

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS

HUBERTO MARRAUD GONZÁLEZ

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

A primera vista se diría que se trata de pequeñas figuras absurdas que avanzan bailando a lo ancho del papel en que están dibujadas. ¿Por qué razón atribuye usted importancia a tema tan absurdo?

A. Conan Doyle, *La aventura de los bailarines*

ARGUMENTOS Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS.

La *lógica* es una disciplina matemática que tiene por objeto la noción de corrección argumental.

[1] La lógica es, en la actualidad, una disciplina matemática, pero eso no quiere decir que lo haya sido siempre. Las ciencias cambian a lo largo de la historia y ocasionalmente esos cambios afectan a la definición de su objeto.

[2] El concepto de estructura matemática proporciona un modo conveniente de describir el objeto de la matemática. En general, una teoría matemática se define con respecto a una clase de estructuras matemáticas.

[3] En el sentido que aquí es pertinente, un argumento (formulado en un lenguaje L) está formado por un cierto número de oraciones (de ese lenguaje) $O_1, \dots, O_n, O_{n+1}$. Entre éstas se distinguen las premisas, $O_1, \dots, O_n$, y la conclusión, O_{n+1} .¹

[4] Un argumento $O_1, \dots, O_n, O_{n+1}$ puede ser correcto o incorrecto; en el primer caso se dice que O_{n+1} se sigue o es consecuencia de $O_1, \dots, O_n$. Por tanto, extensionalmente, la noción de corrección argumental (para un lenguaje L) se identifica con el conjunto de los argumentos en los que la conclusión es consecuencia de las premisas.

Una *estructura matemática* es una secuencia $S = \langle B, \langle R_i \rangle_{i \in I}, \langle f_j \rangle_{j \in J} \rangle$ con dos funciones asociadas $\alpha: I \rightarrow \mathbb{N}$ y $\beta: J \rightarrow \mathbb{N}$ tal que: (1) $B \neq \emptyset$ es el universo de la estructura, (2) I y J son conjuntos de índices tales que $I \cup J \neq \emptyset$, (3) para cada $i \in I$, R_i es una relación $\alpha(i)$ -aria definida sobre B , es decir, $R_i \subseteq B^{\alpha(i)}$; (4) para cada $j \in J$, f_j es una operación $\beta(j)$ -aria definida sobre B , es decir, $f_j: B^{\beta(j)} \rightarrow B$. El tipo o *signatura* de una estructura matemática es $\langle \alpha, \beta \rangle$.

[1] Lo que aquí llamamos *estructura matemática* recibe en ocasiones los nombres de *sistema algebraico* o *dominio matemático*. Puede darse una definición más general que la precedente, que por lo demás es suficiente para nuestras necesidades.

[2] Cuando $I = \emptyset$, se dice que S es un álgebra, y cuando $J = \emptyset$ que es un sistema relacional.

[3] Si $I = \{1, \dots, n\}$ y $J = \{1, \dots, m\}$ son finitos, suele escribirse $S = \langle B, R_1, \dots, R_n, f_1, \dots, f_m \rangle$ en vez de $S = \langle B, \langle R_i \rangle_{i \in I}, \langle f_j \rangle_{j \in J} \rangle$.

Una *teoría matemática* T estudia las propiedades de las estructuras matemáticas que satisfacen determinadas condiciones $C_1, \dots, C_n$.

¹ No obstante, en D.J. Shoesmith y T.J. Smiley (1978) puede encontrarse un concepto más general de argumento.

[1] La clase de las estructuras matemáticas estudiadas por una determinada teoría matemática T es siempre cerrada bajo isomorfismos.

[2] Dos estructuras matemáticas S y S' con el mismo tipo son isomorfas syss (si y sólo si) existe una función $h: B \rightarrow B'$ tal que (1) h es biyectiva, (2) para todo $i \in I$ y toda secuencia $\langle o_1, \dots, o_{\alpha(i)} \rangle$ de $B^{\alpha(i)}$, $\langle o_1, \dots, o_{\alpha(i)} \rangle \in R_i$ syss $\langle h(o_1), \dots, h(o_{\alpha(i)}) \rangle \in R'_i$, y (3) para todo $j \in J$ y toda secuencia $\langle o_1, \dots, o_{\beta(j)} \rangle$ de $B^{\beta(j)}$, $h(f_j(\langle o_1, \dots, o_{\beta(j)} \rangle)) = f'_j(\langle h(o_1), \dots, h(o_{\beta(j)}) \rangle)$.

[3] Naturalmente, no todas las teorías matemáticas tienen, atendiendo a su objeto, la misma generalidad. Por ejemplo, la aritmética es la teoría de las estructuras isomorfas al anillo $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ de los enteros, y así es una teoría poco general, contrastando, entre otras, con la teoría de grupos. Ésta tiene por objeto los grupos o estructuras $\langle B, \cdot \rangle$, donde $\cdot$ es una operación binaria que satisface los postulados (1) para cualesquiera elementos a, b y c de B , $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, y (2) para todo elemento a de B , hay sendos elementos b y c de B tales que $a \cdot b = b \cdot a = a$ y $c \cdot a = a \cdot c = b$.

[4] Los dominios de dos teorías matemáticas pueden solaparse. Esto incluye el caso en el que el dominio de una de ellas está contenido en el de otra. Así, los grupos que satisfacen, para cualesquiera a y b de B , el postulado adicional $a \cdot b = b \cdot a$ reciben el nombre de *grupos abelianos*.

Un *sistema lógico* es una estructura matemática $S = \langle Sb(F), \emptyset, C \rangle$, donde F es un conjunto no-vacío (de fórmulas), $Sb(F)$ es el conjunto de sus partes, y $C: Sb(F) \rightarrow Sb(F)$ es una operación unaria (operación de consecuencia).

[1] La idea es identificar una teoría de la corrección argumental para un lenguaje L con el correspondiente sistema lógico $S = \langle Sb(F), C \rangle$, donde F es el conjunto de oraciones de L . Puesto que $C(X)$ es, intuitivamente, el conjunto de las consecuencias de X , la corrección de un argumento con las premisas $A_1, \dots, A_n$ y la conclusión A_{n+1} se representa como $A_{n+1} \in C(\{A_1, \dots, A_n\})$.

[2] A veces se reemplaza la operación de consecuencia por una relación de consecuencia $R \subseteq Sb(F) \times F$. Es cuestión de gustos, puesto que se tiene $A \in C(X)$ syss $\langle X, A \rangle \in R$.

[3] *La lógica* es la teoría de los sistemas lógicos; *una lógica* (p.ej., la lógica clásica, la lógica intuicionista, etc.) es una teoría de una clase de sistemas lógicos.

[4] Para simplificar, en lo que sigue escribiremos $\langle F, C \rangle$ por $\langle Sb(F), C \rangle$. En lo sucesivo y a lo largo de todo el libro se siguen usando $X, Y, Z, \dots$ para partes o subconjuntos de F , y $A, B, C, \dots$ para elementos de F .

PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LÓGICOS.

Un sistema lógico $S = \langle F, C \rangle$ es tarskiano syss satisface las condiciones siguientes:

- | | |
|--|----------------------|
| (T1) $A \in C(\{A\})$ | <i>reflexividad</i> |
| (T2) si $X \subseteq Y$ entonces $C(X) \subseteq C(Y)$ | <i>monotonía</i> |
| (T3) $C(C(X)) \subseteq C(X)$ | <i>transitividad</i> |

Un sistema lógico $S = \langle F, C \rangle$ es *finitario* syss

- (T4) para toda fórmula A y todo conjunto de fórmulas X , si $A \in C(X)$ entonces hay un subconjunto finito X' de X tal que $A \in C(X')$.

Un sistema lógico $S = \langle S, F \rangle$ es *estructural* syss

- (T5) $s(C(X)) = C(s(X))$ para toda sustitución s sobre F .

Un sistema lógico es *estándar* syss es tarskiano, estructural y finitario.

[1] Entre las fórmulas las hay simples y complejas. Una fórmula simple se caracteriza porque ninguna de sus partes (salvo la propia fórmula) es una fórmula. Una sustitución sobre F es entonces una función s del conjunto de fórmulas simples de F en el conjunto de fórmulas de F . Si A es una fórmula de F , cuyas subfórmulas simples son $B_1, \dots, B_n$, y s es una sustitución, $s(A)$ es la fórmula resultante de sustituir simultáneamente en A cada ocurrencia de $B_1, \dots, B_n$ por $s(B_1), \dots, s(B_n)$.

Análogamente, si X es un conjunto de fórmulas de F , $s(X)$ es el conjunto resultante de reemplazar cada $A \in X$ por $s(A)$.

[2] La clasificación anterior de los sistemas lógicos se transfiere a las lógicas, de manera que se dice que una lógica es tarskiana (no-tarskiana) syss los sistemas lógicos que estudia son tarskianos (no-tarskianos), etc.

[3] Los postulados del último recuadro fueron propuestos por Tarski² como parte de la definición de operación de consecuencia. Hay que señalar a este respecto que para cualquiera de ellos se conocen lógicas que no lo satisfacen, y algunas de ellas son relativamente populares o lo han sido en algún momento (por ejemplo, las lógicas no-monótonas).

[4] En determinados contextos puede ser interesante considerar otros postulados: un sistema lógico es teorematizado syss $C(\emptyset) \neq \emptyset$, es explosivo syss para algún conjunto finito de fórmulas X , $C(X) = F$, etc.

[5] Dado un sistema lógico $S = \langle F, C \rangle$, una *teoría* de S es un $X \subseteq F$ tal que $C(X) = X$. Un conjunto de fórmulas X es axiomatizable en S si y sólo si existe un $Y \subseteq X$ finito tal que $C(Y) = X$. En ese caso, se dice que Y es una base axiomática para X .

La relación u operación de consecuencia de un sistema lógico puede definirse semántica o sintácticamente, es decir, en términos de interpretaciones admisibles de sus fórmulas o en términos de la forma de las mismas, respectivamente.

Se dice que un sistema lógico $S = \langle F, C \rangle$ es un *lenguaje formal* cuando C se considera definida semánticamente, y se conviene en usar ' $\models$ ' para designar una relación de consecuencia definida semánticamente.

Se dice que un sistema lógico $S = \langle F, C \rangle$ es un *sistema deductivo* cuando C se considera definida sintácticamente, y se conviene en usar ' $\vdash$ ' para designar una relación de consecuencia definida sintácticamente.

[1] La distinción entre sistemas deductivos y lenguajes formales *no* es una división de los sistemas lógicos, sino más bien de sus descripciones -un mismo sistema lógico puede aparecer como sistema deductivo y como lenguaje formal; es decir, $\vdash$ y $\models$ pueden ser nombres de una misma relación de consecuencia.

[2] Dicho esto, hay que señalar que algunos sistemas lógicos sólo pueden ser descritos semánticamente (como la lógica estándar de segundo-orden), si bien para todo sistema deductivo hay un lenguaje formal que caracteriza al mismo sistema lógico.

[3] La definición de una relación u operación de consecuencia presupone una definición previa del conjunto de fórmulas del sistema lógico correspondiente. Ésta consta normalmente de una tabla de signos y de un conjunto de reglas de formación, que combinados dan una definición recursiva de fórmula. Para evitar confusiones usamos el término *prolenguaje* para designar a los lenguajes artificiales de este tipo.

[4] En ocasiones se usa entranamiento semántico por consecuencia (definida) semánticamente y derivabilidad o derivabilidad formal por consecuencia (definida) sintácticamente.

[5] Para construir un lenguaje formal, dado un prolenguaje, se procede como sigue: (1) se especifica la clase de las estructuras matemáticas admisibles para ese prolenguaje o estructuras-modelo. (2) Se especifican entonces, por medio de un conjunto de reglas semánticas, las funciones de interpretación admisibles de los signos y expresiones del prolenguaje sobre estructuras-modelo. (3) Una interpretación admisible del prolenguaje en cuestión es un par $\langle S, I \rangle$, formado por una estructura-modelo y una función de interpretación sobre S . (4) Si V es el conjunto de los valores que pueden tomar las fórmulas de F bajo las interpretaciones admisibles, se determina el subconjunto W de V de valores designados. (5) Finalmente, se define: $A \in C(X)$ syss para toda interpretación admisible I , si para todo $B \in X$, $I(B) \in W$ entonces $I(A) \in W$.

[6] Advuértase que una definición semántica de la consecuencia no es, según lo expuesto, una definición recursiva. No sucede lo mismo con las definiciones sintácticas, cuyo esquema genérico

2 En honor a la verdad hay que decir que los postulados T1-T5 se deben más bien a Łoś y Suszko (1958), quienes formulan el postulado de reflexividad como $X \subseteq C(X)$. Los postulados originales de Tarski son: cardinal de $F \leq \omega$; $X \subseteq C(X)$; $C(C(X)) \subseteq C(X)$; $C(X) = \bigcup \{C(Y) : Y \text{ es un subconjunto finito de } X\}$; hay un A tal que $C(A) = S$. Posteriormente Tarski eliminó el último postulado.

es: un argumento correcto es un argumento que posee tales y cuales propiedades estructurales (es decir, propiedades concernientes a la forma y disposición de las fórmulas que lo componen y sus partes) o que puede obtenerse a partir de tales y cuales argumentos estructuralmente descritos por medio de tales y cuales transformaciones estructurales.

[7] Por consiguiente, la relación de derivabilidad es recursivamente enumerable, la de entrañamiento semántico no tiene porqué serlo. Así, un sistema lógico cuya operación de consecuencia no sea recursivamente enumerable no podrá analizarse como sistema deductivo, aunque sí como lenguaje formal.

Según lo expuesto, podemos distinguir tres partes en el estudio de los sistemas lógicos: la teoría de los prolenguajes o gramática lógica, la teoría de los lenguajes formales o teoría de modelos, y la teoría de los sistemas deductivos o teoría de la demostración.

[1] Obviamente, la gramática lógica es presupuesta por la teoría de la demostración y la teoría de modelos.

[2] El nombre *teoría de la demostración* no es particularmente afortunado, y *teoría de la derivabilidad* sería preferible. Una fórmula A es demostrable $\text{syss } A \in C(\emptyset)$. Pero ya se ha señalado implícitamente que hay sistemas deductivos no-teorematícos, y por otra parte no puede darse por sentado que, aún en sistemas teorematícos, la derivabilidad sea definible en términos de demostrabilidad.

[3] Un único sistema lógico puede presentarse por medio de sistemas deductivos distintos, como comprobaremos en lo que sigue.

ARGUMENTOS DEMOSTRATIVOS.

La noción de consecuencia ha sido formalmente caracterizada por medio de la operación de consecuencia $C: \text{Sb}(F) \rightarrow \text{Sb}(F)$ o de la relación de consecuencia $R \subseteq \text{Sb}(F) \times F$. En ambos casos se asume que un argumento consta de premisas y conclusión, y que las premisas de un argumento forman un conjunto (de fórmulas).

La acepción de ‘argumento’ implícita en las definiciones precedentes es privativa de la lógica. En una acepción más común, un argumento consta no sólo de premisas y conclusión, sino también de un discurso o cadena argumentativa que pretende mostrar que la conclusión se sigue de las premisas. Corcoran habla en este segundo caso de *argumentos demostrativos*. La corrección de un argumento demostrativo requiere no sólo que la conclusión se siga de las premisas, sino también que el discurso argumentativo exprese un razonamiento correcto de las premisas a la conclusión. Naturalmente todo esto queda un poco en el aire mientras no se especifiquen normas de razonamiento correcto.

La noción de derivabilidad tiene una conexión con la de argumento demostrativo de la que carece la noción de entrañamiento. Las reglas de transformación de los sistemas deductivos son los componentes del discurso argumentativo que mostraría el modo en que puede transitarse de las premisas a la conclusión. Un sistema deductivo no sólo clasifica los argumentos del tipo $\langle X, A \rangle$ en válidos e inválidos sino que además, a diferencia de un lenguaje formal, especifica las manipulaciones posibles de las premisas para extraer la conclusión.

Un modo muy general (es decir, independiente de la especificidad del prolenguaje elegido) de acotar las manipulaciones admitidas de las premisas es darles alguna estructura suplementaria, presentándolas no como un mero conjunto sino como, por ejemplo, una secuencia. Así, aunque un sistema deductivo define una operación de conjuntos de fórmulas en conjuntos de fórmulas, esos sistemas no operan directamente con argumentos premisas-conclusión –es decir, con pares de la forma $\langle X, A \rangle$ donde X es un conjunto de fórmulas y A es una fórmula. Lo habitual es que un sistema deductivo opere con expresiones de otro tipo –por ejemplo, pares de la forma $\langle X, Y \rangle$ formados por secuencias finitas de fórmulas– para dar una definición del conjunto de los argumentos válidos, definición que por ello es, en el sentido pertinente, indirecta. Las expresiones u objetos sintácticos manipulados pueden cambiar de un sistema deductivo a otro, aún cuando ambos caractericen una misma relación de consecuencia.

En suma, un sistema deductivo da en primer lugar una definición del conjunto de los argumentos demostrativos correctos y a partir de ahí una definición del conjunto de los argumentos premisas-conclusión correctos.

En distintos sistemas deductivos, pues, pueden encontrarse distintas asunciones acerca de las expresiones u objetos manipuladas, que pueden estar formadas por conjuntos, multiconjuntos o secuencias de fórmulas (y, a veces, símbolos auxiliares).

Asumiré que el lector sabe qué es un conjunto. Multiconjuntos y secuencias pueden definirse en términos de conjuntos:

Secuencias. (1) La secuencia vacía $\langle \rangle$ es $\emptyset$; (2) la secuencia $\langle a \rangle$ de un elemento a es $\{a\}$; (3) la secuencia $\langle a, b \rangle$ es $\{a, \{a, b\}\}$; (4) la secuencia $\langle a_1, \dots, a_{n+1} \rangle$ es $\langle \langle a_1, \dots, a_n \rangle, a_{n+1} \rangle$.

Multiconjuntos. (1) El multiconjunto vacío $[\]$ es $\emptyset$; (2) el multiconjunto $[a_1, \dots, a_n]$ es $\{a'_1, \dots, a'_n\}$, donde $a'_i = a_i$ si para todo $j < i$, $a_j \neq a_i$, y en caso contrario $a'_i = \{a'_k\}$, donde $a_k = a_i$, $k < i$, y para todo m , $k < m < i$, $a_m \neq a_i$. Así, mientras $\{a, a, b\} = \{a, b\} = \{b, a\}$, $\langle a, a, b \rangle \neq \langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$ y $[a, b, b] \neq [a, b] = [b, a]$.

Como, por otra parte, conjuntos y multiconjuntos pueden ser vistos como clases de equivalencia de secuencias, la descripción más general -pero no siempre la más manejable- de los sistemas deductivos tomará las secuencias como expresiones u objetos básicos.

GRAMÁTICA LÓGICA ABSTRACTA.

La gramática lógica tiene encomendado el estudio de los prolenguajes. A lo largo de este libro se describen distintos prolenguajes $(\mathcal{P}, \mathcal{P} \perp, \text{etc.})$. A continuación se introduce de forma general, abstracta (es decir, sin hacer referencia a símbolos concretos) la noción de gramática lógica. Al definir el grado lógico, el rango cuantificacional, etc. en el marco de esa gramática abstracta, no será preciso definir esas nociones cada vez que se presente un prolenguaje concreto.

► Tabla de símbolos.

1. Símbolos lógicos.
 - 1.1 Operadores oracionales n -arios ($n \in \mathbb{N}$).
 - 1.2 Cuantificadores.
2. Símbolos no-lógicos.
 - 2.1 Variables individuales.
 - 2.2 Letras funcionales n -arias ($n \in \mathbb{N}$).
 - 2.3 Letras relacionales n -arias ($n \in \mathbb{N}$).
3. Símbolos auxiliares.
 - 3.1 Paréntesis.

► Definición de término.

- (1) Las variables individuales son términos.
- (2) Si f es una letra funcional n -aria y $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ es una secuencia de términos entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término.

► Reglas de formación. Noción de fórmula.

- (RF1) Si R es un símbolo relacional n -ario y $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ es una secuencia de términos entonces $R(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula.
- (RF2) Si $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ es una secuencia de fórmulas y $\bigcirc$ es un operador oracional n -ario entonces $\bigcirc(A_1, \dots, A_n)$ es una fórmula.
- (RF3) Si A es una fórmula, v una variable individual y Q un cuantificador entonces $(Qv)(A)$ es una fórmula.

[1] Un prolenguaje particular se determina estipulando los símbolos, lógicos o no lógicos, de cada categoría. En cualquier caso, se conviene que los conjuntos de símbolos de cada categoría son disjuntos dos a dos.

[2] Un prolenguaje sin cuantificadores, variables individuales, letras funcionales y letras relacionales

no ceroarias es un prolenguaje de orden cero. Un prolenguaje con cuantificadores, variables individuales y letras relacionales n -arias, para algún n distinto de 0, es un prolenguaje de primer orden.

[3] Una característica importante de los prolenguajes es la no ambigüedad sintáctica de sus fórmulas. En algunos casos (cuando no se emplea una notación prenexa como en el cuadro precedente) la no-ambigüedad de las fórmulas se asegura usando símbolos auxiliares (como los paréntesis).

[4] Para precisar el punto anterior, defínase recursivamente la «secuencia de lectura» de una fórmula, $s(A)$: (1) si $A=R(t_1, \dots, t_n)$ entonces $s(A)=\langle R, t_1, \dots, t_n \rangle$, (2) si $A=O(A_1, \dots, A_n)$ entonces $s(A)=\langle O, sA_1, \dots, sA_n \rangle$, (3) si $A=QvB$ entonces $s(A)=\langle Q, v, sB \rangle$. Como obviamente a cada fórmula le corresponde una y sólo una secuencia de lectura, se obtiene el siguiente resultado:

TEOREMA DE UNICIDAD DE LECTURA. s es una inyección del conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$ en el conjunto de secuencias finitas de signos de $\mathcal{P}$; es decir, s es una función y si $s(A)=s(B)$ entonces $A=B$.

[5] Las fórmulas de un prolenguaje son, en definitiva, secuencias finitas de signos extraídos de un repertorio previamente especificado, construídas por medio de un número finito de reglas fijas. Por consiguiente, el conjunto de las fórmulas de un prolenguaje es decidible, o, con otras palabras, existe un método efectivo para establecer, para cualquier secuencia finita semejante, si es una fórmula o no.

[6] Antes de abandonar esta cuestión, veamos un caso en el que no puede demostrarse un teorema de unicidad de lectura. Sea A el conjunto de las letras del alfabeto latino. El conjunto P de «palabras» se define como sigue: (1) $A \subseteq P$, (2) Si $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_i \rangle$ y $\langle \beta_1, \dots, \beta_j \rangle$ son palabras entonces $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_j \rangle$ es una palabra. En suma, las palabras son aquí secuencias finitas de letras del alfabeto latino. Sin embargo, la palabra $\langle abc \rangle$, por ejemplo, puede «leerse» de dos maneras distintas, a saber: $\langle \langle a, b \rangle, c \rangle$ y $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle$.

[7] Otro nombre, bastante extendido, para las letras funcionales ceroarias es *constantes individuales*.

A continuación, definimos un conjunto de nociones gramaticales, y por tanto sintácticas, básicas. El teorema de unicidad de lectura garantiza la corrección de las definiciones.

Alcance de una ocurrencia de un símbolo lógico en una fórmula.

Ya se ha señalado que una fórmula es una secuencia finita de signos. Hablando con propiedad, una fórmula es más bien una secuencia finita de *ocurrencias* de signos (un mismo signo puede tener varias ocurrencias en una fórmula). Si una ocurrencia de un operador oracional n -ario 'O' es el i -ésimo término de la secuencia de lectura $S(A)$, los términos $i+1$ -ésimo, ..., $i+n$ -ésimo de $s(A)$ corresponderán a secuencias de lectura de fórmulas, $s(A_1), \dots, s(A_n)$. Se dice entonces que el alcance de esa ocurrencia de 'O' en A está formado por las correspondientes ocurrencias de $A_1, \dots, A_n$ en A . Asimismo, si una ocurrencia de un cuantificador 'Q' es el i -ésimo término de $s(A)$, el $i+2$ -ésimo término de $s(A)$ corresponderá a una secuencia de lectura de una fórmula B . En tal caso, el alcance de esa ocurrencia de Q en A es la ocurrencia correspondiente de B en A .

Por tanto tanto, el alcance de una ocurrencia de un símbolo lógico en una fórmula A puede identificarse con un conjunto de ocurrencias de fórmulas en A .

Una secuencia de ocurrencias de símbolos lógicos en una fórmula A , $\langle s_1, \dots, s_{n+1} \rangle$, constituye una secuencia anidada cuando el alcance de s_1 en A está contenido en el alcance de s_2 en A , ..., y el alcance de s_n en A está contenido en el alcance de s_{n+1} en A .

Complejidad o grado lógico de una fórmula A , $c(A)$.

- (1) $c(Rt_1, \dots, t_n) = 0$,
- (2) $c(O(A_1, \dots, A_n)) = \max\{c(A_1), \dots, c(A_n)\} + 1$,
- (3) $c(QvA) = c(A) + 1$.

La complejidad es pues una función de fórmulas en números naturales que especifica la longitud de la secuencia más larga de ocurrencias anidadas de símbolos lógicos de una fórmula. Si $c(A)=0$ se dice que A es una fórmula atómica, y si $c(A) \neq 0$ que A es una fórmula molecular. Si $\mathbf{F}$ es el conjunto

de las fórmulas del prolanguage $\mathcal{P}$ usaremos la notación ' F_n ' para designar al conjunto de las fórmulas de $\mathcal{P}$ de complejidad n ($n=0,1,2,\dots$).

Rango cuantificacional de una fórmula A , $RC(A)$.

- (1) Si $C(A)=0$, $RC(A)=0$,
- (2) $C(\bigcirc(A_1,\dots,A_n))=\max\{RC(A_1),\dots,RC(A_n)\}$,
- (3) $RC(QvA)=RC(A)+1$.

Variables libres en una fórmula A , $VL(A)$.

Sea $V(A)$ el conjunto de variables individuales que ocurren en una fórmula A ; entonces:

- (1) $VL(A)=V(A)$, si $c(A)=0$,
- (2) $VL(\bigcirc(A_1,\dots,A_n))=VL(A_1)\cup\dots\cup VL(A_n)$,
- (3) $VL(QvA)=VL(A)-\{v\}$.

Si $x\in V(A)$ pero $x\notin VL(A)$, se dice que x *está ligada en* A .

Subfórmulas de una fórmula A .

El conjunto $SF(A)$ de subfórmulas de A queda definido por medio de las cláusulas siguientes:

- (1) $SF(A)=\{A\}$, si $c(A)=0$,
- (2) $SF(\bigcirc(A_1,\dots,A_n))=SF(A_1)\cup\dots\cup SF(A_n)\cup\{\bigcirc(A_1,\dots,A_n)\}$,
- (3) $SF(QvA)=SF(A)\cup\{QvA\}$.

De entre las subfórmulas de una fórmula molecular se distinguen sus subfórmulas inmediatas: si $A=\bigcirc(A_1,\dots,A_n)$, sus subfórmulas inmediatas son $A_1,\dots,A_n$, y si $A=QvB$, que B es la subfórmula inmediata de A .

Ocurrencias libres y ligadas de una variable en una fórmula A .

Una ocurrencia x' de una variable x en una fórmula A está libre si (1) x' está en una subfórmula B de A , $x\in VL(B)$, y (2) esa ocurrencia de B en A no es una subfórmula de ninguna fórmula de la forma QxC . En caso contrario, x' está ligada en A .

No hay que confundir las nociones de variable libre y ocurrencia libre de una variable: si una variable v está libre en una fórmula A entonces hay al menos una ocurrencia libre de v en A , aunque podría haber otras ocurrencias ligadas de esa variable en A .

Fórmulas abiertas y cerradas.

Si $VL(A)=\emptyset$ se dice que A es una *fórmula cerrada* de $\mathcal{P}$ y en caso contrario -es decir, si $VL(A)\neq\emptyset$ - se dice que A es una *fórmula abierta* de $\mathcal{P}$.

Término libre para una variable en una fórmula.

Un término t está libre para una variable v en una fórmula A si al sustituir cualquier ocurrencia libre de v en A por una ocurrencia de t , toda ocurrencia de una variable libre w en esa ocurrencia de t está libre en la fórmula resultante.

Subtérminos de un término t .

El conjunto $ST(t)$ de un término t queda definido por las cláusulas:

- (1) si t es una variable, $ST(t)=\{t\}$,
- (2) si $t=f^n(t_1,\dots,t_n)$ entonces $ST(t)=\{f^n(t_1,\dots,t_n)\}\cup ST(t_1)\cup\dots\cup ST(t_n)$.

Subfórmulas generalizadas.

Una noción ligeramente distinta de la de subfórmula definida antes es la de *subfórmula generalizada*. El conjunto de subfórmulas generalizadas de una fórmula A , $SFG(A)$, se define así:

- (1) $SFG(A)=\{A\}$, si $c(A)=0$,
- (2) $SFG(\bigcirc(A_1,\dots,A_n))=SFG(A_1)\cup\dots\cup SFG(A_n)\cup\{\bigcirc(A_1,\dots,A_n)\}$,
- (3) $SFG(QvB)=\bigcup\{SFG(B(v/t)/t \text{ es un término})\}\cup\{QvB\}$, donde $B(v/t)$ es la fórmula resultante de sustituir cada ocurrencia libre de v en B por (una ocurrencia de) t .

Estructura de las fórmulas cuantificacionales.

Si $A = (Q_1 v_1), \dots, (Q_n v_n) B$, se dice que $(Q_1 v_1), \dots, (Q_n v_n)$ es el *prefijo cuantificacional* de A y que B es la *matriz cuantificacional* de A .

Sublenguaje, fragmento de un prolenguaje.

Dados dos prolenguajes $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$, diremos que $\mathcal{P}$ es un sublenguaje de $\mathcal{P}'$ cuando se cumpla $F \subseteq F'$. Si además se cumple $F_0 = F'_0$, diremos que $\mathcal{P}$ es un fragmento de $\mathcal{P}'$.

TIPOLOGÍA DE LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS.

Una vez definido el conjunto F de fórmulas, hay dos estrategias básicas para definir la derivabilidad: la hilbertiana y la gentzeniana. En ambos casos se trata de dar una definición recursiva de una operación $C: \text{Sb}(F) \rightarrow \text{Sb}(F)$ o de una relación $R \subseteq \text{Sb}(F) \times F$; las diferencias se refieren a cuál sea el criterio de complejidad adoptado. En los sistemas hilbertianos el criterio es el cardinal del conjunto de premisas, de modo que primero se define $C(\emptyset)$ y sucesivamente se define $C(X)$ para conjuntos de cardinalidad creciente. El criterio de complejidad que subyace en un sistema gentzeniano es más sutil y tiene en cuenta la complejidad de las fórmulas que integran el argumento. Si $c(A)$ es la complejidad de una fórmula A , sea $c(X) = \max\{c(A) / A \in X\}$. Así, una posibilidad es decir que un argumento $\langle X, A \rangle$ es entonces más complejo que un argumento $\langle Y, B \rangle$ si $c(X \cup \{A\}) > c(Y \cup \{B\})$. Otra posibilidad es definir la complejidad de un argumento $\langle X, A \rangle$ por medio de la ecuación $c(\langle X, A \rangle) = \sum \{c(B) / B \in X \cup \{A\}\}$ —es decir, como la suma de las complejidades de las fórmulas (y no de las ocurrencias de esas fórmulas) que lo integran. Por consiguiente, sea cual sea la definición de la complejidad de un argumento adoptada, un buen ejemplo de deducción primitiva según un criterio gentzeniano es $\langle \{A\}, A \rangle$ si $c(A) = 0$.³

ESTRATEGIA HILBERTIANA.

- (1) Se define inductivamente $C(\emptyset)$.
- (2) Para todo conjunto finito de fórmulas X , $C(X)$ queda definido por una estipulación de la forma: $A \in C(X)$ syss $B \in C(\emptyset)$.
- (3) Para todo conjunto de fórmulas X , finito o infinito, $C(X)$ queda definido por la estipulación: $A \in C(X)$ syss para algún subconjunto finito Y de X , $A \in C(Y)$.

ESTRATEGIA GENTZENIANA.

Pueden distinguirse dos variantes, que denominaremos gentzeniano-scottiana y gentzeniano-tarskiana. Para explicar mínimamente esta terminología, diremos que de una relación $R \subseteq \text{Sb}F \times \text{Sb}F$ que satisface unos requisitos análogos a los enunciados antes para las operaciones de consecuencia se dice que es una relación de *consecuencia de Scott* (por Dana Scott). Adviértase que la operación de consecuencia correspondiente a una relación de consecuencia de Scott es del tipo $C: \text{Sb}F \rightarrow \text{Sb}(\text{Sb}(F))$. Cuando se consideran relaciones de consecuencia de Scott, se denominan relaciones de *consecuencia de Tarski* a las relaciones $R \subseteq \text{Sb}F \times F$ descritas en las páginas anteriores.

Estrategia de Gentzen-Scott

- (1) Se define inductivamente un conjunto de pares de conjuntos finitos de fórmulas o secuentes, S (es decir, una relación de consecuencia de Scott). Naturalmente, la complejidad de un seciente está en función de la complejidad de las fórmulas que lo integran.
- (2) Para todo conjunto finito de fórmulas X , $C(X)$ queda definido por la estipulación: $A \in C(X)$ syss $\langle X, \{A\} \rangle \in S$.

³ En realidad, la complejidad de un argumento según un criterio gentzeniano depende de la complejidad del esquema argumental que lo valida, y así no de la complejidad de las fórmulas que integran el argumento sino de la complejidad de los esquemas de fórmula que aparecen en dicho esquema argumental. Así, los argumentos $\langle \{p\}, p \rangle$ y $\langle \{O(p_1, \dots, p_n)\}, O(p_1, \dots, p_n) \rangle$ caen bajo el esquema argumental $\langle \{A\}, A \rangle$ y por ello se les asignaría la misma complejidad: serían deducciones básicas.

(3) Para todo conjunto de fórmulas X , finito o infinito, $C(X)$ queda definido por la estipulación: $A \in C(X)$ syss para algún subconjunto finito Y de X , $A \in C(Y)$.

Estrategia de Gentzen-Tarski

(1) Se define inductivamente un conjunto de pares formados por un conjunto finito de fórmulas y una fórmula.

(2) Para todo conjunto de fórmulas X , finito o infinito, $C(X)$ queda definido por la estipulación: $A \in C(X)$ syss para algún subconjunto finito Y de X , $A \in C(Y)$.

[1] Del mismo modo en que antes se ha distinguido, dentro de los sistemas lógicos, entre lenguajes formales y sistemas deductivos, puede distinguirse dentro de éstos entre sistemas hilbertianos y gentzenianos.

[2] Algunos sistemas deductivos sólo pueden caracterizarse gentzenianamente. En efecto, para que una relación u operación de consecuencia sea definible *à la Hilbert* es preciso que sea teorematizable (a menos que sea vacía) y que su naturaleza y los recursos expresivos del prolanguage correspondiente permitan capturar una operación sobre conjuntos de fórmulas a través de una propiedad de las fórmulas (es decir, un conjunto de fórmulas).

[3] Advuértase que ambas estrategias presuponen que la relación de consecuencia es finitaria.

[4] Para simplificar, en las descripciones de las dos estrategias no se han tenido en cuenta las diferencias de formato entre las expresiones con las que opera el sistema deductivo y los argumentos.

TIPOLOGÍA DE LAS REGLAS DE INFERENCIA.

[1] Reglas de tipo Hilbert o de nivel 0.

Transforman fórmulas en fórmulas, y por consiguiente son de la forma:

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$$

[2] Reglas de tipo Gentzen o de nivel 1.

Transforman reglas de nivel 0 en reglas de nivel 0, y por consiguiente son de la forma:

$$\frac{X_1 \Rightarrow Y_1, \dots, X_n \Rightarrow Y_n}{X \Rightarrow Y}$$

[3] En general, las reglas de nivel $n+1$ transforman reglas de nivel n en reglas de nivel n .

[1] Aunque esta jerarquía de las reglas de inferencia fué propuesta -y mínimamente explorada- por Moisil en los años 50, en la práctica sólo se emplean reglas de los niveles 0 y 1.⁴

[2] En un sistema hilbertiano se empieza por dar una definición inductiva de un conjunto T de fórmulas (o conjunto de teoremas del sistema). Por tanto consta de cláusulas de base, de la forma $A \in T$ o $\emptyset \vdash_s A$ o simplemente $\vdash_s A$, y de cláusulas de recurrencia, de la forma 'si $\vdash_s A_1, \dots, \vdash_s A_n$ entonces $\vdash_s B$ '. Las fórmulas declaradas teoremas por las cláusulas de base reciben el nombre de *axiomas del sistema*. Por ello a veces se llama *sistemas axiomáticos* a los sistemas hilbertianos. Las cláusulas de un sistema hilbertiano son, obviamente, reglas de nivel 0. Una última precisión terminológica: algunos denominan *esquemas de axioma* y *reglas de prueba* a las cláusulas de base y recurrencia de un sistema hilbertiano.

[3] En un sistema gentzeniano se da una definición inductiva de un conjunto de pares ordenados de conjuntos finitos de fórmulas o secuentes, Σ . En vez de escribir ' $\langle X, Y \rangle$ ' para designar un seciente suele escribirse ' $X \vdash Y$ ' o ' $X \Rightarrow Y$ '. Así pues, sus cláusulas de base son de la forma $(X \vdash Y) \in \Sigma$ o abreviadamente $X \vdash Y$, y las de recurrencia de la forma 'si $X_1 \vdash Y_1, \dots, X_n \vdash Y_n$ entonces $X \vdash Y$ '. El conjunto Σ así definido es el conjunto de los secuentes derivables del sistema, los secuentes derivables directamente usando cláusulas de base reciben el nombre de *axiomas* y las *cláusulas de recurrencia*, que son evidentemente reglas de nivel 1, el de *reglas derivacionales*.

⁴ Sin embargo, vid. K.Došen, 'Sequent systems for modal logics'[1985] y G.Crocco y L.Fariñas del Cerro, 'Structure, Consequence Relation and Logic' en Gabbay [1994] a propósito de la noción de seciente de segundo grado.

[4] Un sistema hilbertiano puede definirse, por tanto, como un sistema deductivo definido por reglas de nivel 0, y un sistema gentzeniano como un sistema deductivo definido por reglas de nivel 1.

Esta jerarquía de las reglas de inferencia no está exenta de alguna ambigüedad. Un axioma del cálculo secuencial como $A \vdash A$ (cfr. Capítulos 3 y 4) puede verse alternativamente como una regla de nivel 0 o como una regla de nivel 1 de la forma $\emptyset \vdash \emptyset \Rightarrow A \vdash A$.

CLASIFICACIÓN DE LAS REGLAS DE NIVEL 1.

Como ya se ha indicado al comentar las propiedades definitorias de los sistemas lógicos, entre las fórmulas las hay simples y complejas. A continuación se generaliza la noción de complejidad de fórmulas a conjuntos de fórmulas, secuentes y conjuntos de secuentes.

La complejidad de un conjunto de fórmulas X , $c(X)$ es la suma de las complejidades de sus elementos. La complejidad de un secuyente $X \vdash Y$ es la suma de las complejidades de X e Y , es decir, $c(X \vdash Y) = c(X) + c(Y)$. La complejidad de un conjunto de secuentes $X_1 \vdash Y_1, \dots, X_n \vdash Y_n$ es $c(X_1 \cup \dots \cup X_n) + c(Y_1 \cup \dots \cup Y_n) = c(X_1 \vdash Y_1, \dots, X_n \vdash Y_n)$.

Estas definiciones tratan con conjuntos. Por consiguiente: $c(\{A, B, B\}) = c(A) + c(B)$; $c(X \vdash Y, X \vdash Y) = c(X, Y)$, etc.

Las reglas de nivel 1, cuya forma genérica es $(X_1 \vdash Y_1, \dots, X_n \vdash Y_n) \Rightarrow (X \vdash Y)$, se dividen en reglas operacionales y reglas estructurales. A continuación se enuncia un criterio formal para diferenciarlas.

A) Una *regla* de nivel 1 es *operacional* si para toda aplicación de esa regla, o bien $(X_1 \vdash Y_1, \dots, X_n \vdash Y_n) \Rightarrow c(X \vdash Y) + 1$ o bien $c(X_1 \vdash Y_1, \dots, X_n \vdash Y_n) + 1 = c(X \vdash Y)$. En el primer caso se dice que es una regla de *eliminación*, en el segundo que es una regla de *introducción*.

b) Una *regla* de nivel 1 es *estructural* si no es operacional. Por tanto, pueden distinguirse tres variedades de reglas estructurales atendiendo a la relación entre $c(X_1 \vdash Y_1, \dots, X_n \vdash Y_n)$ y $c(X \vdash Y)$:

b.1 Reglas estructurales para las que se cumple $c(X_1 \vdash Y_1, \dots, X_n \vdash Y_n) = c(X \vdash Y)$ para cualquier aplicación de la regla;

b.2 Reglas en las que la complejidad de $X_1 \vdash Y_1, \dots, X_n \vdash Y_n$ es siempre menor o igual que la complejidad de $X \vdash Y$. El valor de $c(X \vdash Y) - c(X_1 \vdash Y_1, \dots, X_n \vdash Y_n)$ varía de una aplicación a otra, aunque para al menos una aplicación es > 1 .

b.3 Reglas en las que la complejidad de $X_1 \vdash Y_1, \dots, X_n \vdash Y_n$ es siempre mayor o igual que la complejidad de $X \vdash Y$. El valor de $c(X_1 \vdash Y_1, \dots, X_n \vdash Y_n) - c(X \vdash Y)$ es variable, aunque para alguna aplicación de la regla es > 1 .

COMENTARIO.

[1] Por tanto, las reglas de nivel 1 pueden ser estructurales u operacionales (a éstas se les llama a veces *lógicas*). Las reglas estructurales expresan características generales bien de la derivabilidad bien de la misma operación de consecuencia, y así se enuncian sin mencionar símbolo lógico alguno. Podría decirse por ello que manipulan estructuras, frente a las reglas operacionales que manipulan fórmulas.

[2] Dentro de las reglas estructurales, se distingue entre reglas de razonamiento y reglas de datos. Las reglas de razonamiento expresan características muy generales de la operación de consecuencia como las descritas en el epígrafe *Propiedades de los sistemas lógicos*: reflexividad, transitividad, etc. Las reglas de datos definen la estructura fundamental de los objetos sintácticos con los que opera el sistema; dicho de otro modo, se refieren a los modos en los que pueden manipularse las fórmulas que integran un argumento para construir argumentos demostrativos. Así, las reglas de datos expresan características de la derivabilidad antes que características de la relación de consecuencia.

[3] Un buen ejemplo de regla de razonamiento es la regla de corte, $X \vdash A \quad X, A \vdash Y \Rightarrow X \vdash Y$, que expresa la transitividad de la relación de consecuencia.

[4] Las reglas de datos dicen, entre otras cosas, si las premisas forman un conjunto, una secuencia, un multiconjunto o algún otro tipo de estructura más compleja. Un buen ejemplo de reglas de datos

son las reglas $X, A, B, Z \vdash Y \Rightarrow X, B, A, Z \vdash Y$ y $X \vdash Y, A, B, Z \Rightarrow X \vdash Y, B, A, Z$ (de permutación o intercambio) especifican que el orden de los elementos del antecedente y el consecuente no es significativo.

[4] Las reglas operacionales representan las distintas operaciones aplicables a los secuentes en el lenguaje objeto. Bajo ciertas condiciones mínimas, pueden verse como reglas para la manipulación de secuentes en el lenguaje objeto. Ejemplos característicos son $X, A, B \vdash Y \Rightarrow X, A \& B \vdash Y$ (introducción de ‘&’) y $X, A \& B \vdash Y \Rightarrow X, A, B \vdash Y$ (eliminación de ‘&’).

[5] Decir que A se sigue de X es decir que pueden manipularse de acuerdo con un procedimiento previamente establecido fórmulas $B_1, \dots, B_n$ de X para extraer la conclusión A. La manipulación de las fórmulas $B_1, \dots, B_n$ incluye disponerlas en un orden determinado. Puede suceder que una ordenación S de $B_1, \dots, B_n$ permita extraer la conclusión A según el procedimiento establecido y otra disposición S’ no. Diríamos entonces que el argumento premisas-conclusión $\langle X, A \rangle$ es correcto, lo mismo que el argumento demostrativo $\langle S, A \rangle$ y a diferencia del argumento demostrativo $\langle S', A \rangle$.

[6] Las reglas de razonamiento expresan propiedades de los argumentos premisas-conclusión, por ejemplo, si el argumento $\langle X, A \rangle$ es correcto, también lo es el argumento $\langle X \cup Y, A \rangle$ (monotonía), mientras que las reglas de datos expresan propiedades de los argumentos demostrativos (como la permutación).

[7] Las reglas de nivel 1 difieren, pues, por su generalidad, máxima en las reglas de razonamiento y mínima en las reglas operacionales. Como las reglas de razonamiento están ligadas a la idea misma de consecuencia, cabe esperar que aparezcan –con unos ropajes u otros– en cualquier sistema deductivo. Las reglas de datos, por su parte, parecen propias de una lógica particular, y así variarán de una lógica a otra pero no cuando se consideren sistemas deductivos distintos para una misma lógica. Finalmente, las reglas operacionales están vinculadas al prolenguaje utilizado más que a la lógica que se pretende caracterizar.⁵

Para prevenir confusiones hay que advertir que algunos autores, generalmente en el contexto de sistemas de deducción natural (*vid.* capítulo 7), hablan de reglas operacionales de introducción y de eliminación en un sentido distinto al nuestro. Para caracterizar completamente el significado derivacional de un operador lógico ‘ $\circ$ ’ hay que especificar tanto el conjunto de las consecuencias de las fórmulas de la forma $\circ(A_1, \dots, A_n)$ como los conjuntos de fórmulas de los que se siguen esas fórmulas. Dicho de otro modo, hay que especificar el comportamiento de las fórmulas $\circ(A_1, \dots, A_n)$ como premisas y como conclusiones. Hay autores, como Prawitz, que denominan ‘reglas de eliminación’ a las reglas operacionales que determinan el comportamiento de esas fórmulas en tanto que premisas de una inferencia y ‘reglas de introducción’ a las que determinan su comportamiento como conclusión de una inferencia. En los sistemas de deducción natural, las dos acepciones de eliminación/introducción coinciden, de manera que las reglas operacionales de introducción en nuestra acepción son las reglas operacionales de introducción en la acepción de Prawitz, y lo mismo sucede con las reglas de eliminación. En los sistemas de cálculo de secuentes, por el contrario, las reglas de eliminación de Prawitz son, según nuestra terminología, reglas de introducción en el antecedente, y sus reglas de introducción son reglas de introducción en el consecuente.

EJERCICIOS.

- (1) Definir las nociones de conjunto y multiconjunto en términos de relaciones de equivalencia entre secuencias.
- (2) Si E es el conjunto de los enteros no negativos, sea ζ la relación entre subconjuntos de E y enteros no negativos definida por la estipulación $X \zeta A$ si y sólo si $\max(X) \leq A$ (es decir, A es mayor o igual que el mayor de los elementos de X). ¿Cuáles de las propiedades distintivas de los sistemas lógicos estándar posee $\langle E, \zeta \rangle$?
- (3) Siendo E como en el ejercicio anterior, sea ξ la relación entre subconjuntos de E y enteros no

⁵ Sin embargo las cosas no son tan sencillas. Es sabido que algunos resultados sobre lógicas no clásicas son sensibles a la elección del prolenguaje en el que se expresa esa lógica. El fenómeno es conocido como “advertencia de Makinson”, por ser este autor quien primero reparó en él.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS

negativos definida por la estipulación $X \leq A$ si y sólo si $\max(X) \geq A$ (es decir, A es menor o igual que el mayor de los elementos de X). ¿Cuáles de las propiedades distintivas de los sistemas lógicos estándar posee $\langle E, \leq \rangle$?

(4) Si N es el conjunto de los enteros no negativos, la noción de fórmula de $\mathcal{P}_N$ se define como sigue:

RF1. Si $A \in N$ entonces (A) es una fórmula de $\mathcal{P}_N$.

RF2. Si (X) e (Y) son fórmulas de $\mathcal{P}_N$, (X, Y) es una fórmula $\mathcal{P}_N$.

¿Es $\mathcal{P}_N$ un prolanguage? En concreto, ¿puede demostrarse un teorema de unicidad de lectura para $\mathcal{P}_N$?

(4) Modificar la definición precedente de fórmula de $\mathcal{P}_N$ para asegurar su no ambigüedad.

(5) ¿Cuáles serían los símbolos lógicos, y en qué categoría caerían, de $\mathcal{P}_N$?

(6) Clasificar las reglas del sistema deductivo SM del capítulo 3, indicando en el caso de las reglas estructurales si son de tipo b.1, b.2 o b.3.

(7) Partiendo de la respuesta al ejercicio 2, definir la complejidad o grado lógico de una fórmula de $\mathcal{P}_N$. Calcular la complejidad de las fórmulas (i) $((1), (3)), (7)$, (ii) $((13)(580))$ y (iii) $((1(3))5)(80)$.

(8) Especificar el conjunto de subfórmulas de las fórmulas (i)-(iii) del ejercicio 4.

(9) ¿Se cumple que si $c(A) < c(B)$ entonces B tiene más subfórmulas que A (es decir, formulado con un poco más de precisión, que el cardinal de $SF(B)$ es mayor que el cardinal de $SF(A)$)?

(10) La regla de nivel 1

$$\frac{X \vdash Y}{s(X) \vdash s(Y)}$$

Para cualquier sustitución s , ¿Es una regla de razonamiento o una regla de datos?

(11) La regla

$$\frac{X \vdash Y \quad Z \vdash W}{X, Z \vdash Y, W}$$

¿Es una regla operacional, estructural o de datos?

(12) Indicar el nivel de la regla

$$\frac{X, A \vdash Y}{X \vdash A, Y} \Rightarrow \frac{X, A \vdash Y}{X \vdash Y}$$

Comparar esa regla con la regla de Corte:

$$\frac{X, A \vdash Y \quad X \vdash A, Y}{X \vdash Y}$$

¿En qué difieren estas dos reglas?