supuesto A se concluye que $A \to B$.

En 1934 se publica *Untersuchungen über das Logische Schliessen* de Gentzen, cuya traducción al francés fue realizada y comentada por Feys y Ladrière. En

[8] Véase 8.5.1 y 9.6.

el prefacio la presentan como una alternativa al estilo Hilbert, al que tachan de artificioso —desde un punto de vista intuitivo— al reducir las deducciones a la transformación de un mínimo conjunto de axiomas. Por el contrario el enfoque de Gentzen es caracterizado por ellos como revelador del uso frecuente y natural de razonar en matemáticas. Ahora se permite introducir la expresión, *tal cosa es verdadera bajo tal suposición*, como elemento formalizado de sus dos sistemas deductivos, tanto en el de *Deducción Natural* como en el de *Secuentes* —implícitamente en los sistemas primeros y explícitamente en los segundos —. La siguiente afirmación de Gentzen fundamenta lo dicho por Feys:

> *Nous voulons édifier un formalisme qui reflète le plus exactement possible les raisonnements logiques qui son réellement utilisés dans les démostrations mathématiques.*

Actualmente se acepta que la presentación de Gentzen es la que mejor refleja los aspectos inferenciales de los sistemas lógicos y por lo tanto es común considerar al cálculo de deducción natural como el más apropiado para una versión inferencial de la lógica.

El primero de los sistemas de Gentzen; se caracteriza por lo siguiente[9]: (1) las reglas de inferencia son más bien reglas de derivación que reglas de demostración —en el sentido de que fueron pensadas para mostrar la validez de inferencias más que para establecer que determinadas fórmulas son teoremas; (2) no hay axiomas sino dos clases generales de supuestos, las premisas o supuestos iniciales y los supuestos adicionales; (3) hay reglas que obligan a la introducción de supuestos adicionales que luego es obligatorio descargar, mientras que no es obligatorio descargar los supuestos iniciales o premisas; (4) los teoremas lógicos se definen como deducciones a partir del conjunto vacío de los supuestos; (5) el significado de las constantes lógicas —al menos en los sistemas de deducción natural estrictos— se fija por medio de reglas de *Introducción* y de *Eliminación* del signo lógico en la conclusión; y (6) una prueba es una sucesión finita de fórmulas donde cada una es o un supuesto inicial, o un supuesto adicional o el resultado de la aplicación de una de las *I*-reglas o *E*-reglas a fórmulas anteriores.

En este cálculo *natural* la deducción parte de supuestos que se transforman mediante reglas de inferencia para conseguir nuevas fórmulas; no hay axiomas. Algunas reglas nos garantizan la independencia de una fórmula respecto a los supuestos usados para conseguirla, eliminándose adecuadamente. Son estas las reglas de *descarga de hipótesis.* Para que una fórmula sea un teorema, todas las hipótesis han tenido que ser convenientemente suprimidas.

El formato de las reglas es siempre el mismo, dividiéndose entre reglas de introducción y de eliminación de la conectiva, o del cuantificador.

Reglas

Estas son sus reglas proposicionales:

[9] Esto que sigue lo dice Sundholm en [19], y yo lo comparto.

1. Introducción y eliminación del condicional

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ I \to \qquad\qquad \frac{A \qquad A \to B}{B}\ E \to$$

2. Introducción y eliminación de la conjunción

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\ I\wedge \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A}\ E1 \wedge \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ E2\wedge$$

3. Introducción de la disyunción

$$\frac{A}{A \vee B}\ I \vee \qquad \frac{B}{A \vee B}\ I\vee$$

4. Eliminación de la disyunción

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ E\vee$$

5. Introducción y eliminación de la negación

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\ I\neg \qquad\qquad \frac{A \quad \neg A}{\bot}\ E\neg$$

6. Regla intuicionista de lo absurdo

$$\frac{\bot}{A}\ \bot \text{ intuicionista}$$

7. Doble negación

$$\frac{((A \to \bot) \to \bot)}{A}\ DN$$

Para el cálculo de primer orden sin igualdad incluimos además:

8. Reglas de generalización

$$\dfrac{A\left(\frac{x}{y}\right)}{\forall x A}\; I\forall \qquad\qquad \dfrac{\forall x A}{A\left(\frac{\tau}{x}\right)}\; E\forall$$

9. Reglas de particularización

$$\dfrac{A\left(\frac{\tau}{x}\right)}{\exists x A}\; I\exists \qquad\qquad \dfrac{\exists x A \qquad \begin{array}{c}\left[A\left(\frac{x}{y}\right)\right]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\; E\exists$$

La lógica clásica incluye todas estas reglas, la intuicionista elimina la de la doble negación y la minimal ésta y la del absurdo.

En el campo de la deducción automática de teoremas se han implementado cálculos de deducción natural; por ejemplo, *AUTOMATH* y *NuPRL*.

Ejemplo 143 *En la lógica minimal demostramos lo siguiente:*

$$\dfrac{\dfrac{[A]}{B \to A}\; I\to}{A \to (B \to A)}\; I\to$$

Ejemplo 144 *Éste es un teorema de la minimal de primer orden:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x A]^2 \qquad \dfrac{[A]^1}{\exists x A}\; I\exists}{\bot}\; E\neg}{\neg A}\; I^1\neg}{\forall x \neg A}\; I\forall}{\neg\exists x A \to \forall x \neg A}\; I^2\to$$

Ejemplo 145 *Éste es un teorema de la clásica de primer orden:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\forall x A]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x \neg A]^2 \qquad \dfrac{[\neg A]^1}{\exists x \neg A}\; I\exists}{\bot}\; E\neg}{A}\; \bot\, c^1}{\forall x A}\; I\forall}{\bot}\; E\neg}{\exists x \neg A}\; \bot\, c^2}{\neg\forall x A \to \exists x \neg A}\; I^3\to$$

Se demuestra con facilidad que los teoremas del cálculo minimal están contenidos en el intuicionista y éstos en el clásico. Por supuesto, no vale la inclusión contraria.

$$MINIMAL \subset INTUICIONISTA \subset CL\acute{A}SICA$$

Al demostrar teoremas en este cálculo se producen pruebas redundantes en las que se introducen fórmulas que luego son eliminadas; sucede especialmente al utilizar la regla del condicional, que es una versión de la de corte. Esto plantea la pregunta de si hay siempre una prueba alternativa, sin corte. La verdad es que sí y su demostración la hizo Gentzen. Para un cálculo similar al que aquí proponemos la demostración de la eliminación del corte, o teorema de normalización se puede consultar en Marraud [12].

El formato de presentación de los cálculos de deducción natural es muy variado, hay quienes utilizan cajas o corchetes anidados, o marcas e interrogantes para indicar en qué estado se encuentra la fórmula; esto es, si ha sido ya descargada. Este cálculo goza de mucho predicamento entre los que confían en el valor propedeútico de las demostraciones formales, como introducción a las informales.

En la sección 11.3.2 se encuentra una reflexión muy interesante —acompañada de reformulación— de la naturaleza de la *deducción natural*. Ésta se lleva a cabo en el cálculo lambda y se origina en 1924, allá por los inicios de la lógica combinatoria, cuando Schönfinkel[10] observó que las inferencias básicas de la lógica son de naturaleza funcional; es decir, que son funciones de fórmulas en fórmulas. Semejantes funciones entre fórmulas lo serán del cálculo lambda: las fórmulas del cálculo de deducción natural son los tipos básicos del cálculo lambda —esta analogía es conocida bajo este epígrafe: *"proposiciones como tipos"*—, las reglas del cálculo de deducción natural son o bien $\lambda-$términos u otras expresiones del $\lambda-$cálculo.

4.5. Cálculo de secuentes

Una aproximación esencialmente distinta a la noción de consecuencia lógica y de sistema deductivo es la que Gentzen [9] ofrece en su *Cálculo de Secuentes*. Según sus propias palabras, éste es un *cálculo logístico* al estilo Hilbert, ya que tiene como objetivo fundamental la demostración de teoremas lógicos —contiene axiomas expresados en términos del cálculo de secuentes— y servirá para determinar qué secuencias son teoremas. La gran diferencia es que sus teoremas lógicos son en el fondo expresiones del metalenguaje: las nuevas fórmulas no son fórmulas sino secuentes. En realidad se asemeja al enfoque antes mencionado de conversión de las inferencias en fórmulas. Se diferencia del de deducción natural porque: (1) introduce el nuevo concepto de secuente; (2) no parte de supuestos, sino de un *secuente básico o axioma* y un conjunto de *reglas de inferencia* que son fundamentalmente *reglas estructurales* y que hacen referencia precisamente a la estructura de los secuentes; (3) introduce un nuevo signo en su lenguaje $\dashv$ para denotar una determinada relación entre antecedente y consecuente del secuente; y por último, (4) precisamente el signo $\dashv$ permite reflejar en su propio lenguaje objeto la noción de consecuencia lógica.

[10]La elaboró Curry en el 1958 y fue redescubierta por Howard en 1980.

Definición 146 *Un **secuente** es una expresión de la forma:*

$$\Gamma \dashv \Omega$$

donde Γ, Ω *son conjuntos de fórmulas cualesquiera.*

Hay dos tipos de reglas de inferencia: las estructurales propiamente dichas y las de operaciones; tanto unas como otras tienen un esquema similar. Aceptando que la secuencia $\Gamma \dashv \Omega$ refleja en el lenguaje de secuentes la noción de inferencia, las reglas, tanto las estructurales como las de operaciones, toman inferencias como premisas y devuelven inferencias como conclusión. Gentzen las llama *figuras de deducción* —según el caso estructurales u operatorias—. Sin embargo, existen diferencias fundamentales entre las reglas de los cálculos de deducción natural y las reglas de los de secuentes, a saber[11]:

1. pese a que los esquemas operatorios se refieren a cada signo lógico, no hay reglas de eliminación; en su lugar aparecen reglas de *introducción en el prosecuente* y las reglas de introducción de NK —el de deducción natural— son ahora las de *introducción en el postsecuente*

2. las reglas estructurales, en tanto que permiten la permutación, repetición y agregado de fórmulas en el prosecuente y en el postsecuente, generalizan propiedades de la noción de deducción para cualquier tipo de deducción representada en una secuencia, prescindiendo totalmente de los signos lógicos que ocurren en las fórmulas que componen los secuentes; y

3. a diferencia de NK, las reglas de LK permiten más de una fórmula en el postsecuente. Además, análogamente a cómo las reglas operatorias fijan el significado de los signos lógicos, las reglas estructurales fijan el significado del signo $\dashv$ asignándole propiedades similares al signo metalingüístico de deducibilidad $\vdash$

Axiomas

$$\Gamma \dashv \Gamma \qquad\qquad \dashv \top \qquad\qquad \bot \dashv$$

Reglas estructurales (o figuras de deducción estructurales)

a la derecha —o en el *postsecuente* (o consecuente)—
a la izquierda —o en el *prosecuente* (o antecedente)—

1. Atenuación

$$\frac{\Gamma \dashv \Omega}{\Gamma \dashv \Omega, A} \;\dashv A \qquad\qquad \frac{\Gamma \dashv \Omega}{A, \Gamma \dashv \Omega} \;A \dashv$$

[11] Tomado de Palau [14]

2. Contracción

$$\frac{\Gamma \dashv \Omega, A, A}{\Gamma \dashv \Omega, A} \dashv C \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, A \dashv \Omega}{\Gamma, A \dashv \Omega} C \dashv$$

3. Permutación

$$\frac{\Gamma \dashv \Theta, A, B, \Omega}{\Gamma \dashv \Theta, B, A, \Omega} \dashv P \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, B, \Phi \dashv \Omega}{\Gamma, B, A, \Phi \dashv \Omega} P \dashv$$

4. Corte (Eliminación)

$$\frac{\Gamma \dashv \Theta, A \qquad\qquad A, \Omega \dashv \Phi}{\Gamma, \Omega \dashv \Theta, \Phi}$$

Reglas de operaciones (en el *postsecuente* $\dashv x$ **en el *prosecuente*** $x \dashv$**)**

1. Condicional

$$\frac{A, \Gamma \dashv \Omega, B}{\Gamma \dashv \Omega, A \to B} \dashv \to \qquad\qquad \frac{\Gamma \dashv \Omega, A \quad B, \Phi \dashv \Theta}{A \to B, \Gamma, \Phi \dashv \Omega, \Theta} \to \dashv$$

2. Conjunción

$$\frac{\Gamma \dashv \Omega, A \quad \Gamma \dashv \Omega, B}{\Gamma \dashv \Omega,\ A \wedge B} \dashv \wedge \qquad\qquad \frac{A, \Gamma \dashv \Omega}{A \wedge B, \Gamma \dashv \Omega} \quad \frac{B, \Gamma \dashv \Omega}{A \wedge B, \Gamma \dashv \Omega} \wedge \dashv$$

3. Disyunción

$$\frac{\Gamma \dashv \Omega, A}{\Gamma \dashv \Omega, A \vee B} \dashv \vee \qquad \frac{\Gamma \dashv \Omega, B}{\Gamma \dashv \Omega, A \vee B} \dashv \vee \qquad\qquad \frac{A, \Gamma \dashv \Omega \quad B, \Gamma \dashv \Omega}{A \vee B, \Gamma \dashv \Omega} \vee \dashv$$

4. Negación

$$\frac{A, \Gamma \dashv \Omega}{\Gamma \dashv \Omega, \neg A} \dashv \neg \qquad\qquad \frac{\Gamma \dashv \Omega, A}{\neg A, \Gamma \dashv \Omega} \neg \dashv$$

Para el cálculo de primer orden se añaden las siguientes, con las restricciones sobre variables habituales

5. Reglas de generalización

$$\frac{\Gamma, A\left(\frac{x}{y}\right) \dashv \Omega}{\Gamma, \forall x A \dashv \Omega} \forall \dashv \qquad\qquad \frac{\Gamma \dashv \Omega, A\left(\frac{\tau}{x}\right)}{\Gamma \dashv \Omega, \forall x A} \dashv \forall$$

6. Reglas de particularización

$$\frac{\Gamma \dashv \Omega, A\left(\frac{\tau}{x}\right)}{\Gamma \dashv \Omega, \exists x A} \dashv \exists \qquad\qquad \frac{\Gamma, A\left(\frac{x}{y}\right) \dashv \Omega}{\Gamma, \exists x A \dashv \Omega} \exists \dashv$$

La regla $\neg \dashv$ es el *Principio de no Contradicción*; la de $\dashv \neg$ representa al *Principio del Tercio Excluso*, mientras que $\rightarrow\dashv$ es el *Modus Ponens*.

En este cálculo, si exceptuamos la regla de corte, las demás presentan la siguiente característica, llamada *propiedad de subfórmula:*

> *"toda fórmula que aparece en la prueba de un teorema guarda cierta semejanza con la conclusión, al menos con una subfórmula"*

De esto surge que toda demostración $\Gamma \dashv A$ que no use corte, tiene la propiedad de la subfórmula; no se cumple para el caso de corte, en donde aparece en el proceso una fórmula que no tiene conexión con la que se quiere probar. En particular, corte elimina lo que silogísticamente Aristóteles llamó el *término medio*, el que desaparece en la conclusión. Ahora bien, si los axiomas y reglas estructurales —sin Corte— son suficientes para generar todas las afirmaciones que contienen $\dashv$ y además las reglas de operaciones bastan para determinar el significado de los conectores lógicos, entonces se podría esperar *a priori*, que semejante regla fuera redundante. Y esto es precisamente lo que afirma el llamado *Teorema fundamental (Hauptsatz)*, tanto para la intuicionista como para la clásica. En principio, podría pensarse que corte es eliminable como regla primitiva y que es posible derivarla de las restantes, no es así.

El que sea eliminable no quiere decir que no tenga utilidad, siendo aplicada por el propio Gentzen para importantes resultados metateóricos: (1) en la demostración de la corrección de la lógica de primer orden tanto clásica como intuicionista, (2) para demostrar la consistencia de la aritmética sin necesidad de acudir al principio de inducción completa, (3) para dar una solución al problema de la decisión de la lógica intuicionista, (4) para realizar la transformación de un sistema de deducción natural para la lógica intuicionista en uno de secuentes para la misma lógica, y por último, (5) para demostrar la equivalencia entre los sistemas estilo-Hilbert y de secuentes tanto para la lógica intuicionista como para la lógica clásica.

Pero es obvio que de su aplicabilidad no se infiere la necesidad de incluirla entre las reglas estructurales. Lo que en realidad sucede es que de la regla de corte se deriva la de *Modus Ponens* como caso particular, y es ésta la que nos permite caracterizar la deducibilidad.

Demostrar la corrección de este cálculo es muy sencillo; cada secuente expresa consecuencia —cuando $\Gamma \dashv A$ también $\Gamma \vDash A$— y las reglas transforman secuentes correctos en secuentes correctos. Las demostraciones en ellos tienen la misma dificultad que las del de deducción natural, yo no los enseñaría en primero, pero sí en otros cursos[12].

4.6. Tableaux semánticos

Los "Tableaux semánticos" son:

[12] Tanto en mi libro de *Teoría de Modelos* como en el de *Extensions of First Order Logic* los cálculos que he elegido son de esta clase.

(1) Procedimiento sintáctico de prueba de teoremas y (2) Procedimiento semántico de búsqueda de un modelo que cumpla ciertos requisitos. Aunque ambas caracterizaciones son acertadas, la segunda permite un tratamiento más intuitivo, sin olvidar que lo importante es que se trata de un cálculo.

Como tal existe en varios formatos y para lógicas diversas[13]: clásica, temporales, modales, intuicionista, subestructurales, no monotónica, etc. El procedimiento de prueba usado es *refutativo*; esto es, para demostrar que A es válida partimos de su negación y vamos desmembrando la fórmula sintácticamente, normalmente produciendo una serie de alternativas. Esta parte del proceso de construcción del tableau es de *expansión* y se caracteriza por entender las fórmulas como disyunción de conjunciones —que así lo son, de acuerdo con el *teorema de la forma normal*— para ir situándolos en las ramas de un árbol. Frecuentemente, aunque no siempre, las nuevas fórmulas son subfórmulas de las anteriores. Hay finalmente reglas de *cierre* que se establecen al producirse incompatibilidades sintácticas dentro de una misma rama. Si todas las ramas están cerradas, decimos que el tableau *está cerrado*. Un tableau cerrado que parte de la negación de A —o de una expresión que diga que A no es válida, $F\ A$— es una prueba mediante tableaux de A.

Hay otra forma semántica de entender los tableaux, como búsqueda de un modelo que cumpla ciertos requisitos; cada rama puede considerarse como una descripción parcial de un modelo, produciéndose al final del proceso éste o un contraejemplo, al menos en las lógicas decidibles. Este recurso es *implementado* en *demostración automática de teoremas*, estando tales sistemas normalmente inspirados en tableaux o en el sistema deductivo complementario, el de *resolución* que será tratado más adelante, en la sección 4.7.

Hay otra forma de entenderlos, que desde el punto de vista de la inteligencia artificial es impagable, y que no he visto documentado, y es como procedimiento de búsqueda de solución a un problema, pudiéndose establecer ciertos filtros. Esto lo vimos en la sección 1.6.3.

Estas son sus ventajas como cálculo deductivo: (1) Son *'automáticos'* para la lógica proposicional —esto es, proporcionan un procedimiento de decisión que en un número finito de pasos nos dice si la fórmula es válida o no lo es—, (2) Pueden ser fácilmente implementados en el ordenador —aunque, a menudo, la eficiencia es pobre en comparación con otros sistemas de prueba—, (3) Son fácilmente generalizables a la lógica de primer orden y a otras lógicas —modal, temporal, etc—, (4) Su aprendizaje es extremadamente sencillo.

¿Quién da más?

4.6.1. Tableaux proposicionales

Las definiciones son las ya introducidas en la sección 1.6.1: Vimos que hay reglas para cada conectiva y su negación y una regla especial para cerrar una rama contradictoria. Como puede verse en el cuadro, las fórmulas α son las de naturaleza conjuntiva.

[13] Véase el manual, elaborado por varios autores, en el que se desarrollan cálculos de esta índole para lógicas varias [5].

• α-reglas ($\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$):

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \to B)$	A	$\neg B$
$A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$B \to A$

Mientras que las β son disyuntivas.

• β-reglas ($\beta = \beta_1 \vee \beta_2$):

β	β_1	β_2
$A \vee B$	A	B
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
$A \to B$	$\neg A$	B
$\neg(A \leftrightarrow B)$	$\neg(A \to B)$	$\neg(B \to A)$

Regla de cierre:
Cerrar una rama que tenga A y $\neg A$ —para cualquier A—, o $\neg\top$, o $\perp$.

El teorema de corrección-completud

Resulta que con este procedimiento podemos probar exactamente las fórmulas válidas:

Teorema 147 *Sea A una fórmula proposicional. Entonces*

$$\models A \quad \textit{syss} \quad \vdash A$$

—A es válida syss A es un teorema lógico—

¿Por qué el teorema 147 es verdadero?

Corrección: Ya hemos dicho que las ramas de un tableau para A exploran todas las maneras en que A puede ser verdad en un modelo. Por lo tanto, si $\vdash A$, entonces hay un tableau cerrado para $\neg A$. Por consiguiente, todas las posibilidades han sido indagadas y todas se han cerrado; ninguna nos ha permitido encontrar un modelo de $\neg A$ ya que todas ellas son contradictorias; es decir, $\neg A$ *no puede* ser verdad nunca. Por lo tanto A debe ser siempre verdadera; es decir, es una fórmula válida.

Completud: Si $\nvdash A$, hagamos un tableau *'completo'* para $\neg A$ aplicando *todas las reglas posibles.* Como $\nvdash A$, el tableau de $\neg A$ debe tener al menos una rama abierta. Esta rama es una descripción completa de un modo en el que $\neg A$ puede ser verdadero. Podemos usarla para construir un modelo de $\neg A$. Por lo tanto A no es válida.

Comentario 148 *Por supuesto, lo anterior no constituye una demostración de los teoremas de completud y corrección.*

Decidibilidad algorítmica

Debido a que hay sólo una regla aplicable a cada línea dada de un tableau —la exigida por la forma lógica de la fórmula que está en la línea—, y a que siempre las fórmulas *"output"* de cualquier regla son más simples que las fórmulas *"input"*, se puede programar un ordenador para construir un tableau para cada fórmula dada $\neg A$. El programa terminará en un tiempo finito, o bien porque el tableau se cierra, o porque se ha completado; esto es, no se pueden aplicar más reglas.

- Si el tableau se cierra, sabemos que $\vdash A$
- Si no, podemos extraer un modelo de $\neg A$ a partir de una rama abierta, por lo tanto $\nvdash A$

Consecuentemente, se puede programar un ordenador para decidir en un tiempo finito si se da $\vdash A$ o no, para cualquier fórmula proposicional A.

Veremos que éste no es el caso en la lógica de primer orden.

4.6.2. Tableaux de primer orden

Extenderemos este trabajo a la lógica de primer orden, para lo que sólo se precisa añadir algunas reglas para cuantificadores y para la identidad. De todos modos, la construcción de un tableau, caso de haberlo, ya no será *"automática"*.

Sea L un lenguaje con un número infinito de constantes individulae, y sea A una fórmula. Hacemos un *tableau para* A empezando con A y aplicando *las reglas de los tableaux.* Se conservan las reglas de la lógica proposicional. Añadimos las siguientes:

• γ-reglas:

γ	$\gamma(t)$
$\forall xA$	$A\left(\frac{t}{x}\right)$
$\neg\exists xA$	$\neg A\left(\frac{t}{x}\right)$

—Si t es un término cerrado y x una variable—

• δ-reglas:

δ	$\delta(c)$
$\exists xA$	$A\left(\frac{c}{x}\right)$
$\neg\forall xA$	$\neg A\left(\frac{c}{x}\right)$

—Siendo x es una variable, para cualquier constante $c \in L$ que no haya sido usada aún en la rama—

Las fórmulas γ actúan de manera universal y las δ existencial.

Ejemplo 149 *Este es un tableau para* $\forall x\exists yPxy$.

1.	$\forall x\exists yPxy$	
2.	$\exists yPcy$	$\gamma 1$
3.	Pcd	$\delta 2$

Ejemplo 150 *Otro tableau para* $\forall x \exists y Pxy$ *Podríamos haber seguido aplicando las reglas:*

1.	$\forall x \exists y Pxy$	
2.	$\exists y Pcy$	$\gamma 1$
3.	Pcd	$\delta 2$
4.	$\exists y Pdy$	$\gamma 1$
5.	$\exists y Pf(c,a,d), y$	$\gamma 1$
6.	Pde	$\delta 4$
7.	$Pf(c,a,d), b$	$\delta 5$

es también un tableau para $\forall x \exists y Pxy$*, y así sucesivamente.*

Definición 151 *Sea* A *una sentencia. Escribimos* $\vdash A$ *si existe un tableau cerrado para* $\neg A$*.*

Ejemplo 152 *Probamos* $\vdash \exists x Px \to \neg \forall x \neg Px$*.*

1. $\neg(\exists x Px \to \neg \forall x \neg Px)$

2.	$\exists x Px$	$\alpha 1$
3.	$\neg\neg\forall x \neg Px$	$\alpha 1$
4.	Pc	$\delta 2$
5.	$\forall x \neg Px$	$\alpha 3$
6.	$\neg Pc$	$\gamma 5$

cerrado(4,6)

¿Cómo sabemos cuándo tenemos que parar?

Como en la lógica proposicional intentamos cerrar el tableau. Paramos cuando todas las ramas están cerradas; esto es, contienen una contradicción explícita. Desde luego, puede ocurrir que no seamos lo suficientemente listos como para conseguir cerrarlo.

Las reglas de los tableux no son deterministas, nos dicen qué podemos hacer pero el orden de aplicación de las mismas hace la diferencia entre un tableau eficiente y otro ineficaz. Sin embargo, a diferencia de lo que sucedía en proposicional que el tableau acaba por *"agotamiento"*, en primer orden pueden aparecer ramas infinitas, de manera que nunca se cierre la rama incluso cuando exista un tableau cerrado. La fuente de conflicto es la regla γ. No cabría esperar algo distinto: la lógica de primer orden no es decidible, no podríamos esperar que fueran recursivamente enumerables VAL y su complementario.

4.7. Resolución

Introducción

¿Qué es Resolución?

Procedimiento de prueba alternativo al de tableaux semánticos, extraordinariamente similar al mismo.

Las demostraciones mediante tableaux semánticos se visualizan en árboles: cada rama representa una conjunción iterada y el árbol mismo la disyunción de sus ramas. Por consiguiente, los árboles explicitan una disyunción generalizada de conjunciones generalizadas. El método de resolución se ocupa de su noción dual: conjunciones generalizadas de disyunciones generalizadas. La representación en este caso no se hará mediante árboles; la disyunción se hará listando los términos en corchetes —esto es, $[A_1, ..., A_n]$ representa $(...(A_1 \vee A_2) \vee ...) \vee A_n)$. Una conjunción de disyunciones se representa mediante una lista que contiene una disyunción por línea

$$\begin{array}{c}[A_{11}, ..., A_{1n}]\\ [A_{21}, ..., A_{2n}]\\ \vdots \\ [A_{p1}, ..., A_{pn}]\end{array}$$

Tenemos reglas para añadir nuevas líneas a una secuencia, denominadas *reglas de expansión*, y un *principio de resolución.* Las reglas de expansión son las mismas que usábamos en los tableaux, que para la lógica proposicional podemos ver así:

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}} \qquad\qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2} \qquad\qquad \frac{\sigma}{\sigma_1}$$

Estas reglas especifican tanto cómo se añaden nuevas líneas como la forma de derivar nuevas disyunciones de las existentes. Imaginad que tenemos una disyunción

$$D := [D_1, ...D_n]$$

que contiene una fórmula no literal A —recordad que literal aquí significa atómica o disyunción de atómica.

- Si $A := \neg\neg C$; entonces se sigue una nueva disyunción que es exacta a D excepto en lo que respecta a la ocurrencia de A; que ahora es reemplazada por C
- Si A es de tipo β, entonces se sigue una disyunción que coincide con D en todo excepto en que en vez de β tiene dos fórmulas; β_1 y β_2
- Si A es de tipo α, entonces se siguen dos disyunciones: una es como D en todo excepto en que en vez de α tiene α_1 y en la otra se sustituye α por α_2.

En cada caso diremos que la nueva disyunción (o disyunciones) se sigue de D mediante la aplicación de una regla de expansión.

Antes de precisar estos conceptos veámoslo con un ejemplo muy simple:

$$\begin{array}{l}[\neg(p \rightarrow (q \rightarrow p))]\\ [p]\\ [\neg(q \rightarrow p)]\\ [q]\\ [\neg p]\\ []\end{array}$$

4.7.1. Resolución para la lógica proposicional

Sea A una fórmula proposicional. Hacemos una *expansión mediante resolución de A* empezando con A y aplicando las reglas de expansión y el principio de resolución. La descomposición se termina cuando o bien se obtiene la cláusula vacía, [], o no se pueden aplicar más reglas.

Si las reglas nos llevan a la cláusula vacía, entonces A es contradictoria y concluimos que $\neg A$ es válida. De lo contrario, podemos extraer un modelo de A siguiendo los valores de las fórmulas que aparecen en el desarrollo.

Las reglas de expansión

Hay reglas para cada conectiva y su negación, y una regla especial para cerrar una rama contradictoria. De hecho, son las mismas que en el cálculo de tableaux.

- α-reglas ($\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$):

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$
$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$

- β-reglas ($\beta = \beta_1 \vee \beta_2$):

β	β_1	β_2
$A \vee B$	A	B
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
$A \rightarrow B$	$\neg A$	B
$\neg(A \leftrightarrow B)$	$\neg(A \rightarrow B)$	$\neg(B \rightarrow A)$

- $\sigma-$regla ($\sigma = \neg\neg\sigma$):

σ	σ_1
$\neg\neg A$	A

Principio de Resolución

Definición 153 *Decimos que D es el resolvente de D_1 y D_2 sobre A si: D_1 y D_2 son dos disyunciones tales que A es un miembro de D_1 y $\neg A$ lo es de D_2 y D se obtiene así:*
1.- De D_1 se borra A
2.- De D_2 se borra $\neg A$
3.- Se combina el resto en una nueva disyunción
Es decir,

si $D_1 = [C_1, ..., C_{i-1}, A, C_{i+1}, ..., C_n]$

y $D_2 = [E_1, ..., E_{j-1}, \neg A, E_{j+1}, ..., E_m]$

entonces $D = [(D_1 - \{A\}) \cup (D_2 - \{\neg A\})]$

• *Cuando* $D_1 = [A]$ *y* $D_2 = [\neg A]$ *se obtiene la cláusula vacía,* $[]$. *(Se entiende como contradicción)*

Definición 154 *Sea* $\{C_1, ..., C_n\}$ *un conjunto finito de fórmulas proposicionales, entonces:*
$[C_1]$
$[C_2]$
$\vdots$
$[C_n]$
es una ***expansión mediante resolución*** *de* $\{C_1, ..., C_n\}$

Definición 155 *Si* S *es una expansión mediante resolución de* $\{C_1, ..., C_n\}$ *y* D *se obtiene de alguna línea o líneas de* S *mediante una regla de expansión o mediante el principio de resolución, entonces el resultado de añadir* D *a* S *como línea es también una expansión mediante resolución de* $\{C_1, ..., C_n\}$

Definición 156 *Una expansión mediante resolución que contiene la cláusula vacía se llama* ***cerrada***

Definición 157 *Una* ***demostración mediante resolución*** *de* C *es una expansión mediante resolución de* $\neg C$ *que está cerrada.*
C *es un* teorema *del sistema de resolución —escribimos* $\vdash_{res} C$*— si hay una demostración mediante resolución de* C

Definición 158 *Una expansión mediante resolución* S *es satisfacible, si hay una interpretación* $\Im$ *tal que cada línea de* S *es verdadera.*

Ejemplo 159 *Para demostrar que la fórmula* $\neg((\neg p \wedge \neg\neg q)$ *es un teorema hacemos el siguiente desarrollo de* $((\neg p \wedge \neg\neg q) \wedge \neg q)$

$[((\neg p \wedge \neg\neg q) \wedge \neg q)]$
$[(\neg p \wedge \neg\neg q)]$
$[\neg q]$
$[\neg p]$
$[\neg\neg q)]$
$[]$

Ejemplo 160 *Para demostrar que la fórmula* $((p \to q) \to p) \to p$ *es un teorema hacemos el siguiente desarrollo de* $\neg(((p \to q) \to p) \to p)$

$[\neg(((p \to q) \to p) \to p)]$
$[((p \to q) \to p)]$
$[\neg p]$
$[\neg(p \to q),\ p]$
$[\neg(p \to q)]$
$[p]$
$[\neg q]$
$[]$

Ejemplo 161 *Para demostrar que la fórmula* $(r \leftrightarrow s) \to ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$ *es una tautología partimos de su negación* $\neg((r \leftrightarrow s) \to ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)))$

$[\neg((r \leftrightarrow s) \to ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)))]$
$[r \leftrightarrow s]$
$[\neg\,((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))]$
$[\neg(r \wedge s)]$
$[\neg(\neg r \wedge \neg s)]$
$[\neg r,\quad \neg s]$
$[\neg\neg r,\quad \neg\neg s]$
$[r \to s]$
$[s \to r]$
$[\neg s,\quad r]$
$[\neg s]$
$[\neg r,\quad s]$
$[\neg r]$
$[\neg\neg s]$
$[]$

Para la resolución de primer orden introducimos las reglas γ y δ

γ	$\gamma(t)$
$\forall x A$	$A\left(\frac{t}{x}\right)$
$\neg\exists x A$	$\neg A\left(\frac{t}{x}\right)$

δ	$\delta(t)$
$\exists x A$	$A\left(\frac{t}{x}\right)$
$\neg\forall x A$	$\neg A\left(\frac{t}{x}\right)$

Corrección y completud

Queremos usar resolución, como antes usábamos tableaux, para probar como teoremas lógicos todas las fórmulas válidas (todas ellas, pero sólo ellas) y para determinar otras propiedades semánticas como satisfacibilidad, consecuencia e independencia.

Puesto que la cláusula vacía, [], no es satisfacible, una expansión mediante resolución cerrada, de una fórmula A muestra que $\neg A$ debe ser válida.

En el ejemplo 159 se demostró que

$$\vdash_{res} \neg((\neg p \wedge \neg\neg q) \wedge \neg q).$$

Mostramos en el ejemplo 160 que

$$\vdash_{res} ((p \to q) \to p) \to p.$$

Resulta que con este procedimiento podemos probar $\vdash_{res}$ exactamente las fórmulas válidas:

Teorema 162 *Sea A una fórmula proposicional. Entonces*

$$\models A \quad syss \quad \vdash_{res} A$$

—A es válida syss A es un teorema lógico del sistema de resolución—

Modelos

De manera paralela a como lo hacíamos con tableaux, podemos extraer un modelo a partir de una expansión mediante resolución: veámoslo con un ejemplo

$$A = (p \vee \neg q) \wedge q$$

$[(p \vee \neg q) \wedge q]$
$[p \vee \neg q]$
$[q]$
$[p,\ \neg q]$
$[p]$

Esta expansión está *'completa'*; es decir, no se pueden aplicar más reglas. Podemos extraer un modelo $\Im$ de A a partir de los literales que aparecen en las distintas líneas de la expansión; en este caso tenemos p y q, por lo tanto hacemos que $\Im(p) = \Im(q) = V$. Como se puede comprobar fácilmente $\Im \models A$.

Demostraciones a partir de hipótesis

Por un procedimiento similar al usado con los tableaux, se pueden considerar conjuntos de hipótesis:

Definición 163 *Sean A, B fórmulas. Escribimos $A \vdash_{res} B$ si hay una expansión mediante resolución cerrada de $\{A,\ \neg B\}$.*

Ejemplo 164 *Demostramos que $p \wedge (p \to q) \vdash_{res} q$*

$[p \wedge (p \to q)]$
$[\neg q]$
$[p]$
$[p \to q]$
$[\neg p,\ q]$
$[q]$
$[]$

4.8. Forma normal conjuntiva

Hay cálculos de resolución que actúan sobre fórmulas escritas previamente en la denominada *forma normal conjuntiva*; esto es como una conjunción de disyunciones. A continuación introduzco un algoritmo que puede ser usado para efectuar la reducción.

Definición 165 *Un* ***literal*** *es una fórmula atómica o una fórmula atómica negada.*

Definición 166 *Una fórmula está en* ***forma normal conjuntiva*** *syss es de la forma*

$$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$$

con $n \geq 1$ *donde cada* A_i *—para cada* $i \in \{1, ..., n\}$*— es una disyunción de literales.*

Algoritmo 167 *Cualquier fórmula de* L_0 *se puede expresar en forma normal conjuntiva realizando, sistemáticamente las transformaciones siguientes:*

1. Fase primera: Eliminar los conectores $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ utilizando las equivalencias siguientes:

   a) $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

   b) $(A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$

2. Segunda fase: Reducir al máximo el alcance del conector monario de negación, utilizando las equivalencias siguientes tantas veces como sea necesario:

   a) $\neg\neg A \equiv A$

   b) $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$

   c) $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

3. Tercera fase: Obtener la forma normal conjuntiva usando las equivalencias siguientes, tantas veces como sea necesario:

   a) $(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

   b) $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$

   c) $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$

   d) $((A \wedge B) \vee C) \equiv ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$

   e) $((A \vee B) \wedge C) \equiv ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$

4.9. Selección de Meta-Teoremas

En esta sección se concentran los resultados más interesantes de *Teoría de la Demostración*, desde el teorema de Herbrand hasta el de definibilidad de Beth. El *teorema de la existencia de modelo* juega un papel central y permite obtener otros muchos resultados, el inconveniente es que para demostrarlo se utilizan otros teoremas cuya prueba no es constructiva.

Teorema 168 *Sea A una fórmula atómica, B y C fórmulas cualesquiera tales que en C haya ocurrencias de A. Escribimos $C\left(\frac{B}{A}\right)$ para denotar la fórmula que resulta de borrar en C las ocurrencias de A y poner en su lugar B. Para abreviar escribimos también $C(A)$ y $C(B)$ —respectivamente, para la original C y para $C\left(\frac{B}{A}\right)$—*

Teorema 169 *(de reemplazo de fórmulas equivalentes). Sea $\mathcal{A}$ una estructura de primer orden. Si $C(D)$ es una fórmula cualquiera — donde D, que es atómica ocurre— y A, B son fórmulas*

$$\mathcal{A} \Vdash A \leftrightarrow B \quad \textit{entonces} \quad \mathcal{A} \Vdash C(A) \leftrightarrow C(B)$$

Corolario 170 *Si $\vDash A \leftrightarrow B$ entonces $\vDash C(A) \leftrightarrow C(B)$*

Cuando demostramos fórmulas en un cálculo, por ejemplo en el de tableaux, se introducen constantes nuevas o parámetros al usar la regla δ, pero se pueden preprocesar las sentencias de manera que δ sea innecesaria; esto se consigue mediante la *skolemización.*

Teorema 171 *(Skolemización). Sea $C(x)$ una fórmula tal que sus variables libres están entre $x, y_1, ..., y_n$ y sea $D(A)$ una fórmula tal que $D(\exists x C(x))$ es una sentencia y f es un functor $n-$ario que no está en $D(\exists x C(x))$.*

1. *Si todas las estancias de A en $D(A)$ son positivas,entonces*

$$D\left(\frac{\exists x C(x)}{A}\right) \quad \textit{es satisfacible syss lo es} \quad D\left(\frac{C\left(\frac{f y_1 \ldots y_n}{x}\right)}{A}\right)$$

2. *Si todas las estancias de A en $D(A)$ son negativas, entonces*

$$D\left(\frac{\forall x C(x)}{A}\right) \quad \textit{es satisfacible syss lo es} \quad D\left(\frac{C\left(\frac{f y_1 \ldots y_n}{x}\right)}{A}\right)$$

Dada una fórmula es posible encontrar otra que es equivalente a la anterior, pero que tiene todos los cuantificadores al principio a las que llamamos *fórmulas en formas prenexa.* Si les aplicamos skolemización su estructura será muy simple.

Proposición 172 *Hay un algoritmo que convierte cada sentencia A en otra A^* en forma prenexa y que contiene sólo cuantificadores universales, tal que A es satisfacible syss A^* lo es.*

Teorema de Herbrand

En 1930 Herbrand demostró un teorema, que puede entenderse como una versión constructiva del de completud de Gödel, y que constituye la base teórica de los demostradores automáticos de teoremas. Para demostrarlo se introducen las *extensiones de Herbrand*; esto es, para una fórmula cualquiera B se define recursivamente $\varepsilon(B, D)$ así:

1. Si L es un literal $\varepsilon(L, D) = L$
2. $\varepsilon(\neg\neg A, D) = \varepsilon(A, D)$
3. $\varepsilon(\alpha, D) = \varepsilon(\alpha_1, D) \wedge \varepsilon(\alpha_2, D)$
4. $\varepsilon(\beta, D) = \varepsilon(\beta_1, D) \wedge \varepsilon(\beta_2, D)$
5. $\varepsilon(\gamma, D) = \varepsilon(\gamma(t_1), D) \wedge ... \wedge \varepsilon(\gamma(t_n), D)$
6. $\varepsilon(\delta, D) = \varepsilon(\delta(t_1), D) \vee ... \vee \varepsilon(\delta(t_n), D)$

—donde $D = \{t_1, ..., t_n\}$ es un conjunto de términos cerrados—

Por otra parte se definen modelos a partir de constantes, como hicimos en la prueba de completud de Henkin 2.4. Lo que hay que remarcar aquí es que finalmente se puede demostrar que la validez de primer orden se reduce a proposicional.

Teorema 173 *(Herbrand) Una sentencia A es válida syss una extensión de Herbrand de A es una tautología.*

La parte difícil de la demostración es la de ver que si A es válida entonces tiene una extensión de Herbrand que es una tautología, lo que él hizo fue convertir la validez en deducibilidad en una cálculo y establecer cómo a partir de la prueba de A se puede extraer una extensión de Herbrand que sea tautología; es decir, hay una versión constructiva de su teorema[14].

Teorema 174 *Hay una algoritmo que extrae de cada demostración mediante tableaux de una sentencia A una expansión de Herbrand tautológica.*

El teorema de *Corte* de Herbrand se prueba de manera fácil y constructiva, usando tableaux, *¿Puede hacerse algo parecido con otros cálculos deductivos?* Está claro que usando la corrección y completud de los cálculos podemos tomar una fórmula válida, por completud de tableaux sabemos que es demostrable en el cálculo de tableaux y con independencia de si la prueba original que establecía los validez de A fuera en un cálculo de esta clase o axiomático o de secuentes, hacer la conversión en tautología usando el tableau. De tal forma que se usa el cálculo de Hilbert o el de secuentes sólo para saber que hay una prueba, pero no utilizamos la prueba misma. Pese a todo, nos gustaría tener un procedimiento que tradujera las pruebas hechas en el axiomático a tableaux.

[14] La demostración para el cálculo de tableaux puede consultarse en [6]

Como era de esperar no hay problema con los axiomas de Hilbert, que tienen pruebas de tableaux sencillos, pero el escollo se sitúa en la regla de *Modus Ponens*

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

Sin embargo, partiendo de la formulación simplificada de corte ya dada, a saber:

$$\frac{\Gamma \dashv A \qquad\qquad A, \Omega \dashv B}{\Gamma, \Omega \dashv B}$$

no es difícil ver que el siguiente esquema:

$$\frac{\Gamma \dashv A \qquad\qquad A, \Gamma \dashv B}{\Gamma \dashv B}$$

es un caso particular. Si además la secuencia Γ es vacía, se obtiene la de *Modus Ponens:*

$$\frac{\dashv A \qquad\qquad A \dashv B}{\dashv B}$$

Luego, la noción de consecuencia caracterizada por la lógica de secuentes, a través de la regla de corte, valida *Modus Ponens* como regla de la lógica clásica.

La versión simple de corte que para tableaux introduce Smullyan es

$$\begin{array}{ccc} & / \quad \backslash & \\ A & & \neg A \end{array}$$

pudiéndose demostrar lo siguiente:

Proposición 175 *Si se permite la regla de Corte, una prueba mediante tableaux de A y una prueba mediante tableaux de $A \to B$ se convierte en una prueba mediante tableaux de B.*

La cuestión ahora está en ver si se podría prescindir de esta regla sin renunciar a la traducibilidad.

El algoritmo ideado por Gentzen para eliminar la aplicación de corte, junto con la demostración de que tal algoritmo funciona es uno de los pilares de la *Teoría de la Demostración*. El hecho de que se puede eliminar de forma constructiva el uso de la regla de corte tiene también consecuencias en la teoría de la prueba automática de teoremas.

Teorema 176 *(del Corte de **corte**) Todo tableau cerrado en el que se ha usado **Corte** puede convertirse en un tableau cerrado en donde no se ha aplicado **Corte**.*

Teorema 177 *(de interpolación de Craig). Si $A \to B$ es una sentencia válida, entonces tiene un interpolante; esto es, una sentencia C cuyos signos peculiares son comunes a A y B tal que $A \to C$ y $C \to B$ son ambas tautologías.*

De nuevo este teorema tienen una demostración no constructiva —usando el *teorema de la existencia de un modelo*— y una constructiva; tiene una versión más potente, demostrada por Lyndon.

Teorema 178 *(Lyndon). Si* $A \rightarrow B$ *es una sentencia válida, entonces tiene un interpolante* C *tal que cada relator que ocurre positivamente en* C *también lo hace en* A *y* B *—y lo mismo cuando ocurre negativamente—.*

Para terminar, unas palabras sobre el teorema de definibilidad de Beth.

En ocasiones la información que tenemos es explícita:

"María Manzano disfrutó de una Fulbright en Berkeley en el curso 1977-78"

y en otras implícita:

"La maravillosa profesora de lógica, que pasea una pastora belga llamada Maui, disfrutó de una Fulbright en Berkeley en el curso 1977-78"

Con frecuencia los acertijos se resuelven convirtiendo una caracterización implícita en explícita: Lo que dice el teorema de definibilidad de Beth es que en la lógica clásica de primer orden tales cuestiones siempre tienen solución.

Definición 179 *Sean* R *un relator* $n-$*ario y* $A\left(x_1...x_n\right)$ *una fórmula cuyas variables libres están en* $\{x_1, ..., x_n\}$ *en donde* R *no ocurre. Decimos que* A *define explícitamente a* R *respecto a un conjunto* Γ *de sentencias si*

$$\Gamma \vDash \forall x_1...x_n \left(A \longleftrightarrow Rx_1...x_n\right)$$

Definición 180 *Sea* R *un relator* $n-$*ario. Decimos que* R *es* definido implícitamente *en* Γ *syss lo determina unívocamente en este sentido. Sea* R^* *es un relator n-ario que no es* R *ni está en* Γ *y sea* Γ^* *el resultado de sustituir* R *por* R^* *en* Γ*. Decimos que* Γ *determina unívocamente a* R *si*

$$\Gamma \cup \Gamma^* \ \vDash \forall x_{1-}x_n \left(Rx_1...x_n \leftrightarrow R^*x_1...x_n\right)$$

Teorema 181 *(de Beth). Si* R *es definido implícitamente en* Γ *entonces* R *tiene una definición explícita respecto de* Γ*.*

En cierto modo lo que el teorema de Beth establece es la completud de la lógica de primer orden por lo que respecta a la definibilidad de sus relatores.

Bibliografía

[1] Andrews, P. [1986]. *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth Through Proof.* Academic Press. New York. USA

[2] Bibel, W. y Eder, E. [1993]. *Methods and Calculi for Deduction.* en [8].

[3] Craig, W. [1957]. *"Linear reasonning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorem"*

[4] Church, a. [1956]. *Introduction to Mathematical Logic.* vol I. Princeton: Princeton University Press.

[5] D'Agostino, M., Gabbay, D., Hähnle, R. y Possega, J. [1999]. *Handbook of Tableau Methods.* Kluwer Academic Publishers. Londres. U.K.

[6] Fitting, M. [1996]. *First-order logic and automated theorem proving,* Springer Graduate Texts in Computer Science. Berlín. Alemania.

[7] Gabbay, D y Guenthner, F. [2001]. *Handbook of Philosophical Logic 2^{nd}* edition. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. Holanda.

[8] Gabbay, D. Hogger, G. y Robinson, J. [1993-1998]. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming.* vol 1 a 6. OUP.

[9] Gentzen, G. [1934]. *"Untersuchungen über das Logische Schliessen".* Math. Zeitschrift 39.

[10] Heijenoort, J. ed. [1967]. *From Frege to Gödel*. Harvard: Harvard University Press.

[11] Hodges, W. [1997]. *Logic* Pelican (Penguin). Londres. U.K.

[12] Marraud, H. [1998]. *Introducción a la Teoría de los Sistemas Deductivos.* Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid. Madrid.

[13] Marraud, H. y Navarro, P. [1988]. *Sistemas Deductivos Tipo Gentzen.* Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid. Madrid.

[14] Palau, G. [2000]. *La noción abstracta de consecuencia lógica.* en http://logicae.usal.es

[15] Post, E. L. [1921]. *"Introduction to a general theory of elementary propositions". (*en [10]).

[16] Post, E. L. [1927]. *"Finite combinatory processes".* **The Journal of Symbolic Logic**, vol. 2, pp. 103-105.

[17] Robinson, J. [1965]. *"A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle"*, J. Assoc. Comput. Mach. 12, pp.23-41.

[18] Smullyan, R. M. [1994]. *First-order logic,* Springer-Verlag, Berlin. (la versión original es de 1968, la del 94 es una edición revisada)

[19] Sundholm, G. [2000]. *"Systems of deduction"* en [7].

[20] Takeuti, G. [1987]. *Proof Theory.* North-Holland. Amsterdam.