

Capítulo 2

Teoría de Modelos

2.1. Introducción

La teoría de modelos es la rama de la lógica matemática que se ocupa de las relaciones entre los lenguajes formales y sus interpretaciones en sistemas — o modelos— adecuados. El esquema abstracto de la teoría de modelos es así: Tenemos un lenguaje L y una clase de objetos \mathcal{K} , que son los sistemas — también llamados estructuras—, y entre estos dos tipos de realidades tendemos un puente: la noción de verdad (ver figura: 2.1).

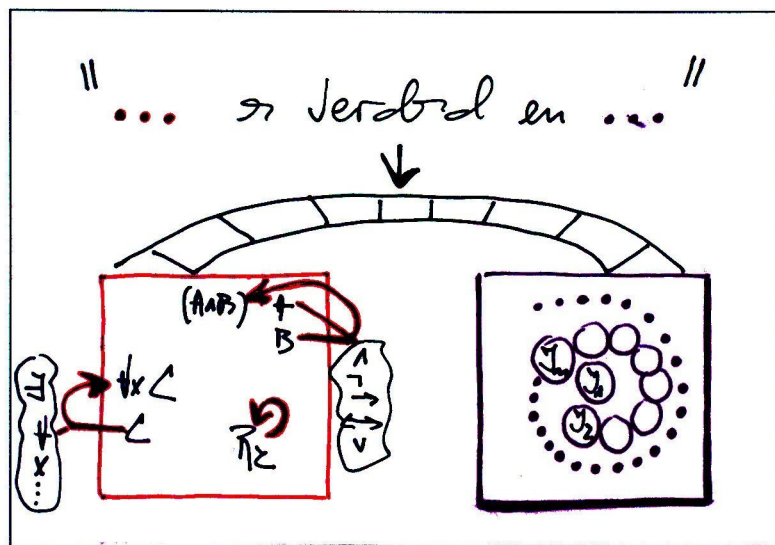


Figura 2.1: *La verdad es el Puente*

Este planteamiento, aparentemente tan simple, proporciona una gran flexi-

bilidad y alcance a la teoría de modelos.

El gran impulsor de las investigaciones en este área fue Tarski¹, que habiendo precisado y definido los conceptos semánticos de verdad y consecuencia, permitió esta modernización y generalización de la semántica que es la teoría de modelos. Aunque las raíces estaban echadas ya y algunos de los teoremas que ahora incluimos en ella —como el de Löwenheim-Skolem— habían sido demostrados tiempo ha, no se consolidó como disciplina independiente hasta los años cincuenta. El propio nombre de *Teoría de Modelos* fue utilizado por primera vez por Tarski en 1954. Los pioneros en el estudio de esta disciplina, aparte de los mencionados ya, fueron Gödel, Henkin, A. Robinson, Vaught, Craig y Addison, integrantes casi todos ellos —con excepción de Gödel y Robinson— del recién creado *Group in Logic and Methodology of Science* de Berkeley.

Comentario 50 *En un curso elemental de licenciatura nos ocuparemos exclusivamente de la teoría de modelos de la lógica de primer orden, pero compararemos los resultados obtenidos con los que se conseguirían cambiando dicho lenguaje por otro más potente, como el de segundo orden, o el de teoría de tipos —que forman parte de cursos distintos—. También abordaremos temas de teoría de modelos en los cursos dedicados a las lógicas no clásicas tales como la modal, la dinámica o la multivariada. Por razones pedagógicas he dejado fuera muchos temas que sólo podrían tener cabida en cursos de doctorado.*

2.2. Sistemas o estructuras y lenguaje

Empezaremos introduciendo la noción de sistema, definiendo a estos como un triplete formado por un conjunto no vacío —llamado universo— y una serie de individuos destacados, de funciones y de relaciones definidas sobre el universo del sistema²

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_r \rangle, \langle \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n \rangle, \langle \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m \rangle \rangle$$

Algunos de estos tienen estructuras conocidas y estudiadas en matemáticas; por ejemplo, son grupos, anillos, órdenes o sistemas de Peano.

Una vez introducidos los sistemas, podemos, si así lo deseamos, estudiarlos sin utilizar el lenguaje formal de primer orden; entraremos entonces en el área conocida como *Álgebra Universal*. Aquí se estudia tanto a ellos mismos, como a ciertas relaciones de similitud entre ellos, tales como la de subsistema, extensión, homomorfismo y todas sus especificaciones —entre ellas, isomorfismo e inmersión—.

De ahora en adelante, mientras no se diga lo contrario, los sistemas que consideremos serán

$$\mathcal{A} = \left\langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{f}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j \in J} \right\rangle \quad (2.1)$$

¹En

<http://logicae.usal.es>

tenemos una traducción del artículo de Tarski: *La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica*.

²Las definiciones de estos conceptos están en la sección 5.2.

$$\mathcal{B} = \langle \mathbf{B}, \langle \mathbf{g}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{S}_j \rangle_{j \in J} \rangle \quad (2.2)$$

y ambos de tipo o signatura $\langle \mu, \delta \rangle$ —esto es, con el mismo número y grado de funciones y de relaciones, ordenadas y clasificadas por las funciones μ y δ —

Definición 51 Decimos que \mathcal{A} es un *subsistema* de \mathcal{B} *sys*

1. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$
2. Para cada $i \in I$: cada función \mathbf{f}_i es la restricción de \mathbf{g}_i al dominio de \mathcal{A} , $\mathbf{f}_i = \mathbf{g}_i \upharpoonright \mathbf{A}^{\mu(i)}$. Esto es, para cada $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu(i)} \in \mathbf{A}$

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu(i)}) = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu(i)})$$

en especial, los individuos destacados, que son aquí funciones cero-arias, coinciden

3. Para cada $j \in J$: cada relación, $\mathbf{R}_j = \mathbf{S}_j \cap \mathbf{A}^{\delta(j)}$

Definición 52 Una función H de \mathbf{A} en \mathbf{B} es un **homomorfismo** de \mathcal{A} en \mathcal{B} *sys*

1. Para cada $i \in I$ y cada $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu(i)} \in \mathbf{A}$

$$H(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu(i)})) = \mathbf{g}_i(H(\mathbf{x}_1), \dots, H(\mathbf{x}_{\mu(i)}))$$

en especial, para los individuos destacados,

$$H(\mathbf{f}_i) = \mathbf{g}_i$$

2. Para cada $j \in J$ y cada $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \in \mathbf{A}$

$$\text{Si } \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{R}_j \text{ entonces } \langle H(\mathbf{x}_1), \dots, H(\mathbf{x}_{\delta(j)}) \rangle \in \mathbf{S}_j$$

En la figura 2.2 se ve claramente cómo las operaciones de los sistemas se acoplan en un homomorfismo; da lo mismo operar a los elementos originales — \mathbf{x} e \mathbf{y} — en el sistema \mathcal{A} , con las funciones de éste, que operar sus imágenes mediante el homomorfismo — $H(\mathbf{x})$ y $H(\mathbf{y})$ — en el sistema \mathcal{B} , con las suyas.

Definición 53 Una función H de \mathbf{A} en \mathbf{B} es una **inmersión** de \mathcal{A} en \mathcal{B} *sys*

1. H es *inyectiva*

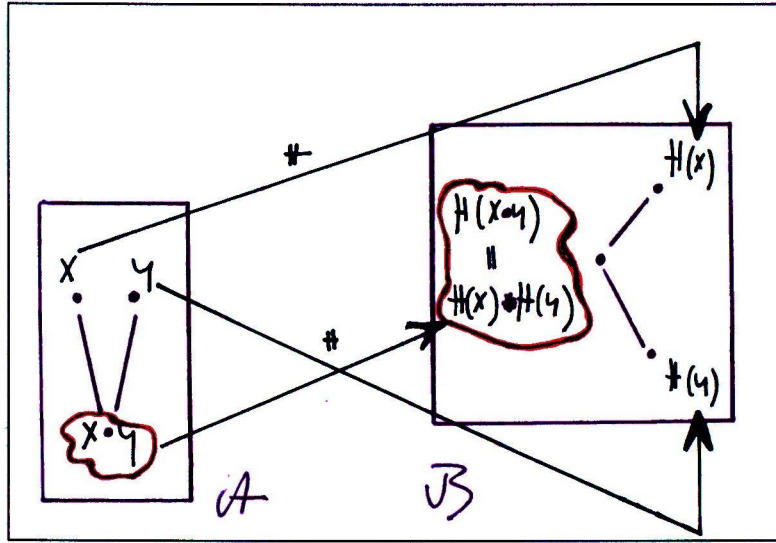


Figura 2.2: Homomorfismo es acoplamiento

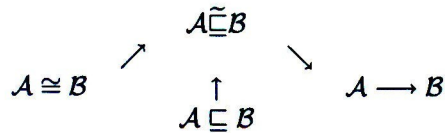
2. La condición para funciones es la misma que en el homomorfismo
3. Para cada $j \in J$ y cada $x_1, \dots, x_{s(j)} \in A$

$$\langle x_1, \dots, x_{s(j)} \rangle \in R_j \text{ sys } \langle H(x_1), \dots, H(x_{s(j)}) \rangle \in S_j$$

Definición 54 Una función H de A en B es un **isomorfismo** de A en B sys

1. H es biyectiva, el resto de condiciones como en la inmersión.

Notación 55 Usamos: \cong para isomorfismo, \sqsubseteq para subsistema, $\tilde{\sqsubseteq}$ para inmersión y \rightarrow para homomorfismo



La relación existente entre ellas es la marcada en el esquema. La similitud entre estructuras decrece con el sentido de las flechas.

Comentario 56 *Isomorfía es identidad de estructuras (ver figura: 2.3); mientras que para ser totalmente idénticos los objetos que constituyen el universo deberían ser los mismos. Los sistemas A y B*

$$A = (\emptyset(\{1, 2\}), \subseteq)$$

—relación de ser un subconjunto en un conjunto de partes—

$$B = (\{1, 2, 3, 6\}, /)$$

—relación “ divide a ” en un conjunto dado—

los represento mediante diagramas de Hasse; esto es, dos elementos están relacionados cuando hay una línea ascendente entre ellos.

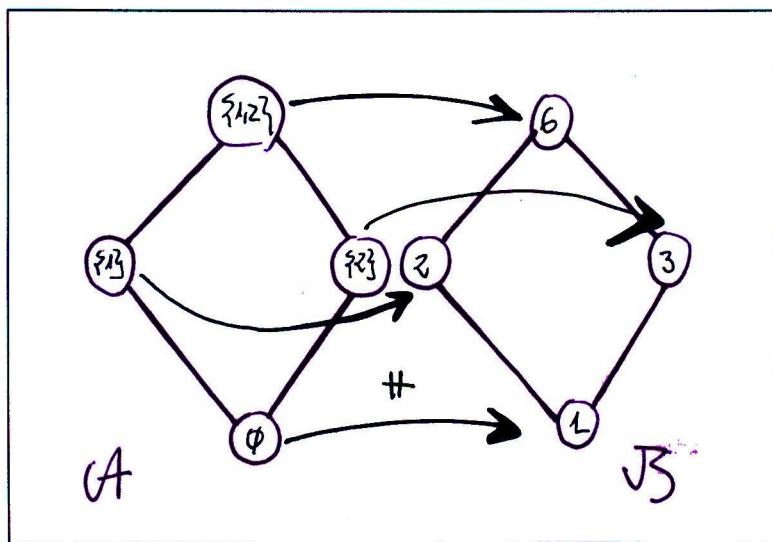


Figura 2.3: *Isomorfía es identidad de estructuras*

La línea divisoria entre álgebra universal y teoría de modelos es difusa. En el libro de Chang-Keisler, sus autores establecen la ecuación siguiente:

$$\text{Teoría de Modelos} = \text{Álgebra Universal} + \text{Lógica}$$

2.2.1. Lenguaje

Conforme a la definición precedente, si queremos penetrar en el santuario de la teoría de modelos, necesitamos un lenguaje formal: El que emplearemos en un curso introductorio será el de primer orden con igualdad; lo componen signos y filas de signos. Concretamente, en el alfabeto de nuestro lenguaje formal tendremos signos lógicos, variables, funtores y relatores.

- Signos lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ y \exists e igualdad $=$
- Variables: x, y, z, \dots
- Constantes individuales: $a, b, c, d, \dots \in \vec{c}$
- Functores: $f_1, \dots, f_n \in \vec{f}$ (pueden ser de diferentes aridades)
- Relatores: $R_1, \dots, R_m \in \vec{R}$ (pueden ser de distintos grados)

De forma simplificada indicamos que nuestro lenguaje de primer orden es:

$$L(\vec{R}, \vec{f}, \vec{c})$$

o sencillamente, L .

Junto a los signos del lenguaje formal tendremos que explicitar cuáles son las combinaciones lícitas de signos: cómo se forman los términos y fórmulas del lenguaje. Las reglas de formación de estas expresiones serán de naturaleza recursiva y proporcionarán un procedimiento de decisión para saber si una determinada sucesión de signos del alfabeto, es o no una fórmula o un término.

Definición 57 El conjunto $TERM(L)$, de los términos de L es el menor conjunto que se puede generar mediante las reglas:

- T1.** Las variables individuales son términos.
- T2.** Las constantes individuales son términos.
- T3.** Si τ_1, \dots, τ_n son términos, $f^n \tau_1 \dots \tau_n$ es un término.

Definición 58 El conjunto $FORM(L)$, de las fórmulas de L es el menor conjunto que se puede generar a partir de las reglas siguientes:

- F1.** Si τ_1, \dots, τ_n son términos, $R^n \tau_1 \dots \tau_n$ es una fórmula (denominada atómica).
- F2.** Si τ_1 y τ_2 son términos, $\tau_1 = \tau_2$ es una fórmula (caso particular de fórmula atómica).
- F3.** Si A y B son fórmulas, también lo son: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ y $(A \leftrightarrow B)$
- F4.** Si A es una fórmula, también lo son: $\forall x A$ y $\exists x A$.

Definición 59 Llamamos *expresiones de L* al conjunto formado por los términos y las fórmulas de L ; es decir,

$$EXPR(L) = TERM(L) \cup FORM(L)$$

Llamamos *sentencias $SENT(L)$* al conjunto formado por las fórmulas que no contienen variables libres; esto es, no afectadas por ningún cuantificador.

Comentario 60 Adviértase que tal y como hemos definido el conjunto de fórmulas, como el menor conjunto que cumple las reglas **F1** a **F4**, si un conjunto \mathcal{Q} las cumple, entonces $FORM(L) \subseteq \mathcal{Q}$, lo que significa que todas las fórmulas están en dicho conjunto. De manera similar para términos. En realidad, nuestra definición de términos y fórmulas, como el menor conjunto de expresiones generadas mediante las reglas **T1-T3** (resp. **F1-F4**), lleva incluido un principio de inducción para términos (y fórmulas)

Demostraciones por inducción semiótica para todos los términos

Si queremos demostrar que todos los términos tienen una cierta propiedad \mathcal{T} , tenemos que demostrarlo en dos pasos:

Básico: (1) Todas las variables individuales y todas las constantes tienen la propiedad \mathcal{T} .

Inductivo: (2) Si τ_1, \dots, τ_n tienen la propiedad \mathcal{T} , entonces $f^n \tau_1 \dots \tau_n$ tiene la propiedad \mathcal{T} .

Demostraciones por inducción semiótica para todas las fórmulas

Si queremos demostrar que todas las fórmulas tienen la propiedad \mathcal{P} , tenemos que demostrarlo en dos pasos:

Básico: (1) Todas las fórmulas atómicas tienen la propiedad \mathcal{P} .

Inductivo: (2) Si A y B tienen la propiedad \mathcal{P} , entonces: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $\forall x A$ y $\exists x A$ tienen la propiedad \mathcal{P} .

Como he dicho, los objetos de nuestro lenguaje formal son signos y filas de signos. Por otra parte los sistemas —que son los objetos matemáticos de los que hablamos— están formados por conjuntos, relaciones y funciones. En semántica conectamos estos dos tipos de realidades (ver figura: 2.1).

2.3. Semántica

Siguiendo a Tarski, diremos que una sentencia C es verdadera en un sistema \mathcal{A} —o lo que es lo mismo, que \mathcal{A} es modelo de C (notación: $\mathcal{A} \models C$)— si es realmente el caso que se dé C en \mathcal{A} .

La explicación tópica y el ejemplo paradigmático es:

“La sentencia ‘La nieve es blanca’ es verdadera si realmente la nieve es blanca”.

Naturalmente, no lo diremos así, sino que precisaremos qué queremos decir al afirmar que se “*dé realmente el caso*”. Para definir el valor de verdad de una fórmula fijamos previamente la interpretación de los signos básicos que aparecen en ella. Sobre dicha interpretación nos fundamentamos para hacer que todos los términos del lenguaje denoten individuos del sistema, y que todas las fórmulas del lenguaje sean verdaderas o falsas en el mismo. Por supuesto, para poder asignar valores de verdad a las fórmulas sin variables libres necesitamos atribuirles elementos del universo: De esta forma una interpretación se define como un par ordenado,

$$\mathfrak{I} = \langle \mathcal{A}, H \rangle$$

siendo

$$H : Var \longrightarrow \mathbf{A}$$

La definición inductiva del valor de verdad de una fórmula la propuso Tarski, aunque ya era entendida y usada la noción antes de ser precisada por él, según dice Mostowski. La gestación del concepto de verdad en un sistema fue larga,

según nos hace notar Hodges³. En un primer momento se entendía bien el significado de

la fórmula $\forall x(Rx \rightarrow Rx)$ es verdadera

pero se tardó mucho más en entender y, sobre todo en definir⁴ y precisar, el significado de

la fórmula $\forall xyx(fxxyz = fxyz)$ es verdadera en un grupo

Esto es, distinguimos entre:

1. ser válida, y escribimos

$$\models \forall x(Rx \rightarrow Rx)$$

—que quiere decir, que para cada sistema \mathcal{A} la sentencia es verdadera en él, formalmente: $\mathcal{A} \models \forall x(Rx \rightarrow Rx)$, para cada \mathcal{A} —

2. ser verdadera en un cierto grupo \mathcal{G}

$$\mathcal{G} \models \forall xyx(fxxyz = fxyz)$$

Esto es, validez es verdad en todo sistema posible.

Resumen 61 Para interpretar fórmulas necesitamos especificar:

1. dominio de cuantificación
2. cómo interpretamos las constantes, los funtores y los relatores del lenguaje
3. Concepto fundamental: verdad en una estructura. (A partir de él se define el de consecuencia.)

Estructuras de primer orden adecuadas a un lenguaje

Sea nuestro lenguaje de primer orden, $L(\vec{R}, \vec{f}, \vec{c})$

Definición 62 \mathcal{A} es una estructura adecuada para $L(\vec{R}, \vec{f}, \vec{c})$ si

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \vec{R}^{\mathcal{A}}, \vec{f}^{\mathcal{A}}, \vec{c}^{\mathcal{A}} \rangle$$

donde:

1. $\mathbf{A} \neq \emptyset$ es el universo o dominio de la estructura.
2. Para cada relator n -ario $R \in \vec{R}$ su interpretación es: $R^{\mathcal{A}} \subseteq \mathbf{A}^n$
3. Para cada functor n -ario $f \in \vec{f}$ su interpretación es: $f^{\mathcal{A}} : \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}$
4. Para cada $c \in \vec{c}$ su interpretación es: $c^{\mathcal{A}} \in \mathbf{A}$

³Véase el precioso artículo de Hodges, “Truth in a structure”

⁴No aparece hasta el artículo de Tarki y Vaught de 1957, “Arithmetical extensions of relational systems”, publicado en el **JSL**

2.3.1. Interpretación de L

Las fórmulas de $L(\vec{R}, \vec{f}, \vec{c})$ se interpretan en una estructura

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \vec{R}^{\mathcal{A}}, \vec{f}^{\mathcal{A}}, \vec{c}^{\mathcal{A}} \rangle$$

- Los designadores de L denotan individuos de \mathbf{A}
- Las sentencias son verdaderas o falsas en \mathcal{A}

Pero para establecer el valor de verdad de una fórmula cualquiera necesitamos previamente asignar valores a las variables.

Definición 63 Una *asignación* es una función F que otorga un elemento del universo a cada variable; es decir,

$$F : VAR \longrightarrow \mathbf{A}$$

Definición 64 Dada una asignación cualquiera F una variable x y un individuo del universo de la estructura \mathbf{x} definimos $F_x^{\mathbf{x}}$ de la siguiente manera:

$$F_x^{\mathbf{x}} = (F - \{\langle x, F(x) \rangle\}) \cup \{\langle x, \mathbf{x} \rangle\}$$

—esto es, asigna a todas las variables lo que F les asignara, pero a x la manda a \mathbf{x} , independientemente de su valor en F —

Definición 65 Una interpretación $\mathfrak{S} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ es una función tal que

$$\mathfrak{S} : EXPR(L) \longrightarrow \mathbf{A} \cup \{F, V\}$$

donde

$$\mathfrak{S}[TERM(L)] \subseteq \mathbf{A}$$

y

$$\mathfrak{S}[FORM(L)] = \{V, F\}$$

Para términos

1. **T1.** Para cada variable individual x : $\mathfrak{S}(x) = F(x)$
2. **T2.** Para cada constante individual a : $\mathfrak{S}(a) = a^{\mathcal{A}}$
3. **T3.** Para cada término functorial $f\tau_1\dots\tau_n$

$$\mathfrak{S}(f\tau_1\dots\tau_n) = f^{\mathcal{A}}(\mathfrak{S}(\tau_1), \dots, \mathfrak{S}(\tau_n))$$

Para fórmulas

4. **F1.** Para cada fórmula atómica $R\tau_1\dots\tau_n$

$$\mathfrak{I}(R\tau_1\dots\tau_n) = V \text{ sys } \langle \mathfrak{I}(\tau_1), \dots, \mathfrak{I}(\tau_n) \rangle \in R^A$$

5. **F2.** En especial, cuando es una igualdad,

$$\mathfrak{I}(\tau_1 = \tau_2) = V \text{ sys } \mathfrak{I}(\tau_1) = \mathfrak{I}(\tau_2)$$

6. **F3.** Los conectores reciben la interpretación habitual

7. **F4.** Las fórmulas cuantificadas reciben la siguiente interpretación:
Una generalización es verdadera cuando lo es para cada elemento del universo

$$\mathfrak{I}(\forall x C) = V \text{ sys para cada } \mathbf{a} \in \mathbf{A} : \mathfrak{I}_x^{\mathbf{a}}(C) = V$$

Una particularización es verdadera cuando lo es para algún miembro del universo

$$(\exists x C) = V \text{ sys existe un } \mathbf{a} \in \mathbf{A} \text{ tal que } \mathfrak{I}_x^{\mathbf{a}}(C) = V$$

2.3.2. Conceptos clave

Definición 66 Dada una interpretación \mathfrak{I} tal que $\mathfrak{I}(C) = V$ decimos que \mathfrak{I} satisface a la fórmula C ; o también, que \mathfrak{I} es **modelo** de la fórmula C . Usamos la notación $\mathfrak{I} \models C$

Definición 67 Un conjunto de fórmulas Γ es **satisfacible** sys hay una interpretación \mathfrak{I} tal que $\mathfrak{I}(G) = V$ para cada fórmula $G \in \Gamma$ —de igual forma cuando haya una sola fórmula—

Definición 68 Una fórmula C es **insatisfacible** sys no es satisfacible; es decir, no hay ninguna interpretación \mathfrak{I} tal que $\mathfrak{I}(C) = V$ —De manera semejante, definimos Γ es **insatisfacible**—

Definición 69 Una fórmula C es **consecuencia** de un conjunto de fórmulas Γ —y escribimos $\Gamma \models C$ — sys todo modelo de Γ lo es también de C ; es decir, toda interpretación que hace verdadera a cada fórmula de Γ , hace verdadera a C

Definición 70 Una fórmula C es **válida** —y escribimos $\models C$ — sys $\emptyset \models C$; es decir, toda interpretación hace verdadera a C

Definición 71 Una fórmula C es **independiente** de un conjunto de fórmulas Γ —y escribimos $\Gamma \not\models C$ — sys C no es consecuencia de Γ ; es decir, hay modelos de Γ que no lo son de C

Definición 72 Dos fórmulas C y D son **lógicamente equivalentes** si y sólo si

$$C \models D \text{ y } D \models C$$

Definición 73 Dado un conjunto de sentencias Γ al de sus consecuencias lo denotamos $\text{CON}(\Gamma)$

$$\text{CON}(\Gamma) = \{C \in \text{SENT}(L) \mid \Gamma \models C\}$$

- Dado un conjunto de sentencias Γ la clase de sus modelos la denotamos $\text{Mod}(\Gamma)$

$$\text{Mod}(\Gamma) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \models C, \text{ para cada } C \in \Gamma\}$$

Comentario 74 Un ejercicio muy fácil, pero interesante para tomar conciencia de la dificultad de una caracterización categórica de un sistema, es plantear un juego bidireccional entre sistemas y lenguaje: en un sentido, dado un \mathcal{A} encontrar sentencias verdaderas en \mathcal{A} ; en el otro, desde esas sentencias verdaderas en \mathcal{A} hallar modelos \mathcal{B} y comparar con \mathcal{A} .

2.3.3. Definibilidad

También se introduce el concepto de relación y función definible en un sistema \mathcal{A} con un lenguaje L

Definición 75 Sea \mathbf{R} una relación n -aria sobre el universo \mathbf{A} del sistema \mathcal{A} —esto es, $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A}^n$ —. Decimos que \mathbf{R} es definible en \mathcal{A} con L si hay una fórmula C de L con n variables libres, tal que:

$$\mathbf{R} = \{\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle \in \mathbf{A}^n \mid \mathcal{A}[\mathbf{x}_1/x_1 \dots \mathbf{x}_n/x_n] \models C\}$$

Notación 76 Cuando sabemos que las variables libres de una fórmula están en el conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ y tomamos una interpretación H en la que les asignamos los valores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$ entonces en vez de

$$\mathfrak{S} = \langle \mathcal{A}, H \rangle$$

escribimos

$$\mathcal{A}[\mathbf{x}_1/x_1 \dots \mathbf{x}_n/x_n]$$

En verdad el valor que H asigne a las variables ligadas es irrelevante, esto se suele demostrar en primer orden como metateorema sintáctico⁵.

Las relaciones definibles —en un sistema \mathcal{A} con un lenguaje L — están a medio camino entre las relaciones $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m$ presentes en la estructura

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_r \rangle, \langle \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n \rangle, \langle \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m \rangle \rangle$$

que tienen *nombre propio* en el lenguaje L y las que simplemente existen en virtud de la propiedad escasamente descriptiva de *ser un subconjunto de* \mathbf{A}^6 .

⁵Se le suele denominar *principio de coincidencia*; la demostración detallada de dicho metateorema puede consultarse en [21], página 94.

⁶Este hecho, tiene enormes repercusiones en la lógica de segundo orden: cuando restringimos el universo de cuantificación a los subconjuntos y relaciones definibles del universo de individuos, obtenemos un teorema de completud, como veremos con detalle en la sección 10.6.

Está claro que con un lenguaje numerable en una estructura de universo infinito numerable; por ejemplo, en la de los números naturales,

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, s, +, \cdot, \leq \rangle$$

la mayoría de los subconjuntos de \mathbb{N} no son definibles ya que $\wp(\mathbb{N})$ es super-numerable —su cardinalidad es \aleph_1 — y sólo tenemos un conjunto numerable de fórmulas para definirlos —esto es, el conjunto de fórmulas es de cardinalidad \aleph_0 —. Esto hace que pese a que la *inducción aritmética* sea un esquema axiomático en primer orden; esto es, una colección infinita de axiomas de la forma

$$B\left(\frac{c}{x}\right) \wedge \forall x (B \rightarrow B\left(\frac{\sigma x}{x}\right)) \rightarrow \forall x B$$

tenga menos poder expresivo que la fórmula de segundo orden correspondiente

$$\forall X (Xc \wedge \forall x (Xx \rightarrow X\sigma x) \rightarrow \forall x Xx)$$

porque en el primer caso sólo podemos referirnos a los subconjuntos definibles mediante fórmulas y en el segundo a todos. La verdad es que esto no presentaría mayor problema si el conjunto que nos interesara fuera definible en cualquier modelo \mathcal{M} de la teoría de los naturales, pero no es así. La razón es que el conjunto de los denominados *números estándar*

$$\mathbb{N}(\mathcal{M}) = \{\mathcal{M}(c), \mathcal{M}(\sigma c), \mathcal{M}(\sigma\sigma c), \dots\}$$

no es definible en una estructura cualquiera, como se verá luego, pudiéndose incluso demostrar el siguiente teorema:

Teorema 77 *Sea \mathcal{A} un modelo de primer orden de \mathbf{AP}^1 . Entonces \mathcal{A} es estándar sys el conjunto de los números estándar $\mathbb{N}(\mathcal{A})$ es definible en \mathcal{A} .*

Donde

$$\mathbf{AP}^1 = \left\{ \begin{array}{l} \forall x c \neq \sigma x \\ \forall xy (\sigma x = \sigma y \rightarrow x = y) \\ \forall x x + c = x \\ \forall xy x + \sigma y = \sigma(x + y) \\ \forall x x \cdot c = c \\ \forall xy x \cdot \sigma y = (x \cdot y) + x \end{array} \right\} \cup \{Induc(B) \mid B \in \mathbf{FORM}(L)\}$$

Siendo

$$Induc(B) := B(c) \wedge \forall x (B(x) \rightarrow B(\sigma x)) \rightarrow \forall x Bx$$

Se podría pensar que, pese a lo dicho, la mayor parte de las relaciones que nos interesan son definibles porque nuestra descripción intuitiva de las mismas puede fácilmente convertirse en definición. Además, es un hecho que todas las relaciones decidibles son definibles. Sin embargo, no es así: hay descripciones que no se pueden plasmar en definiciones.

Un ejemplo de conjunto no definible es el de los números de Gödel de las sentencias verdaderas en \mathcal{N}^7 .

Otro ejemplo más simple de relación no definible, que pasamos a exponer a continuación, nos lo sugiere la prueba diagonal de Cantor.

⁷Se verá con detalle en la sección 3.7 del próximo capítulo.

Ejemplo 78 Sean X_1, \dots, X_n, \dots los subconjuntos definibles de \mathbb{N} y sea

$$Y = \{n \mid n \notin X_n\}$$

Obviamente Y no puede ser definible, pues si lo fuera $Y = X_m$ para algún m , de donde se seguiría la contradicción

$$m \in Y \text{ syss } m \notin X_m \quad (= Y)$$

Las relaciones sobre los naturales definibles en \mathbb{N} se denominan relaciones aritméticas⁸ y un problema que se plantea con frecuencia es el de determinar en qué medida lo son porque aunque todas sean definibles, unas lo son más que otras⁹.

Hay una gran asimetría entre mostrar que una relación es definible y probar que no lo es. En el primer caso basta con producir la fórmula que la defina; en el segundo usamos un corolario del *Teorema de isomorfía* que afirma que los automorfismos mantienen dentro de la relación a todos sus elementos, si esta es definible (ver figura: 2.4).

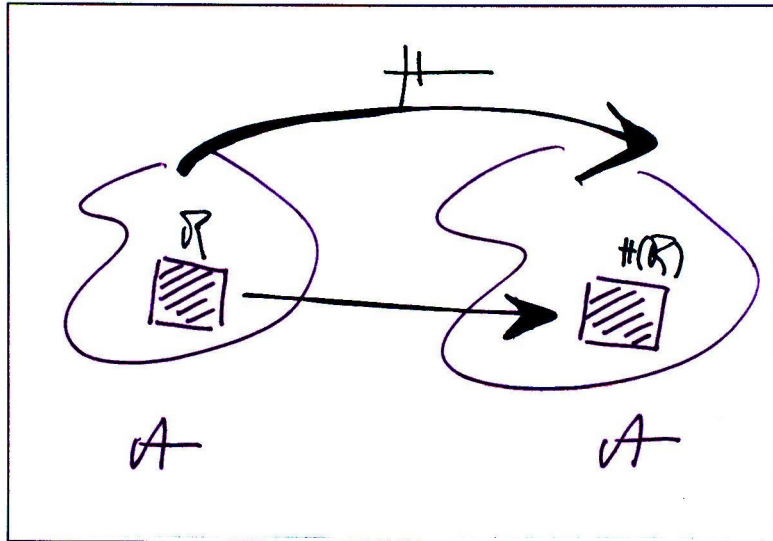


Figura 2.4: Definibilidad e Isomorfía

Teorema 79 (de isomorfía) Sean A y B dos sistemas isomorfos, $A \cong B$ y sea H el isomorfismo. Para cada $C \in FORM(L)$, $x_1, \dots, x_n \in A$

$$A[x_1/x_1 \dots x_n/x_n] \Vdash C \text{ syss } B[H(x_1)/x_1 \dots H(x_n)/x_n] \Vdash C$$

⁸Se verán en la sección 3.9 del capítulo 3.

⁹Como la igualdad en la *Granja* de Orwell.

Corolario 80 Si H es un automorfismo sobre \mathcal{A} y \mathbf{R} es definible en \mathcal{A} , entonces, para cada $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle \in \mathbf{R} \text{ syss } \langle H(\mathbf{x}_1), \dots, H(\mathbf{x}_n) \rangle \in \mathbf{R}$$

(Se ve de forma más gráfica en la figura 2.4.)

Corolario 81 El conjunto de los números naturales \mathbb{N} no es definible en

$$\mathcal{R}_< = \langle \mathbb{R}, < \rangle$$

Demostración. Supongamos que lo fuera, y que la fórmula C lo definiera

$$\mathbb{N} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{R}[\mathbf{x}] \models C \}$$

Un automorfismo sobre $\mathcal{R}_<$ es una función creciente; es decir, tal que

$$\text{si } x < y \text{ entonces } H(\mathbf{x}) < H(\mathbf{y}).$$

La función así definida $H(\mathbf{x}) = x^3$ lo es. De acuerdo con el corolario anterior debería cumplirse

$$\mathbf{x} \in \mathbb{N} \text{ syss } H(\mathbf{x}) \in \mathbb{N}$$

Pero $5 = (\sqrt[3]{5})^3 \in \mathbb{N}$ mientras $\sqrt[3]{5} \notin \mathbb{N}$. Esto es, la función H manda a \mathbb{N} elementos de \mathbb{R} que no son de \mathbb{N} . ■

2.3.4. Relación entre sistemas usando L

Cuando ya contamos con el lenguaje formal de primer orden, podemos hablar en él sobre clases de sistemas, y podemos también relacionar a los mismos en función de lo que de ellos podemos decir en el lenguaje de primer orden —que no lo es todo—. Nacen así las relaciones entre sistemas de: *equivalencia elemental*, *subsistema elemental* e *inmersión elemental*.

Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} sistemas similares.

Definición 82 Si \mathcal{A} y \mathcal{B} son del mismo tipo y L es el lenguaje adecuado para hablar de ambos, decimos que \mathcal{A} es **elementalmente equivalente** a \mathcal{B} si para cada sentencia C :

$$\text{Si } \mathcal{A} \text{ es modelo de } C \text{ entonces } \mathcal{B} \text{ es modelo de } C$$

Definición 83 Si \mathcal{A} y \mathcal{B} son del mismo tipo y L es el lenguaje adecuado para hablar de ambos, decimos que \mathcal{A} es **subsistema elemental** de \mathcal{B} si:

1. $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$; es decir, es un subsistema suyo
2. Para cada asignación F y para cada fórmula C :

$$\mathfrak{S} = \langle \mathcal{A}, F \rangle \text{ es modelo de } C \text{ syss } \mathfrak{S}^* = \langle \mathcal{B}, F \rangle \text{ es modelo de } C$$

Definición 84 Si \mathcal{A} y \mathcal{B} son del mismo tipo y L es el lenguaje adecuado para hablar de ambos, decimos que H es una **inmersión elemental** de \mathcal{A} en \mathcal{B} syss:

1. H es una inmersión de \mathcal{A} en \mathcal{B}
2. Para cada fórmula $C \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ y cada $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$

$$\mathcal{A}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \models C \text{ syss } \mathcal{B}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \models C$$

Comentario 85 De manera que para relacionar sistemas existen fundamentalmente dos modos:

1. Al margen del lenguaje formal
2. A través de él

Como idea general vale la siguiente: las relaciones entre sistemas a veces no pueden ser captadas en toda su profundidad por el lenguaje de primer orden. Por ejemplo, mientras que si dos sistemas son isomorfos, también son elementalmente equivalentes, no vale el recíproco. Es decir, hay sistemas indistinguibles en el lenguaje de primer orden —esto es, que satisfacen las mismas sentencias— que no son iguales, ni tan siquiera isomorfos. La dependencia entre ellas es la marcada en el esquema siguiente.

Notación 86 Usamos: \equiv para equivalencia elemental, \prec para subsistema elemental y $\tilde{\sim}$ para inmersión elemental.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A} \tilde{\sim} \mathcal{B} & \\ & \nearrow & \searrow \\ \mathcal{A} \cong \mathcal{B} & & \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \\ & \uparrow & \\ & \mathcal{A} \prec \mathcal{B} & \end{array}$$

La demostración de que isomorfía implica equivalencia elemental es sencilla, pero ¿son isomorfos todos los sistemas elementalmente equivalentes? Demostraremos que no en el teorema 106, al definir un sistema no isomorfo pero elementalmente equivalente a \mathcal{N} .

¿Qué teoremas demostramos en teoría de modelos?

Los teoremas de completud, compacidad y Löwenheim-Skolem son bastante característicos y de ellos se derivan consecuencias de mucho calado, como a continuación veremos.

2.4. Completud y algunas de sus consecuencias

2.4.1. Completud del cálculo

Hemos visto que para hablar de un sistema o estructura —o de una clase de ellos— es conveniente introducir un lenguaje lógico adecuado, cuyas fórmulas nos sirvan para describir a las entidades matemáticas que estudiamos. Cada

interpretación selecciona del conjunto de todas las fórmulas a las sentencias verdaderas en ella (ver figura: 2.5), que constituyen lo que más adelante denominaremos *teoría de una estructura*, y que en general son distintas para cada una.

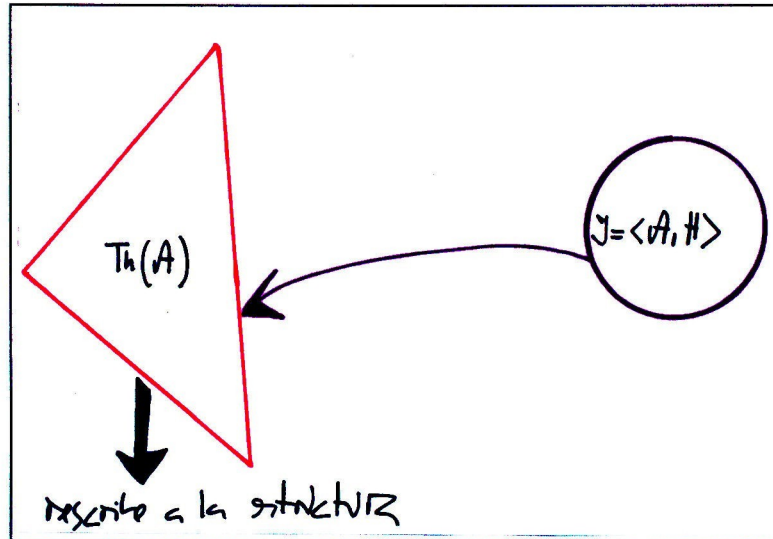


Figura 2.5: Cada interpretación selecciona una teoría

Sin embargo, todas las teorías tienen un núcleo común (ver figura: 2.6), el de las fórmulas válidas, *VAL*.

Por ser verdaderas en toda estructura estas sentencias no describen ninguna en particular, sino aquello que es común a todas ellas.

¿Caracterizan algo?

La respuesta es que sí, que describen a la propia lógica. Por consiguiente, si logramos generarlas con facilidad habremos captado la esencia de la lógica, *su perfume* —en el sentido bárbaro y radical de Süsskind—. Sin embargo aunque contamos con la noción semántica de verdad es frecuentemente muy difícil el establecerla apelando simplemente a las condiciones de la definición. Mucho más difícil todavía lo es el determinar si una fórmula es consecuencia de un conjunto de ellas, para lo que en principio sería necesario una comprobación sistema a sistema.

Por fortuna hay otro modo de establecer el valor de verdad de una fórmula y de determinar si es consecuencia de otras que no es la mera verificación directa de sus especificaciones semánticas, se trata de inferir o deducir la fórmula en un cálculo deductivo utilizando las otras fórmulas como hipótesis; esto es, de establecer una cadena de razonamiento entre premisas y conclusión. De hecho, esta forma de definir el concepto de consecuencia es incluso más adecuada, ya que refleja el carácter discursivo del razonamiento. Si el cálculo deductivo nos

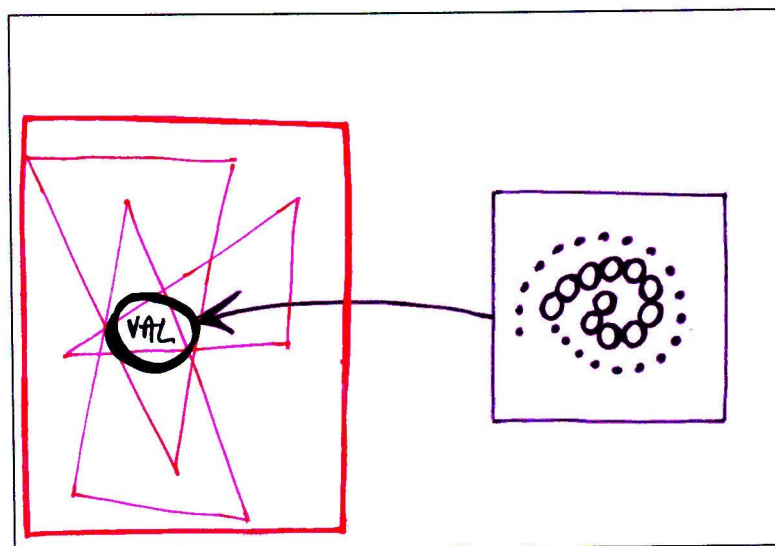


Figura 2.6: Núcleo común

va a resultar útil es porque nos ayudará a no equivocarnos; no nos conducirá de hipótesis verdaderas a conclusiones falsas: será un *cálculo correcto*. Además sus reglas permitirán obtener como teoremas a todas las consecuencias de un conjunto dado de hipótesis; esto es, será de aplicabilidad general, lo que denominamos un *cálculo completo*¹⁰.

El problema de la completud lo plantearon inicialmente Post y Hilbert, pero no fue resuelto hasta 1930 por Gödel. La prueba que a continuación comentaré es la de Henkin de 1949. La ventaja de ésta es que es más sencilla y versátil que la original de Gödel, prestándose a extensiones y modificaciones para adaptarse a otros sistemas lógicos, incluso a lenguajes de orden superior¹¹.

El teorema de completud, junto con el de corrección, establecen la equivalencia entre la noción sintáctica y la semántica de consecuencia, para un cierto lenguaje. Podemos plantear la cuestión así: la noción semántica de verdad sirve para seleccionar del conjunto de todas las sentencias de un cierto lenguaje, a las que son verdaderas en todos los sistemas —a las que llamamos fórmulas lógicamente válidas, *VAL*—. Por otra parte, a nuestro lenguaje formal —de naturaleza puramente sintáctica— podemos incorporarle un cálculo deductivo. Dicho cálculo permitirá deducir unas fórmulas de otras, y nos servirá para generar el conjunto de las sentencias del lenguaje que se pueden deducir sin premisas

¹⁰ Hay quienes prefieren llamar a esto *suficiencia* y reservar el vocablo *completud* para teorías. Prefiero no tomar este tipo de decisiones, que aunque pudieran estar motivadas terminan generando aún más caos terminológico.

¹¹ Es curioso que la prueba de Henkin de completud de la teoría de tipos —para modelos generales—, precediera a su prueba de completud del cálculo de primer orden. Véase la prueba de completud de la lógica de segundo orden en la sección 10.6.

en el cálculo, a las que llamamos teoremas lógicos (*TEO*) (ver figura: 2.7)

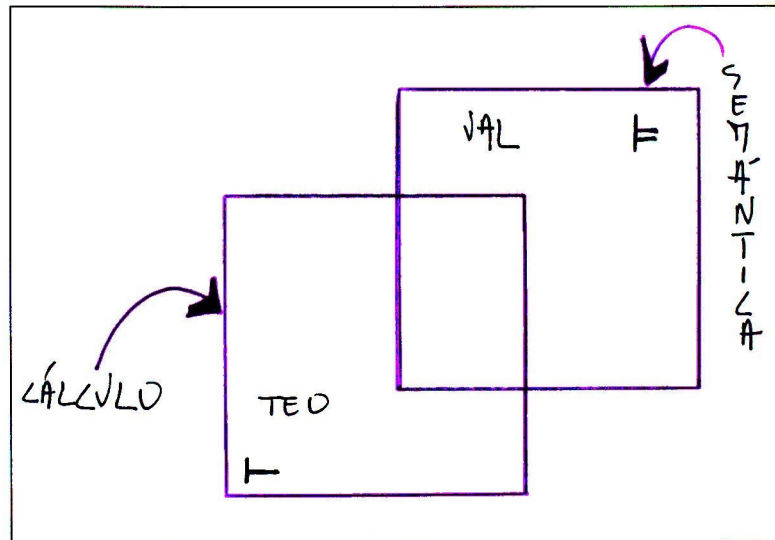


Figura 2.7: Dos métodos de selección

¿Coinciden esos conjuntos?

Demostrar que $VAL \subseteq TEO$ es el objetivo del teorema de completud, que $TEO \subseteq VAL$ lo es del de corrección. Para cálculos correctos y completos el diagrama aparece así (ver figura: 2.8):

Cálculo deductivo

El cálculo deductivo que introduzco a continuación es *de secuentes*, pero no es el original de Gentzen¹², sino una modificación; es el que utilicé en mi libro de *Teoría de Modelos*. La razón principal de haber escogido uno de esta clase es que la prueba de corrección es inmediata, a diferencia de lo que sucede en los cálculos de deducción natural, mientras que las demostraciones en él son relativamente sencillas, a diferencia de lo que sucede en los axiomáticos¹³.

1. Regla de introducción de hipótesis (*IH*)

$$\frac{}{\Gamma \vdash A}, \text{ siempre que } A \in \Gamma$$

2. Regla de monotonía (*M*)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma^* \vdash A}, \text{ siempre que } \Gamma \subseteq \Gamma^*$$

¹²Que se puede consultar en la sección 4.5

¹³De todo esto hablaremos extensamente en el capítulo 4.

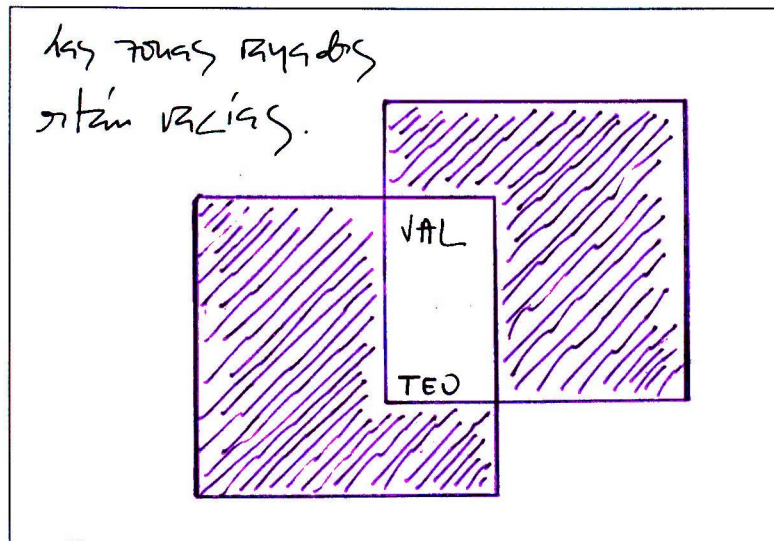


Figura 2.8: Cálculo correcto y completo

3. Regla de prueba por casos (PC)

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma A \vdash B \\ \Gamma \neg A \vdash B \end{array}}{\Gamma \vdash B}$$

4. Regla de no contradicción (NC)

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma \neg A \vdash B \\ \Gamma \neg A \vdash \neg B \end{array}}{\Gamma \vdash A}$$

5. Regla de introducción de la disyunción en el antecedente (IDA)

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma A \vdash B \\ \Gamma C \vdash B \end{array}}{\Gamma A \vee C \vdash B}$$

6. Reglas de introducción de la disyunción en la conclusión (IDC)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee C} \text{ y } \frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A \vee C}$$

7. Regla de introducción del particularizador en el antecedente (IPA)

$$\frac{\Gamma, A \left(\frac{x}{y} \right) \vdash B}{\Gamma, \exists x A \vdash B}, \text{ si la variable no está libre en ninguna de las fórmulas}$$

8. Regla de introducción del particularizador en la conclusión (*IPC*)

$$\frac{\Gamma \vdash A\left(\frac{\tau}{x}\right)}{\Gamma \vdash \exists x A}$$

9. Regla de reflexividad de la identidad (*RI*)

$$\frac{}{\vdash \tau = \tau}$$

10. Regla de sustitución de iguales (*SI*)

$$\frac{\Gamma \vdash A\left(\frac{\tau}{y}\right)}{\Gamma \tau = \tau^* \vdash A\left(\frac{\tau^*}{y}\right)}$$

Estas reglas están definidas para un lenguaje que tiene tan sólo disyunción, negación y particularización como conectores básicos y particularización como cuantificador, puede extenderse con reglas derivadas¹⁴ de manera que las haya para cada conector y cuantificador, o convertir las fórmulas a las que utilizan este lenguaje económico.

Al crear un cálculo deductivo lo que se pretende es que sus reglas sean capaces de generar a todas las fórmulas lógicamente válidas (*VAL*), pero sólo a ellas. Los teoremas de completud ($VAL \subseteq TEO$) y de corrección ($TEO \subseteq VAL$) nos aseguran que el objetivo se ha cubierto, y que el conjunto de los teoremas lógicos coincide con el de las fórmulas lógicamente válidas.

De hecho, nosotros demostraremos algo más fuerte —el denominado teorema de completud fuerte, o teorema de completud para consecuencia— que establece que siempre que una fórmula sea consecuencia de un conjunto de fórmulas —conjunto que puede ser infinito—, también será demostrable a partir de ellas con las reglas del cálculo.

Teorema 87 (*completud fuerte*) $\Gamma \vDash A \implies \Gamma \vdash A$

Teorema 88 (*corrección*) $\Gamma \vDash A \longleftarrow \Gamma \vdash A$

Teorema 89 (*equivalencia*) $\Gamma \vDash A \iff \Gamma \vdash A$

Teorema 90 (*completud débil*) $\vDash A \implies \vdash A$

Teorema 91 (*corrección*) $\vDash A \longleftarrow \vdash A$

Teorema 92 (*equivalencia*) $\vDash A \iff \vdash A$

Son parte importante de la demostración los siguientes resultados:

Teorema 93 (*de Henkin*): Si $\Gamma \subseteq FORM(L)$ es consistente, entonces tiene un modelo de universo numerable.

¹⁴Puede consultarse [21], páginas 110 a 114.

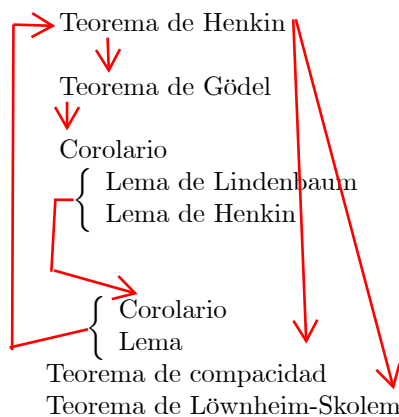
Lema 94 (de Lindenbaum): Si $\Gamma \subseteq FORM(L)$ es consistente y tiene sólo un conjunto finito de variables libres, entonces hay un Γ^* máximamente consistente y ejemplificado tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^* \subseteq FORM(L)$

Lema 95 (Henkin): Si Γ^* es máximamente consistente y ejemplificado, entonces tiene un modelo de universo numerable.

Corolario 96 Si $\Gamma \subseteq FORM(L)$ es consistente y tiene sólo un conjunto finito de variables libres, entonces Γ tiene un modelo de universo numerable.

Lema 97 Si $\Gamma \subseteq FORM(L)$ es consistente y si $\bar{\Gamma}$ es un conjunto de sentencias que resulta de sustituir en las fórmulas de Γ las variables libres por constantes nuevas y si $\bar{\Gamma}$ tiene un modelo de universo numerable, entonces Γ también.

Antes de demostrar el teorema de completud es importante entender la estrategia de demostración (ver esquema), cómo se articulan los diversos lemas que lo componen. Lo primero que hacemos es comprobar que el teorema de Henkin es condición suficiente del de completud de Gödel, evidenciándose que lo realmente importante es demostrar que si un conjunto es consistente, entonces tiene un modelo y consecuentemente, centrar el interés en la construcción del mismo. Visto esto, no es difícil entender el resto del entramado de la prueba ya que el teorema de Henkin se sigue del corolario en cuanto encontremos la manera de prescindir de la condición de que las variables libres constituyan un conjunto finito¹⁵. A su vez, el corolario se sigue de los lemas de Lindenbaum y del de Henkin de forma obvia.



Teorema 98 Teorema de Henkin \implies Teorema de Gödel

Demostración. Si $\Gamma \models A$ entonces $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible. Entonces $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es inconsistente, por el teorema de Henkin. En este caso es fácil demostrar que $\Gamma \vdash A$ —pues sabemos que $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash A$; usaremos las reglas de *IH* y de *PC*— ■

¹⁵Esta complicación es necesaria cuando se quiere que el teorema valga no sólo para sentencias, sino también para fórmulas abiertas. Así lo demuestro en mi libro de *Teoría de Modelos*, páginas 120 a 137.

Para demostrar el lema de Lindenbaum lo que hago es ordenar la fórmulas del lenguaje y construir inductivamente una cadena infinita de conjuntos consistentes y ejemplificados; algo fundamental, pues sobre dicha ordenación se basa la construcción de la cadena cuya gran unión es máximamente consistente; están todos los posibles, los que no lo convierten en contradictorio y el test de consistencia se va haciendo fórmula a fórmula.

Teorema 99 (Lindenbaum). *Todo conjunto consistente Γ cuyo conjunto de variables libres sea finito, puede extenderse a uno máximamente consistente y ejemplificado Δ*

Demostración. *Sea Γ un conjunto consistente y sea B_1, \dots, B_n, \dots una enumeración de $FORM(L)$*

Definimos:

$$\Delta_0 = \Gamma$$

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n, & \text{si } \Delta_n \cup \{B_n\} \text{ es contradictorio} \\ \Delta_n \cup B_n & \text{si es consistente y } B_n \text{ no es una particularización} \\ \Delta_n \cup \{B_n, C(\frac{y}{x})\}, & \text{si es consistente, pero una particularización} \\ & \text{y la variable es nueva} \end{cases}$$

Hagamos $\Delta = \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n$

Utilizando la construcción vemos que:

1. $\Gamma \subseteq \Delta$
2. Δ_n es consistente, para cada $n \geq 0$
3. Δ es máximamente consistente; esto es, para cada $B \in FORM(L) : B \in \Delta$ o $\neg B \in \Delta$ (no ambos)
4. Δ es ejemplificado ■

A continuación se demuestra el lema de Henkin, que dice que todo conjunto máximamente consistente tiene un modelo. La idea es justamente la de construir el que las fórmulas están describiendo y el “*quid*” de la cuestión está en que los conjuntos máximamente consistentes lo hacen con grandísimo detalle, proporcionándonos algo así como las tablas de las funciones y relaciones del modelo.

¿Qué individuos constituyen el universo?

Sabemos que la naturaleza de los objetos que forman el universo de una estructura es irrelevante —esta filosofía se desprende del teorema de isomorfía, pero en un sentido más general es lo que caracteriza a la lógica, que se ocupa de la *forma*, no tanto del contenido—, por lo que no planteamos ninguna objeción a tomar como individuos a los propios términos del lenguaje. En una primera aproximación construimos

$$\mathcal{B} = \langle TERM(L), \langle \mathbf{g}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{S}_j \rangle_{j \in J} \rangle$$

donde:

1. Su universo es el conjunto de los términos del lenguaje
2. Para cada functor del lenguaje $f_i : \mathbf{g}_i(\tau_1, \dots, \tau_{\mu(i)}) = f_i\tau_1\dots\tau_{\mu(i)}$, para cada $\tau_1, \dots, \tau_{\mu(i)} \in TERM(L)$
3. Para cada relator del lenguaje $R_j :$

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_{\mu(i)} \rangle \in \mathbf{S}_j \text{ syss } R_j\tau_1\dots\tau_{\mu(i)} \in \Delta$$

para cada $\tau_1, \dots, \tau_{\mu(i)} \in TERM(L)$.

Este sistema serviría para un lenguaje sin igualdad, pero si la hubiera, habría que hacerla coincidir con lo que al respecto estipule nuestro oráculo Δ . Para ello se establece una relación de equivalencia —la de ser “iguales a los ojos de Δ ”— y en vez de tomar como universo el de los términos, tomamos el cociente; esto es, los elementos no son términos sino clases de términos.

Lo que queda por ver de esta prueba son *pequeñas* comprobaciones, normalmente nada cortas e inductivas.

Comentario 100 *Puesto que el cálculo es de naturaleza finita —es decir, es una sucesión finita de líneas obtenidas conforme a ciertas reglas—, la completud fuerte nos informa de que el problema es siempre reducible a un conjunto finito de hipótesis —las que de hecho se han usado—. Esta simple observación está en la base de la demostración del teorema de compacidad como corolario de completud.*

2.4.2. Teoremas de Löwenheim-Skolem

Estos teoremas hablan del tamaño de los modelos. El más antiguo es el de Löwenheim (1915) que dice que si una sentencia tiene un modelo infinito, entonces tendrá uno numerable.

Teorema 101 *Si B tiene un modelo, entonces B tiene un modelo numerable*

Nosotros podemos obtener versiones más potentes de este teorema; a saber, su extensión a conjuntos cualesquiera de fórmulas

Teorema 102 *Si Γ tiene un modelo, entonces Γ tiene un modelo numerable*

y también las versiones *upward* y *downward*

Teorema 103 (downward) *Si Γ escrita en un lenguaje de cardinalidad κ tiene un modelo, entonces Γ tiene un modelo de cardinalidad $\leq \kappa$*

Teorema 104 (upward) *Si Γ escrita en un lenguaje de cardinalidad κ tiene un modelo infinito, entonces Γ tiene un modelo de cardinalidad λ , para cada $\lambda \geq \kappa$*

Paradoja de Skolem

Todos estos teoremas nos informan de la incapacidad de la lógica de primer orden para distinguir entre cardinalidades infinitas; por ejemplo la de los naturales y la de los reales. Al considerar este hecho surge de inmediato la llamada *paradoja de Skolem*: Utilizando un lenguaje numerable se puede formalizar una teoría, que incluye a los números reales, en la que la sentencia que afirma que los reales no son numerables es un teorema. Un modelo cualquiera de dicha teoría satisfará la mencionada sentencia. No obstante, por Löwenheim-Skolem sabemos que si dicha teoría tiene un modelo de cualquier cardinalidad, tendrá también uno numerable. Aquí está lo sorprendente: que la sentencia que afirma que los reales no son numerables pueda ser verdadera en un modelo de universo numerable. La paradoja no llega a ser contradicción porque, aunque la sentencia que afirma que los reales no son numerables sea verdadera en un modelo numerable, lo único que implica es que en dicho modelo no hay ninguna función biyectiva de los reales en los naturales —pues esto es lo que significa *ser numerable*—. Los elementos del modelo que representen a los reales pueden ser numerables; la función biyectiva estará fuera del modelo.

2.4.3. Teorema de compacidad

Utilizando la condición de finitud de la deducibilidad, a partir del teorema de completud demostramos el de compacidad como un corolario sencillo. En verdad, algo más es cierto

$$\text{Completud fuerte} \iff \left\{ \begin{array}{c} \text{Completud Débil} \\ + \\ \text{Compacidad} \end{array} \right\}$$

El teorema de compacidad afirma que un conjunto Δ de sentencias tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de Δ lo tiene.

Teorema 105 Δ tiene un modelo *sys*s para cada $\Gamma \subseteq \Delta$ tal que Γ es finito, entonces Γ tiene un modelo.

Fue inicialmente demostrado por Gödel (1930) como corolario del teorema de completud. Cabe destacar que el enunciado del teorema de compacidad es de naturaleza puramente semántica, y uno tiene la intuición de que puede ser resuelto sin apelar a la noción de deducibilidad: combinando de algún modo los modelos de los conjuntos finitos para construir el modelo del infinito. Esta intuición es correcta y, de hecho, se puede demostrar compacidad utilizando la noción booleana de ultrafiltro —filtro maximal—, y construyendo como modelo del conjunto infinito el ultraproducto.

Nosotros demostramos primero el teorema de completud siguiendo la prueba de Henkin —es decir, construyendo un modelo a partir de constantes— y demostraremos compacidad como corolario de completud. También, para familiarizarnos con otras construcciones de modelos, de un carácter genuinamente

algebraico, demostraremos el teorema de Loś y lo utilizaremos para demostrar nuevamente compacidad. De hecho, hay muchos caminos para llegar al teorema de compacidad¹⁶.

No hay muchas formas distintas de construir modelos, aparte de las mencionadas, y a veces —por ejemplo, en el libro de Chang-Keisler—, se ha utilizado el procedimiento de construcción como criterio unificador para ordenar y exponer la variedad de resultados conocidos en teoría de modelos. Esta es también la idea que aglutina el libro de Hodges [16], en el que para la creación de modelos se usa la *teoría de juegos*.

He comentado algunos de los teoremas más famosos y antiguos de nuestra disciplina, todos formulados y demostrados antes de los años 50. *¿Qué se hizo después?*

2.5. Teorías

Tal vez el cambio más importante se produce cuando nuestro interés se centra en ciertos conjuntos de sentencias que constituyen una teoría. Esto es, conjuntos cerrados bajo la relación de deducibilidad o, lo que es lo mismo en primer orden, cerrados bajo la relación semántica de consecuencia.

Con las teorías tenemos de salida un problema de dimensión ya que el conjunto de sus sentencias es siempre infinito —pues todos los teoremas lógicos son sentencias de cualquier teoría—.

¿Cómo presentar pues una teoría, cómo describir un conjunto infinito?

Hay casos en los que la teoría que nos interesa es lo que veces se denomina teoría de un sistema, o de una clase de sistemas.

Teoría de un sistema

Es decir, tenemos un sistema —por ejemplo \mathcal{N} el de los números naturales con las operaciones aritméticas usuales— y queremos estudiar el conjunto de todas las sentencias verdaderas en \mathcal{N} . En estos casos, la descripción que hacemos de la teoría es sencillamente esa, sentencias de primer orden verdaderas en nuestro sistema.

$$Th(\mathcal{N}) = \{C \in \mathbf{SENT}(L) \mid \mathcal{N} \models C\}$$

De forma semejante, cuando se trata de una clase de sistemas.

Teoría axiomática

En otras ocasiones, más felices, para describir una teoría podemos utilizar un conjunto decidible de sentencias, a las que llamamos axiomas, y considerar que las sentencias de nuestra teoría son sus consecuencias lógicas. La primera pregunta que se nos plantea es, *¿se pueden representar axiomáticamente todas las teorías?* La respuesta es que no. Hay teorías que no pueden ser generadas

¹⁶Hodges cree que empieces por donde empieces, si te afanas con tesón, lo demostrarás.

por ningún conjunto decidible de axiomas, aunque se admitan conjuntos infinitos (pero decidibles) de axiomas.

Teorías axiomatizables

Veamos algunos ejemplos: las teorías de grupos, anillos, cuerpos, retículos, y álgebras de Boole son axiomatizables, y lo que es más, lo son mediante un conjunto finito de axiomas. Las teorías de los cuerpos de característica cero, o la aritmética de Peano de primer orden —es decir, las consecuencias de los axiomas de Peano de primer orden— son axiomatizables, pero no finitamente.

Teorías no axiomatizables

Sin embargo, la teoría de los números naturales —es decir, las sentencias de primer orden verdaderas en el sistema \mathcal{N} — no es axiomatizable.

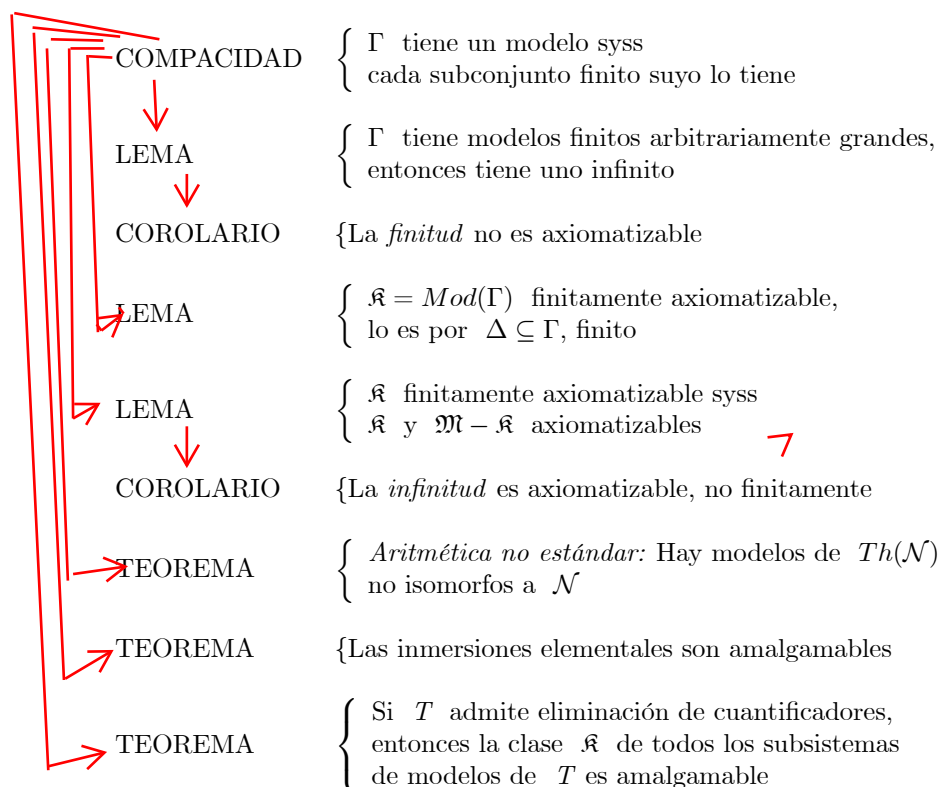
¿Qué es lo que sucede entonces con los números naturales?

Sencillamente, que la aritmética de Peano¹⁷ es un subconjunto propio de la teoría de los números naturales; es decir,

$$\{C \in SENT(L) \mid \mathbf{AP}^1 \vdash C\} \subset Th(\mathcal{N})$$

Hay una gran diferencia entre probar que una teoría es axiomatizable y demostrar que no lo es. En el primer caso basta con dar sus axiomas, mientras que en el segundo tenemos que demostrar que no puede haberlos; para hacer esto último usamos frecuentemente el teorema de compacidad. Dedico en mi libro [21] un capítulo completo a demostrar las consecuencias del teorema de compacidad, siguiendo este esquema:

¹⁷Los axiomas los dimos en el teorema 77



En particular, vemos que no es axiomatizable la propiedad de finitud, y que la infinitud sólo es axiomatizable con infinitos axiomas. Esta característica distingue a la lógica de primer orden de otras más potentes expresivamente, como la de segundo orden o la de tipos: de hecho un test de compacidad consiste en ver si la infinitud es finitamente axiomatizable.

2.5.1. Modelos no estándar

Como consecuencia directa del teorema de compacidad obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 106 Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, s, +, \cdot, \leq \rangle$ el sistema de los naturales, tal y como lo conocemos intuitivamente. Hay un sistema \mathcal{M} que es modelo de $Th(\mathcal{N})$ pero que no es isomorfo a \mathcal{N} .

Demostración. Sea L el lenguaje adecuado para hablar de \mathcal{N} y añadámosle una nueva constante k . Y sea

$$\Sigma = Th(\mathcal{N}) \cup \left\{ C_n \mid C_n := \neg k = \sigma \dots \sigma c, \text{ para cada } n \right\}$$

Se demuestra que cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo y por compacidad que también lo tendrá el total. De este modelo se extrae el \mathcal{M} mencionado. El

modelo no es estándar porque aparecerán una serie de elementos que no son ni cero, ni sus siguientes, constituyendo lo que se denominan \mathbb{Z} -cadenas (ver figura:2.9), por su semejanza con los enteros. ■

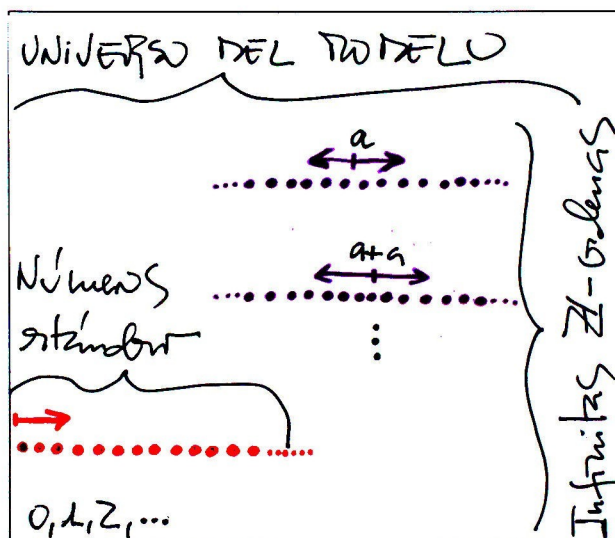


Figura 2.9: \mathbb{Z} -cadenas

La existencia de modelos no estándar para la aritmética había sido descubierta por Skolem en los años treinta, pero durante mucho tiempo no se les prestó demasiada atención. De hecho, hasta 1949 fueron utilizados como contraejemplos patológicos. En esta fecha Henkin demostró la completud de la teoría de tipos usando modelos no estándar e invirtiendo su consideración. Aunque el sentido de no-estándar en primero y segundo orden no es el mismo, conviene saber que están relacionados, como se verá en la sección 10.7; en primer orden no estándar significa no isomorfo al modelo pretendido —aquí, no isomorfo a \mathcal{N} —, en el segundo, que utiliza una nueva semántica en donde los universos de la estructura no contienen necesariamente a todos los subconjuntos posibles. Pues bien, al final de su artículo “*Completeness in the theory of types*” Henkin construye un modelo de la aritmética de Peano doblemente no estándar.

En la década de los cincuenta el estudio de los modelos no estándar se convirtió en una especie de moda y en el Simposio de matemáticas de Varsovia de 1959 se presentaron varios artículos sobre el tema, uno de ellos de Robinson. Las investigaciones se centraban en los modelos de la aritmética y el objetivo de las mismas no era el de las propiedades matemáticas de los números sino el de las propiedades metamatemáticas de los lenguajes formales y los cálculos deductivos. El análisis no estándar lo inventó Robinson en el otoño de 1960. En el prefacio de su libro *Non-standard analysis* afirma que pensó que los conceptos y métodos de la lógica matemática podrían proporcionar un marco adecuado

para desarrollar el cálculo diferencial e integral por medio de números infinitamente grandes e infinitamente pequeños. Este cálculo había sido descrito en esos mismos términos en el siglo XVII por Leibniz y Newton, usando cantidades infinitamente pequeñas pero distintas de cero. Durante el siglo XVIII se desarrolló la técnica del cálculo y se consolidó en el XIX, ya sin infinitesimales. Pero, como dije, en el año 1960 se creó el análisis no estándar en el que reaparecen los infinitesimales, ahora con todo el rigor y precisión exigido por los estándares modernos. La idea clave es la de poder aprovechar los modelos no estándar de los reales.

¿Tiene alguna ventaja el análisis no estándar frente al estándar, aparte del histórico-sentimental de resucitar los infinitesimales de Leibniz?

Hay que decir que el análisis no estándar, a diferencia de la aritmética no estándar se utiliza no sólo en metamatemática, sino también en matemáticas. Concretamente Robinson y Berstein lo usaron para solucionar un problema abierto sobre espacios de Hilbert. No obstante, toda prueba realizada en análisis no estándar puede sustituirse por una estándar, aunque las primeras son más intuitivas y menos artificiosas, dicen los expertos. Por consiguiente, el elegir análisis no estándar o no hacerlo es cuestión de gusto, no de necesidad.

Quien se puso decididamente a favor de él fue Gödel, pronosticando que sería el análisis del futuro. Dijo también que los historiadores de la matemática que nos sucedan considerarán una gran estupidez el no haber sabido dar, 300 años antes el salto de los reales a los infinitesimales, siendo así que es tan natural como el dado para pasar de los naturales a los enteros, o de éstos a los racionales o de los racionales a los reales. Aunque Gödel exageraba, nadie duda hoy en considerar que el análisis no estándar es uno de los mayores inventos de la lógica matemática en la segunda mitad del siglo XX y una agradable consecuencia de los teoremas de compacidad y Löwenheim-Skolem.

2.5.2. Teorías completas

Otra importante propiedad relacionada con la de axiomatizabilidad, que no todas las teorías comparten, es la de completud. Una teoría es completa si para cada sentencia B del lenguaje, o ella, o su negación es deducible en la teoría.

Definición 107 Δ es completa *sys* para cada $B \in \Delta : \Delta \vdash B$ o $\Delta \vdash \neg B$

Por supuesto, si definimos a una teoría semánticamente, como el conjunto de las sentencias verdaderas en un cierto sistema, no tiene sentido preguntarse si dicha teoría es completa: ¡Naturalmente que sí!, en un sistema una sentencia cualquiera es o verdadera, o falsa. Sin embargo, no todas las teorías se presentan de este modo, y nos interesa poder caracterizar a una teoría completa mediante procedimiento no sintácticos. La primera cuestión que se puede demostrar es que la completud de una teoría equivale a que sean elementalmente equivalentes todos sus modelos; es decir, que satisfagan simultáneamente las mismas sentencias. Sabemos que equivalencia elemental e isomorfía están relacionados pues lo segundo implica lo primero.

Completud de una lógica versus completud de una teoría

El concepto de completud de una teoría está muy estrechamente vinculado al de equivalencia elemental y al de decisión. En particular, si Δ es una teoría completa la clase de sus modelos está bastante bien definida ya que dos cualesquiera son elementalmente equivalentes. Tal y como se ha definido este concepto, es una propiedad sintáctica, relacionada con el cálculo y sus reglas; la de ser maximal, estar *al completo*. Por otra parte, la completud del cálculo significa la equivalencia entre la noción sintáctica y semántica de consecuencia. Hay quienes prefieren reservar la palabra completud para teorías y usar en los cálculos *suficiencia*. Yo prefiero mantener el vocablo completud en ambos casos, porque son formulaciones de un mismo problema, al menos en su génesis. Me explicaré mejor.

Normalmente estamos interesados en un sistema o en una clase de sistemas — por ejemplo, \mathcal{N} o \mathfrak{G} — y en un lenguaje apropiado proponemos un conjunto de axiomas Δ que cifre las características del sistema o de la clase. Por descontado, en Δ ponemos sólo sentencias verdaderas en los sistemas considerados, pero *¿están todas las precisas?*

En el primer caso, *¿se cumple que si $\mathcal{N} \Vdash B$ entonces $\Delta \vdash B$?*

En el segundo, *¿se verifica que si $\mathcal{B} \Vdash B$ para cada $\mathcal{B} \in \mathfrak{G}$ entonces $\Delta \vdash B$?*

Cuando la respuesta es afirmativa podemos decir que Δ es *completo respecto del modelo \mathcal{N}* en el primer caso, o que lo es respecto de la clase \mathfrak{G} en el segundo.

Suponed que nuestra clase de sistemas es tan amplia que incluye a todos los de un cierto tipo $\langle \mu, \delta \rangle$. Una sentencia verdadera en todos ellos es lo que llamamos fórmula válida y preguntarnos si el conjunto \emptyset de fórmulas es completo en la clase de todos los sistemas es justamente preguntarse si el cálculo es completo en sentido débil. La completud fuerte significa que todo conjunto Γ es completo respecto de la clase formada por todos sus modelos.

2.5.3. Teorías categóricas

¿Cómo relacionar el resultado anterior con la completud de una teoría?

Introduciremos el concepto de categoricidad que establece que una teoría consistente es categórica, si todos sus modelos son isomorfos.

Definición 108 Sea Δ una teoría consistente: Δ es *categórica* *sys* para cada \mathcal{A}, \mathcal{B} : Si $\mathcal{A} \Vdash \Delta$ y $\mathcal{B} \Vdash \Delta$ entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

Ahora contamos con tres procedimientos para saber si una teoría es completa:

1. el sintáctico
2. utilizando equivalencia elemental

3. utilizando categoricidad —porque si T es categórica, todos sus modelos son elementalmente equivalentes y, por tanto, es completa—

No obstante, los resultados obtenidos son de poca aplicabilidad pues por el teorema de Löwenheim-Skolem, toda teoría con modelos infinitos posee modelos no isomorfos —pues los modelos de distinta cardinalidad no pueden ser isomorfos—.

Demostraremos también que toda teoría completa, con un modelo finito, es categórica. Pero aquí terminan las teorías categóricas.

Teorías κ -categóricas

Es por esto por lo que es necesario introducir una noción más amplia, menos exigente que la de categoricidad. Dicha noción es la de κ -categóricas; es decir, que teniendo un modelo de cardinalidad κ , todos los de dicha cardinalidad sean isomorfos. El concepto de κ -categóricas nos permite establecer otro test de completud de teorías, el llamado test de Vaught.

Teorema 109 (*Test de Vaught*) Sea Γ una teoría de cardinalidad κ que no tiene modelos finitos. Si Γ es λ -categórica para un $\lambda \leq \kappa$ —siendo λ infinito—, entonces Γ es completa.

En las teorías con modelos finitos, categoricidad y completud son propiedades que se dan (o dejan de darse) simultáneamente.

¿Pasa lo mismo con la κ -categóricas en las teorías en las que todos sus modelos son infinitos?

No, veremos que hay teorías completas que no son κ -categóricas para ningún κ infinito. Por consiguiente, hemos de desarrollar otras técnicas para caracterizar a las teorías completas que escapan a la κ -categóricas.

2.6. Otras propiedades

Las teorías completas son interesantes por varios motivos. Veamos uno: Supongamos que \mathcal{A} y \mathcal{B} son dos modelos de una teoría completa T . Si B es una sentencia verdadera en \mathcal{A} , también lo será en \mathcal{B} . Por consiguiente, las propiedades conocidas, y expresables en primer orden, de un sistema que nos sea familiar \mathcal{A} pueden también aplicarse a otro menos familiar, siempre que ambos sean modelo de la misma teoría completa.

Por otra parte, toda teoría axiomatizable y completa es decidible; es decir, existe un procedimiento efectivo que, dada una sentencia nos dice si está en la teoría o nó.

Para ver cómo podemos demostrar decidibilidad utilizando axiomatizabilidad y completud, obsérvese que los teoremas de una teoría axiomatizable forman un conjunto recursivamente enumerable, al igual que las sentencias refutables en la teoría (negación de los teoremas). Pero, si una teoría es completa, cada sentencia es: o un teorema, o una sentencia refutable. Por consiguiente, tanto el

conjunto de los teoremas, como su complementario son ambos recursivamente enumerables. Por tanto, la teoría es decidable. (ver figura: 2.10)

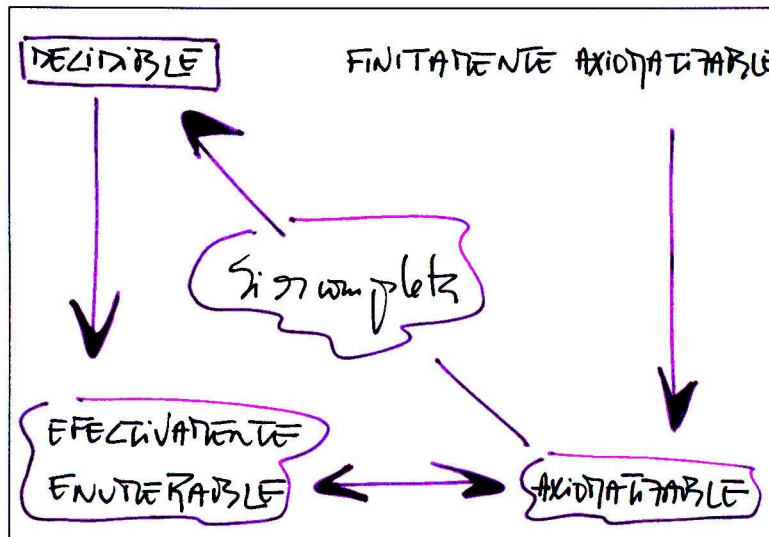


Figura 2.10: Relación entre propiedades

Comentario 110 Este y otros resultados relacionados con la teoría de modelos, como el teorema de indecidibilidad de Church y el de incompletud de Gödel, requieren más teoría de la recursión de la que se puede ofrecer en un curso introductorio de teoría de modelos, por lo que no los demostraremos. Lo que hago es ofrecer un curso optativo dedicado a recursión, cuyo objetivo principal sea el teorema de incompletud. En este texto le dedico el capítulo siguiente.

Aplicando algunos de los teoremas ya comentados de teoría de modelos junto a los de Gödel y Church se puede demostrar lo siguiente:

1. La teoría de los números naturales $Th(\mathcal{N})$ no es axiomatizable ni decidable. Por supuesto, la aritmética de Peano de primer orden $\text{CON}(\mathbf{AP})$, es un subconjunto propio de $Th(\mathcal{N})$. Pero no es éste un problema del conjunto de axiomas \mathbf{AP} , no existe ningún otro conjunto Γ de sentencias de primer orden tal que $\text{CON}(\Gamma) = Th(\mathcal{N})$. Además, por el teorema de Löwenheim-Skolem, sabemos que $Th(\mathcal{N})$ tiene modelos no isomorfos, y por compacidad podemos construir uno de esos modelos. Así que $Th(\mathcal{N})$ no es categórica, y menos aún $\text{CON}(\mathbf{AP})$.
2. La teoría de los números reales $Th(\mathcal{R})$ por el contrario, es axiomatizable y decidable, aunque no categórica.

El analizar estos resultados, en cierto modelo sorprendentes, es también misión de la teoría de modelos.

¿Por qué $Th(\mathcal{R})$ es decidible y finitamente axiomatizable y $Th(\mathcal{N})$ no es ninguna de estas cosas?

Después de todo, los números naturales están incluidos entre los reales. Incluso en el álgebra elemental podemos construir nombres para cada número natural. Aunque esto es evidentemente cierto, en el álgebra elemental no podemos referirnos de manera alguna al conjunto de todos los números naturales. No hay ninguna fórmula B con una variable libre —en el lenguaje de \mathcal{R} — que sea satisfecha por un número real si y sólo si es un natural; es decir, los naturales no son definibles en \mathcal{R} . Este hecho bloquea la transferencia de los resultados de Gödel y Church, sobre los naturales, a los reales.

Se puede describir a la matemática moderna como a la ciencia de los *objetos abstractos*, sean números reales, estructuras algebraicas, o lo que sea. La lógica matemática le añade a esta ciencia la preocupación acerca del lenguaje en el que puede ser formulada, su capacidad de caracterizar a dichos objetos, la posibilidad de definir objetos nuevos, etc.

Bibliografía

- [1] Barwise, J. [1975]. *Admissible Sets and Structures*. Springer-Verlag. Berlín. Alemania.
- [2] Barwise, J. [1977]. *Handbook of Mathematical Logic*. North Holland Publishing Company. Amsterdam. Holanda.
- [3] Barwise, J. y Feferman, S. eds [1985]. *Model-Theoretic Logics*. Springer-Verlag. Berlín. Alemania.
- [4] Bell, J y Slomson, A. [1969]. *Models and Ultraproducts*. North Holland Publishing Company. Amsterdam. Holanda.
- [5] Bridge, J. [1977]. *Beginning Model Theory*. Clarendon Press. Oxford. Reino Unido.
- [6] Corcoran, J. (ed.), [1983]. *Logic, Semantics and Metamathematics*. Hackett Publishing Company, 1983.
- [7] Chang, C. y Keisler, J. [1977]. *Model Theory*. North Holland Publishing Company. Amsterdam. Holanda. (reedición 1990)
- [8] van Dalen, D. [1983]. *Logic and Structure*. Springer-Verlag. Berlín. Alemania.
- [9] Doets, K. [1996]. *Basic Model Theory*. CSLI. Stanford. USA
- [10] Etchemendy, J. [1988]. “Tarski on Truth and Logical Consequence”, *The Journal of Symbolic Logic*, vol.53, n°1, pp.51-79.
- [11] Etchemendy, J. [1990]. *The Concept of Logical Consequence*. Harvard University Press.
- [12] van Heijenoort, J. [1967]. *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.
- [13] Henkin, L. [1949]. “The completeness of the first order functional calculus”. **JSL**. vol. 14, pp. 159-166.
- [14] Henkin, L. [1950]. “Completeness in the theory of types”. **JSL**. vol. 15. pp. 81-91.

- [15] Henkin, L. [1996]. “*The discovery of my completeness proofs*”, Dedicated to my teacher, Alonzo Church, in his 91st year, **Bulletin of Symbolic Logic**, vol. 2, Number 2, June 1996. (presentado el 24 de Agosto de 1993 en el XIX International Congress of History of Science, Zaragoza, Spain).
- [16] Hodges, W. 1985. *Building models by games*. Cambridge University Press. Cambridge. Reino Unido.
- [17] Hodges, W. [1993]. *Model Theory*. Cambridge University Press. Cambridge. Reino Unido
- [18] Kleene, S. [1952]. *Introduction to metamathematics*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
- [19] Kreisel, G & Krivine, J.L. [1971]. *Elements of Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- [20] Löwenheim, L. [1915]. “*On the possibilities in the calculus of relatives*”. en [12].
- [21] Manzano, M. [1989]. *Teoría de Modelos*. Alianza Universidad Textos. Alianza Editorial. Madrid.
- [22] Marraud, H. [1990]. *Teoría de Modelos Elemental*. Ediciones UAM.
- [23] Tarski, A. [1930]. “*The Concept of Truth in Formalized Languages*”, en [6].
- [24] Tarski, A. [1936]. “*On the Concept of Logical Consequence*”, en [6].