

Capítulo 3

Semántica.

En este tema el concepto fundamental a introducir es el de consecuencia. Como ya dije antes, el objetivo didáctico es que se entienda porqué “ $\Gamma \models C$ ” equivale a que “ $\Gamma \cup \{\neg C\}$ ” es insatisfacible”. Estudiaremos también las propiedades algebraicas de los conectores y sus interrelaciones.

Comentario 16 *En este curso manejaremos tres métodos diferentes para verificar la consistencia (o la consecuencia) de enunciados. **Directo**; es decir, usando simplemente las definiciones pertinentes. **Árboles** (llamados también “**tablas semánticas**”); esto es, construyendo lo que se denomina un árbol lógico, cuyas reglas se especificarán más adelante. **Tablas de verdad**; es decir, interpretando adecuadamente las tablas de verdad de las fórmulas implicadas.*

3.1. Introducción.

Contamos con un lenguaje formal, L_0 , que nos sirve para formalizar en él las sentencias del castellano. Pero la lógica, definida por algunos como la ciencia de la consecuencia (o del razonamiento válido), necesita precisar qué queremos decir cuando afirmamos que una fórmula C es una consecuencia de un conjunto de fórmulas Γ (o, lo que es lo mismo, que el razonamiento que toma como hipótesis a las fórmulas de Γ y cuya conclusión es C es un razonamiento válido, correcto, no falaz). Una forma posible de plantearlo es utilizando la formalización. Un razonamiento válido lo es por la estructura interna de los enunciados que contiene, y no lo es en razón de los significados concretos de los términos implicados. Cuando formalizamos realizamos la estructura de los enunciados y los significados de los términos pierden relevancia. Así formalizados es más sencillo ver el esquema seguido. Este esquema ha de producir nuevos razonamientos igualmente válidos. Justamente, lo que caracteriza a un razonamiento válido es que si retraducimos el esquema formal obtenido a una lengua natural, el resultado seguirá siendo un razonamiento válido. Un razonamiento válido nos da la pauta de muchos otros.

Un razonamiento es válido (por ejemplo, $p \wedge q \models p$) porque con independencia de cómo retraduzcamos p y q al castellano, si la traducción de $p \wedge q$ es verdadera, también lo será la de p . Es decir, es inconcebible una situación que haciendo verdadera a $p \wedge q$ haga falsa a p ; signifiquen lo que signifiquen p y q . Afortunadamente, aunque esto de la retraducción al castellano es muy ambiguo, la idea es muy simple y no necesitaremos recurrir a traducciones para definir con precisión el concepto de consecuencia.

3.1.1. Ejercicios.-

EJERCICIO 1.- La oscuridad de la noche: Una prueba de la Teoría del Big Bang.

El gran descubrimiento de este siglo es que el universo no es inmóvil ni eterno, como supuso la mayoría de los científicos del pasado. El universo tiene una historia, no ha cesado de evolucionar, enrareciéndose, enfriándose, estructurándose. Esta evolución sucede desde un pasado distante que se sitúa, según las estimaciones, hace diez o quince mil millones de años, cuando el universo está completamente desorganizado, no posee galaxias, ni estrellas, ni moléculas, ni tan siquiera núcleos de átomos...Es lo que se ha llamado el BIG BANG. Una de las pruebas indirectas de esta teoría se puede plantear así:

Si las estrellas fueran eternas (p), entonces la cantidad de luz emitida sería infinita (q). Si la cantidad de luz emitida fuera infinita, entonces el cielo debería ser extremadamente luminoso (r). El cielo es oscuro.

LUEGO: Las estrellas no existieron siempre.

EJERCICIO 2.- Retraducción.

Si el esquema anterior corresponde a un razonamiento correcto; es decir, si $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), \neg r\} \models \neg p$, lo seguirá siendo cuando retraduzcamos al castellano p , q y r . Veremos después que este esquema corresponde al del razonamiento de **Lucrecio, siglo I a.c**

Utilizad ahora la retraducción siguiente:

$p \equiv$ **Pedro es culpable**

$q \equiv$ **Quintín es cómplice**

$r \equiv$ **Juan es culpable**

Nos sale así el siguiente razonamiento (sacado de los archivos del inspector Craig, realizado con ayuda del sargento Mc Pherson)

Si Pedro es culpable, entonces Quintín es cómplice.

Si Quintín es cómplice, entonces Juan no es inocente. Juan es inocente.

LUEGO: *Pedro es inocente.*

EJERCICIO 3.- Lucrecio, filósofo romano. siglo I antes de Cristo.

Lucrecio afirmaba que el universo aún estaba en su juventud. Razonó así: He comprobado desde mi infancia, se dijo, que las técnicas se han ido perfeccionando. Han mejorado el velamen de nuestros barcos, inventado armas más y más eficaces, fabricado instrumentos musicales más refinados...¿Si el universo fuera eterno, todos estos progresos habrían tenido tiempo de realizarse cien, mil, un millón de veces?

Si el **universo fuera eterno** (p), entonces **todos los progresos se habrían realizado ya** (q). Si todos los progresos se hubieran producido ya, **el mundo estaría acabado, no cambiaría** (r). El mundo cambia.

LUEGO El mundo no existe desde siempre.

3.2. Tablas de verdad.

Aquí se introducirán las tablas de verdad de los conectores, las tablas de verdad para fórmulas cualesquiera y se aprenderá a interpretar el significado de las filas y de las columnas de una tabla. De especial interés es remarcar que en cada fila obtenemos el valor de verdad de la fórmula para la combinación de valores de verdad de sus letras proposicionales. También aquí clasificaremos a las fórmulas en tautologías, antilogías y fórmulas contingentes.

A la pregunta planteada en este apartado (¿por qué las tablas de verdad determinan un único valor de verdad para cada fórmula en función del valor de verdad de sus letras proposicionales?) no puede responderse de otra forma que recurriendo al principio de inducción y haciendo una definición precisa del concepto de interpretación (a partir del de asignación de valores de verdad a las letras proposicionales) siguiendo el esquema de las definiciones por inducción semiótica que ya conoceis.

Conectores binarios.

C	D	$(C \wedge D)$	$(C \vee D)$	$(C \rightarrow D)$	$(C \leftrightarrow D)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

(Tabla de los conectores binarios usados en nuestro lenguaje formal; los conectores binarios se interpretan como funciones binarias sobre el conjunto de los valores de verdad $\{1, 0\}$.)

Conector monario.

C	$\neg C$
1	0
0	1

(Tabla del conector monario de negación.)

Tabla de verdad de una fórmula cualquiera, C .

Usando la definición de los conectores que aparecen que en las tablas precedentes, construimos la tabla de verdad de una fórmula cualquiera, C . A la izquierda pondremos las letras proposicionales de la fórmula C , y bajo ellas todas las combinaciones de valores de verdad. Si en la fórmula C hay n letras proposicionales distintas, habrá 2^n combinaciones de valores de verdad. Una manera de evitar que se olviden combinaciones es hacerlo como aparece en los ejercicios siguientes:

p	$(p \wedge \neg p) \rightarrow \neg p$	$(p \vee \neg p) \rightarrow p$	$(p \wedge p)$	$(p \vee \neg p)$
1				
0				

p	q	$p \rightarrow (p \vee q)$	$(p \vee \neg q) \rightarrow p$	$(p \vee \neg p) \rightarrow (q \wedge \neg q)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

p	q	r	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$	$(p \vee r) \rightarrow \neg q$
1	1	1		
1	1	0		
1	0	1		
1	0	0		
0	1	1		
0	1	0		
0	0	1		
0	0	0		

Clasificación de fórmulas. En razón de sus tablas de verdad clasificamos a las fórmulas en tres grandes categorías: *tautologías*, *contingentes* y *contradicciones*. Por supuesto, para expresar que una fórmula cae bajo alguna de estas categorías se usa el metalenguaje.

Tautologías (o válidas) son las fórmulas cuya tabla de verdad tiene como columna principal una formada exclusivamente de 1's.

p	q	...	C
1	1		1
$\vdots$			$\vdots$
			1
$\vdots$			$\vdots$

Contingentes son las fórmulas cuya tabla de verdad tiene como columna principal una formada por 1's y 0's

p	q	...	C
1	1	...	$\vdots$
		...	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Contradicciones (o antilogías) son las fórmulas cuya tabla de verdad tiene como columna principal una formada exclusivamente de 0's

p	q	...	C
1	1		0
$\vdots$			$\vdots$
			0
$\vdots$			$\vdots$

3.2.1. EJERCICIOS:

Clasificad las fórmulas siguientes: (Tautologías, etc.)

1. $(p \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. p
3. $p \vee q$
4. $((p \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow \neg r) \rightarrow q$
5. $((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
6. $((p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow \neg(p \vee s))$
7. $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

8. $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \rightarrow (r \wedge \neg r)$
9. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \rightarrow q)$
10. $\neg(p \wedge \neg p) \rightarrow (p \wedge p)$
11. $((p \wedge \neg q) \wedge r) \rightarrow s \leftrightarrow (\neg s \rightarrow ((\neg p \vee q) \vee r))$
12. $p \rightarrow (p \vee (q \wedge \neg q))$

3.3. Interpretación de L_0 .

Las fórmulas de L_0 se interpretan en un universo de dos valores, $\{1, 0\}$. Para establecer el valor de verdad de una fórmula cualquiera necesitamos previamente asignar valores a las letras proposicionales. Basada en esa asignación se establece el valor de verdad de una fórmula cualquiera.

ASIGNACIÓN Una asignación es una función f que otorga un valor de verdad a cada letra proposicional; es decir,

$$f : LS \longrightarrow \{1, 0\}$$

INTERPRETACIÓN Dada una asignación f definimos una interpretación $\mathfrak{I}$ extendiendo la función f de forma que otorgue un valor de verdad a cada fórmula del lenguaje formal L_0 ; es decir,

$$\mathfrak{I} : FORM(L_0) \longrightarrow \{1, 0\}$$

La definición de $\mathfrak{I}$ se hará mediante el procedimiento de inducción semiótica, así:

F1.

$$\mathfrak{I}(p) = f(p)$$

F2.

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\neg C) &= 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 0 \\ \mathfrak{I}(C \wedge D) &= 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 1 \quad \text{y} \quad \mathfrak{I}(D) = 1 \\ \mathfrak{I}(C \vee D) &= \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 1 \quad \text{o} \quad \mathfrak{I}(D) = 1 \\ \mathfrak{I}(C \rightarrow D) &= 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 0 \quad \text{o} \quad \mathfrak{I}(D) = 1 \\ \mathfrak{I}(C \leftrightarrow D) &= 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = \mathfrak{I}(D) \end{aligned}$$

3.4. Conceptos clave.

Aquí definimos los conceptos de *satisfacibilidad* de una fórmula y de un conjunto de fórmulas, introducimos la relación de *consecuencia* y su negación (la de *independencia*) y terminamos definiendo la *equivalencia* entre fórmulas. El concepto de *validez* se reducirá al de consecuencia (del conjunto vacío de fórmulas). También, como cuestión terminológica, diremos que una interpretación $\mathcal{I}$ es un *modelo* de una fórmula (o de un conjunto de fórmulas) en el caso en que la interpretación satisfaga a la fórmula (o a cada una de las fórmulas del conjunto).

Al introducir el concepto de consecuencia hay que hacer hincapié en cómo hemos conseguido precisar la idea intuitiva de razonamiento válido sin tener que recurrir a la retraducción al castellano.

Dado que tenemos que manejar una gran cantidad de conceptos de enorme importancia, su definición será paulatina y sirviéndose de muchos ejemplos y ejercicios de complejidad creciente. Una buena táctica es comenzar por las pruebas de independencia con fórmulas y pasar a las pruebas de independencia, pero con razonamientos escritos en castellano que tienen que ser formalizados. Cuando esteis ya acostumbrados a buscar el contraejemplo, pondremos razonamientos correctos y veremos que es imposible encontrar un contraejemplo: un modelo de las hipótesis y de la negación de la conclusión. Observamos entonces que " $T \models C$ " equivale a " $T \cup \{\neg C\}$ " es insatisfacible; es decir, para comprobar si una fórmula es consecuencia de un conjunto de fórmulas podremos emplear un procedimiento refutativo. A medida que la complejidad de estos ejercicios crece, la necesidad de encontrar un método sistemático de descarte de modelos se hace patente. Entonces el campo está abonado para proponer alguno de los existentes.

Podemos entonces introducir las tablas de verdad para determinar validez y consecuencia y llegar a aburrirnos con los ejercicios de cuatro o más letras proposicionales. Entonces, la necesidad de encontrar un método más eficaz se torna imperiosa y entramos en el apartado siguiente por la puerta del deseo (de encontrar un método mejor).

SATISFACIBILIDAD E INSATISFACIBILIDAD

Definición 17 Una fórmula C es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(C) = 1$.

Definición 18 Dada una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(C) = 1$ decimos que $\mathcal{I}$ *satisface* a la fórmula C ; o también, que $\mathcal{I}$ es **modelo** de la fórmula C .

Notación 19 Es corriente escribir $\mathcal{I} \models C$ para indicar que $\mathcal{I}$ es modelo de C .

Definición 20 Un conjunto de fórmulas Γ es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(G) = 1$ para cada fórmula $G \in \Gamma$.

Definición 21 Dada una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(G) = 1$ para cada $G \in \Gamma$ decimos que $\mathcal{I}$ *satisface* al conjunto Γ ; o también, que $\mathcal{I}$ es **modelo** de Γ .

Notación 22 Es corriente escribir $\mathfrak{I} \models \Gamma$ para indicar que $\mathfrak{I}$ es modelo de Γ .

Comentario 23 Si el conjunto de fórmulas es finito, $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$, Γ es satisfacible syss $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ es satisfacible.

Comentario 24 El concepto intuitivo correspondiente es, como habreis adivinado, el de coherencia, o compatibilidad de creencias.

Definición 25 Una fórmula C es **insatisfacible** syss no es satisfacible; es decir, no hay ninguna interpretación $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}(C) = 1$.

Definición 26 Un conjunto de fórmulas Γ es **insatisfacible** syss no hay ninguna interpretación $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}(G) = 1$ para cada fórmula $G \in \Gamma$.

VALIDEZ, CONSECUENCIA E INDEPENDENCIA.

Definición 27 Una fórmula C es **consecuencia** de un conjunto de fórmulas Γ -y escribimos $\Gamma \models C$ - syss todo modelo de Γ lo es también de C ; es decir, toda interpretación que hace verdadera a cada fórmula de Γ , hace verdadera a C .

Definición 28 Una fórmula C es **válida** -y escribimos $\models C$ - syss $\emptyset \models C$; es decir, toda interpretación hace verdadera a C .

Definición 29 Una fórmula C es **independiente** de un conjunto de fórmulas Γ -y escribimos $\Gamma \not\models C$ - syss C no es consecuencia de Γ ; es decir, hay modelos de Γ que no lo son de C .

EQUIVALENCIA LÓGICA.

Definición 30 Dos fórmulas C y D son **lógicamente equivalentes** si y sólo si

$$C \models D \text{ y } D \models C$$

Notación 31 Usaremos el signo $\equiv$ para expresar este **metaconcepto**, escribiremos $C \equiv D$

Comentario 32 $\equiv$ no es el bicondicional del lenguaje L_0 , que sigue siendo $\leftrightarrow$, es una relación binaria entre fórmulas establecida en el metalenguaje.

3.4.1. EJERCICIOS:

1. En cada uno de los ejercicios siguientes, encontrad fórmulas A y B tales que:
 - a) $(A \vee B)$ sea una fórmula contingente
 - b) $(A \rightarrow B)$ sea una tautología

- c) $(A \wedge B)$ sea una fórmula contingente
 - d) $(\neg A \leftrightarrow B)$ sea una tautología
 - e) $(\neg B \rightarrow A)$ sea una contradicción
 - f) $(B \rightarrow (B \vee A))$ sea una fórmula contingente
- 2. Decid si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos. Justificad la respuesta.
 - a) Si A y B son fórmulas contingentes, entonces $\{A, B\}$ es satisfacible
 - b) Si A es una tautología y B es una fórmula contingente, entonces $\{A, B\}$ es satisfacible
 - c) A es satisfacible si y sólo si A no es una contradicción
 - d) A es satisfacible si y sólo si $\neg A$ es contingente
 - e) A es una tautología si y sólo si $\neg A$ es contingente
 - f) A es una fórmula contingente si y sólo si $\neg A$ lo es también
- 3. Si A es una fórmula contingente y B una contradicción
 - a) ¿Qué es $(A \vee B)$?
 - b) ¿Y $(A \rightarrow B)$?
 - c) ¿Y $(A \wedge B)$?
 - d) ¿Y $(A \leftrightarrow B)$?
- 4. Decid si es posible encontrar fórmulas A y B tales que:
 - a) $(\neg A \vee B)$ sea una contradicción
 - b) $((A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B))$ sea una fórmula contingente
 - c) $(A \rightarrow (A \wedge B))$ sea una tautología
 - d) $(\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B))$ sea una tautología
- 5. Sean A, B y C fórmulas cualesquiera de la lógica sentencial ¿Verdadero o falso?. Justificad la respuesta
 - a) Si $\{A, B\}$ es insatisfacible, entonces $\{A\} \models \neg B$
 - b) Si $\{A, B\} \not\models C$, entonces $\{A, B\} \models \neg C$
 - c) Si $\{A, B\} \models C$ entonces $\{A, B, \neg C\}$ no puede ser satisfacible

3.5. Métodos para determinar propiedades semánticas.

De momento contamos con las definiciones y con el procedimiento de las tablas de verdad para determinar propiedades semánticas. En el capítulo siguiente introduciremos las tablas semánticas y un cálculo de deducción natural.

3.5.1. SATISFACIBILIDAD

Para demostrar que Γ es satisfacible:

- *Directo:* Encontrar una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(G) = 1$ para cada $G \in \Gamma$
- *Mediante tablas de verdad:* Ver si la tabla de verdad del conjunto Γ contiene una fila formada exclusivamente por 1's

Sea $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$

p	q	...	G_1	G_2	...	G_n
1	1					
$\vdots$						
			1	1	...1...	1
$\vdots$						

Comentario 33 Obviamente, esto equivale a hacer la conjunción $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$

3.5.2. INSATISFACIBILIDAD (OBVIO)

Para demostrar que Γ es insatisfacible:

- *Directo (no tanto):* Demostrar que no hay ninguna interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(G) = 1$ para cada $G \in \Gamma$
- *Mediante tablas de verdad:* Ver si la tabla de verdad del conjunto Γ contiene en cada fila al menos un 0

Sea $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$

p	q	...	G_1	G_2	...	G_n
1	1					0
$\vdots$					0	
				0	...	
$\vdots$			0			

- *Reducción a una fórmula:* Haces la conjunción, $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ y... ¿qué debe darte?

3.5.3. CONSECUENCIA E INDEPENDENCIA

Para determinar consecuencia e independencia usaremos el

MÉTODO MATEMÁTICO

¿Quereis conocerlo?

(REDUCCIÓN AL CASO ANTERIOR)

Es decir, usaremos:

$$\begin{array}{lll} \Gamma \models C & \text{syss} & \Gamma \cup \{\neg C\} \text{ es insatisfacible} \\ \models C & \text{syss} & \{C\} \text{ es insatisfacible} \\ \Gamma \not\models C & \text{syss} & \Gamma \cup \{\neg C\} \text{ es satisfacible} \end{array}$$

Comentario 34 La clasificación de fórmulas se efectúa en el metalenguaje, sin embargo, hemos introducido el signo $\models$ para expresarlo abreviadamente. No es un signo del alfabeto de la lógica proposicional, es una abreviatura usada en el metalenguaje. $\models A$ no es una fórmula de L_0 , es una expresión que afirma que la fórmula A es válida.

Comentario 35 Lo de llamar a esto "método matemático" es un chiste; por favor, no le llameis así. (Hace referencia al chiste de cómo fríe un huevo un físico y un matemático.)

METALENGUAJE

C es válida	$\models C$
C es una tautología	$\models C$
C no es válida	$\not\models C$
C es una contradicción C es insatisfacible	$\models \neg C$
C es satisfacible $\neg C$ no es válida	$\not\models \neg C$
C es contingente	$\not\models C$ y $\not\models \neg C$

3.6. Calculus ratiocinator.

En las clases prácticas se trabajó con *Calculus ratiocinator*, un programa realizado por el alumno Jorge Hernández para realizar tablas de verdad. El programa clasifica fórmulas (*tautologías*, *contingentes* y *contradicciones*) y también determina si una fórmula es o no *consecuencia* de un conjunto de fórmulas. En cualquiera de los casos nos puede mostrar la tabla de verdad. A la clase práctica vino Jorge y así los alumnos le sugirieron mejoras, especialmente ventanas de ayuda. El programa está disponible, es el trabajo fin de carrera del mencionado alumno, que se presentó en Febrero de 1999.

3.6.1. EJERCICIOS:

1. En los siguientes casos, determinad si Γ es satisfacible o insatisfacible y comprabad los resultados usando *Calculus*:
 - a) $\Gamma = \{(\neg q \wedge r) \vee (p \vee q), p \wedge r\}$
 - b) $\Gamma = \{p \wedge \neg q, \neg(q \vee \neg p), (q \wedge p) \vee (q \vee \neg p)\}$
 - c) $\Gamma = \{q \vee (r \vee s), \neg(q \vee r), \neg(r \vee s), \neg(s \vee q)\}$
 - d) $\Gamma = \{\neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge r), (q \vee r), \neg(p \vee \neg r)\}$
 - e) $\Gamma = \{p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow s, p, \neg s\}$
 - f) $\Gamma = \{p \rightarrow (q \wedge \neg s), \neg(s \vee p), s \leftrightarrow \neg p\}$
 - g) $\Gamma = \{(p \wedge \neg q) \leftrightarrow s, (s \wedge p) \rightarrow \neg(q \vee s)\}$
2. En cada caso determinad si la fórmula es consecuencia de las hipótesis.
 - a) $\{\neg q \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow \neg p, \neg p \rightarrow \neg q\} \models q \leftrightarrow r$
 - b) $\{\neg p \wedge \neg q, \neg p \wedge \neg r, (s \wedge t) \rightarrow p\} \models \neg s \vee \neg t$
 - c) $\{(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg s), s \rightarrow \neg(p \wedge t)\} \models s \rightarrow \neg t$
 - d) $\{p \rightarrow (\neg q \vee r), p \rightarrow q, \neg(r \vee s)\} \models p \rightarrow t$
 - e) $\{p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg s \rightarrow (p \vee r), p \rightarrow q\} \models s \vee r$

3.6.2. Verificar la corrección de algunos razonamientos:**EJERCICIO 1.- Arquímedes y la corona del rey Hierón II de Siracusa.**

Cuenta la leyenda que el rey Hierón de Siracusa había encargado una corona de oro macizo al orfebre real y que cuando éste se la entregó dudó seriamente de su honestidad, pidiéndole a Arquímedes que comprobara si efectivamente la corona era de oro puro. Naturalmente, no podía dañar la corona para hacerlo. Arquímedes andaba dándole vueltas al asunto hasta que un día, al entrar en la bañera observó el agua que rebosaba y se le ocurrió una forma de medir el volumen. Cuentan que se puso tan contento, que salió desnudo por las calles de Siracusa gritando Eureka¡¡ ¡ (lo encontré).

Lo que Arquímedes pensó fue:

Pesaría la corona y mediría su volumen midiendo el del agua que desplazara. Tomaría un lingote de oro macizo que pesara lo mismo y mediría también su volumen. Cuando lo hizo y comprobó que el lingote de oro y la corona no desplazaban la misma cantidad de agua supo que habían engañado al rey.

1. Formalizad en lógica proposicional el argumento que seguramente utilizó Arquímedes. Para ello usad lo siguiente:
 - $p \equiv$ El peso de la corona y el lingote es el mismo
 - $q \equiv$ La corona y el lingote están hechos del mismo material
 - $r \equiv$ La corona y el lingote tienen el mismo volumen
 - $s \equiv$ La corona y el lingote desplazan la misma cantidad de agua.

2. Demostrad que el razonamiento de Arquímedes es correcto.

EJERCICIO 2.- Curso de ética periodística (CQC)

En uno de los cursos de Etica periodística de Alvaro de la Iglesia se analizaba el siguiente titular de periódico:

$A \equiv$ La recuperación económica causa del incremento de accidentes de tráfico.
 En el curso se decía que si este titular fuera correcto también lo sería el siguiente:
 $B \equiv$ La Grecia clásica causa del incremento de accidentes de tráfico.
 El argumento usado es que B es consecuencia de A , habida cuenta de que:
 $C \equiv$ Hay recuperación económica si y sólo si se fabrican más coches
 $D \equiv$ La revolución industrial es la causa de la fabricación de coches
 $E \equiv$ La Grecia clásica es la causa de la revolución industrial.

1. Formalizad en lógica proposicional el argumento de Alvaro de la Iglesia. Para ello usad lo siguiente:
 $p \equiv$ Hay recuperación económica
 $q \equiv$ Ha habido un incremento de accidentes de tráfico.
 $r \equiv$ La Grecia clásica existió
 $s \equiv$ La revolución industrial existió
 $t \equiv$ Se fabrican coches.
2. Demostrad que el razonamiento es correcto.

EJERCICIO 3.- Amores del lógico Ceferino.

Al lógico Ceferino le preguntaron: ¿Amas a Queta, a Petra o a Rosana? El pensó:

Los hechos son:
Amo al menos a una de las tres.
Si amo a Petra, pero no a Queta, entonces amo a Rosana.
O bien amo a Queta y a Rosana, o no amo a ninguna de las tres.
Si amo a Queta, entonces también amo a Petra.
Contestó: Amo a las tres.

1. Formalizad en lógica proposicional el argumento del Lógico Ceferino. Para ello usad lo siguiente:
 $p \equiv$ Amo a Petra
 $q \equiv$ Amo a Queta
 $r \equiv$ Amo a Rosana
2. Determinad si es correcto el razonamiento

EJERCICIO 4.- La paradoja de los tres peluqueros (Lewis Carroll)

Al cabo de un rato, cuando avistábamos la barbería, tío Jim empezó de nuevo. "Mi única esperanza es que esté Carr -dijo-, ¡Brown es tan torpe! Y la mano de Allen tiembla constantemente desde que tuvo aquel acceso de fiebre."

"Seguro que Carr está" -dijo tío Joe. Y razonó de la siguiente manera:

Si Allen no está (p), Brown no está (q). (Desde que estuvo enfermo, no se atreve a salir sólo y se hace acompañar por el aprendiz, Brown)

Si Carr no está (r), entonces si Allen no está Brown debe de estar. (Porque la barbería no puede estar sola)

LUEGO: Carr debe estar (El motivo que aduce es que si Carr no estuviera, deberían ser verdaderas dos proposiciones hipotéticas incompatibles.)

3.7. Nuestros conectores booleanos: algunas propiedades.

En el primer subapartado (**Teorema 1**) demostraremos las principales propiedades booleanas de los conectores $\vee$, $\wedge$ y $\neg$: asociatividad de $\vee$ y $\wedge$, conmutatividad, distributividad, leyes de De Morgan, idempotencia, absorción, doble negación, etc. Posiblemente no sea el momento de acometer el planteamiento algebraico de la lógica, pero se puede decir ahora qué son las álgebras de Boole y cómo las operaciones de esas álgebras tienen las mismas propiedades que nuestros conectores $\neg$, $\vee$, $\wedge$. Para ello conviene introducir dos constantes veritativas $\perp$ y $\top$ (lo falso y lo verdadero) e indicar que la equivalencia entre fórmulas corresponde a la igualdad en el álgebra.

Por lo que respecta a la interdefinición de los conectores (**Teorema 2**), demostraremos las tautologías correspondientes y, basándonos en el teorema del apartado anterior (el de reemplazo de fórmulas equivalentes), demostraremos que nos bastan dos de ellas (por ejemplo, $\neg$ y $\vee$) para tener un lenguaje igualmente expresivo que el que ya teníamos.

3.7.1. Teorema 1 (Propiedades booleanas de los conectores.)

- **Asociatividad:**

$$((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$$

$$((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$$
- **Commutatividad:**

$$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \equiv (B \vee A)$$
- **Distributividad:**

$$((A \wedge B) \vee C) \equiv ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$$

$$((A \vee B) \wedge C) \equiv ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$$

■ **Leyes de De Morgan:**

$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$$

■ **Idempotencia:**

$$(A \wedge A) \equiv A$$

$$(A \vee A) \equiv A$$

■ **Absorción:**

$$((A \wedge B) \vee A) \equiv A$$

$$((A \vee B) \wedge A) \equiv A$$

■ **Doble negación:**

$$\neg\neg A \equiv A$$

■ **Cero y Uno**

Definamos: $\perp$ y $\top$ (lo falso y lo verdadero) así:

$$\perp \rightsquigarrow_{Df} (p \wedge \neg p) \text{ y } \top \rightsquigarrow_{Df} \neg \perp$$

$$(A \wedge \top) \equiv A$$

$$(A \wedge \perp) \equiv \perp$$

$$(A \vee \top) \equiv \top$$

$$(A \vee \perp) \equiv A$$

3.7.2. Teorema 2

(Interdefinición de los conectores)

Reducción de los conectores a $\neg$ y $\vee$ Para todo C y D :

1. $(C \wedge D) \equiv \neg(\neg C \vee \neg D)$
2. $(C \rightarrow D) \equiv (\neg C \vee D)$
3. $(C \leftrightarrow D) \equiv \neg(\neg C \vee \neg D) \vee \neg(C \vee D)$

Reducción de los conectores a $\neg$ y $\wedge$. Para todo C y D :

1. $(C \vee D) \equiv \neg(\neg C \wedge \neg D)$
2. $(C \rightarrow D) \equiv \neg(C \wedge \neg D)$
3. $(C \leftrightarrow D) \equiv \neg(\neg(C \wedge D) \wedge \neg(\neg C \wedge \neg D))$

Reducción de los conectores a $\rightarrow$ y $\perp$ Para todo C y D :

1. $\neg C \equiv C \rightarrow \perp$
2. $(C \wedge D) \equiv ((C \rightarrow (D \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp)$
3. $(C \vee D) \equiv ((C \rightarrow \perp) \rightarrow D)$
4. $(C \leftrightarrow D) \equiv (((C \rightarrow D) \rightarrow ((D \rightarrow C) \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp)$

