

Capítulo 2

El lenguaje de la lógica proposicional.

El objetivo fundamental de este tema es doble: la adquisición de un lenguaje formal (poniendo especial énfasis en la formalización) y la introducción y justificación del método de la inducción semiótica.

En la introducción se esclarecerán los conceptos siguientes:

1. Lenguaje natural y Lenguaje formal.
2. Lenguaje y Metalenguaje.
3. Uso y Mención.
4. Funciones veritativas.

2.1. Gramática y formalización.

Vamos a construir un lenguaje al que podamos traducir las oraciones del castellano. A diferencia de las lenguas naturales (como el castellano, el inglés, el catalán o el chino) será éste un lenguaje formal que contará con unas reglas de formación precisas. El uso más frecuente que vamos a hacer del lenguaje formal es como vehículo de razonamiento. Sólo nos interesará traducir a nuestro lenguaje formal las expresiones lingüísticas que describan un estado o expresen un pensamiento completo; es decir, nos limitaremos al uso declarativo del lenguaje natural. En este sentido, nuestro lenguaje formal es muy pobre; no se puede traducir a él las preguntas, las exclamaciones, las dudas ni los chistes (bueno, tal vez mi amigo John Paulos¹ sea capaz de hacerlo). Como contrapartida a su falta de riqueza, nuestro lenguaje formal será muy preciso, carente por completo de ambigüedad o de doblez.

¹¿Habeis leído sus libros: *Mathematics and Humor*, *I Think Therefore I Laugh*, *Innumeracy* y *A Mathematician reads the Newspaper*?

Otra de las limitaciones de nuestro lenguaje formal es que será bivalente; el motivo es que nosotros aceptamos que en cada situación cada sentencia que consideremos será verdadera o falsa, nunca las dos cosas a la vez. Podemos precisar que para nosotros *falso* significa *no verdadero* y tomar *verdadero* en el sentido en el que se usa normalmente. Por otra parte, podemos considerar que las situaciones que nos incumben son tales que las sentencias relevantes son o verdaderas o falsas, pero no las dos cosas. Comprendemos que hay muchas formas distintas de no ser verdadero, pero en la lógica clásica no las distinguimos.

¿Qué hacemos con frases como, “El vino ayuda a hacer la digestión”? Esta sentencia tiene que ser considerada verdadera o falsa y no cabe considerarla parcialmente verdadera o parcialmente falsa. Si uno en realidad lo que quisiera es decir que el vino, tomado moderadamente, ayuda a alguna gente a hacer la digestión, debe usar la sentencia “El vino, tomado moderadamente, ayuda a alguna gente a hacer la digestión”.

Con todo esto no quiero decir que la lógica tenga que ser bivalente (la lógica polivalente tiene aplicaciones, especialmente la trivalente, pues a menudo resulta útil contar con el valor *indefinido*), ni que no se pueda en ella expresar proposiciones modales (necesariamente, posiblemente) o temporales (siempre, alguna vez), ni que no se deba dar juego a la ambigüedad semántica (conjuntos difusos). En esta primera parte del curso expongo el punto de vista clásico, que es el que adoptaremos, obviamente, en toda la lógica clásica.

Para hablar acerca de nuestro lenguaje formal utilizaremos el castellano, del mismo modo que utilizamos el castellano para estudiar el latín. Cuando ésto se hace, al lenguaje en estudio se le llama *lenguaje objeto* (latín, en el ejemplo) y al lenguaje que utilizamos de vehículo, *metalenguaje* (castellano, en el ejemplo anterior). Nuestro lenguaje objeto es el lenguaje formal y el castellano, aumentado con algunos signos, es el metalenguaje.

Finalmente, distinguimos entre *uso* y *mención* de una palabra o una expresión. Usamos normalmente las palabras para referirnos a objetos que no son lingüísticos; es decir, las usamos como un *signo*, para aludir a algo distinto de ellas mismas. Hay otras ocasiones en las que usamos el lenguaje para hablar acerca del propio lenguaje. Usamos entonces el metalenguaje para *mencionar* las expresiones de un lenguaje.

El lenguaje formal que vamos a introducir es el proposicional, también llamado *de conectores*, pues el análisis que se llevará a cabo con él es precisamente de un nivel muy abstracto, en donde sólo intervienen y se estudian las combinaciones de enunciados simples para formar enunciados complejos. El valor de verdad de un enunciado complejo dependerá exclusivamente de los valores de verdad de los enunciados simples que lo componen y de la interpretación de sus conectores, que está fijada de antemano. Los conectores se interpretarán como *funciones veritativas*; es decir, como funciones que a valores de verdad les asignan valores de verdad (o a pares de valores de verdad les asignan valores de verdad).

Finalmente, por tratarse de lógica proposicional los átomos son los enunciados simples, que, consecuentemente, no se analizan. Tampoco usaremos cuantificadores. Es decir, el enunciado

Todos los árboles son pinos

es en lógica proposicional un enunciado atómico.

2.1.1. Ejemplos y Ejercicios.

En las frases siguientes hay tres niveles de lenguaje; usamos comillas y dobles comillas para indicarlo:

EJEMPLO 1.- “‘Un famoso poeta es menos inventor que descubridor’, dijo Averroes”, escribe Jorge Luis Borges.

EJEMPLO 2.- Dice Hipólito en su obra *Refutatio omnium haereseum*: “la frase ‘el bien y el mal son uno’ fue escrita por Heráclito”.

EJEMPLO 3.- Es verdad que Valle Inclán ha escrito: “A bordo de la *Dalila*, lo recuerdo con orgullo, asesiné a Sir Roberto Yones”.

EJERCICIO 1.- poned comillas para distinguir uso y mención.

Salamanca está bañada por el Tormes
Salamanca tiene nueve letras.

EJERCICIO 2.- poned comillas para distinguir uso y mención.

Madrid empieza por m,
termina con t
pero generalmente se escribe con g

2.1.2. Gramática de L_0 .

¿Cómo se construye un lenguaje formal?

Un lenguaje formal consta de un alfabeto básico y de unas reglas precisas de formación de fórmulas.

Alfabeto.

El alfabeto del lenguaje L_0 de la lógica proposicional contiene dos tipos de signos: los conectores y las letras proposicionales. Nosotros usamos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ como conectores y las letras p , q , r , s , ..., p_1 , p_2 , ... como letras proposicionales. También, como signos impropios utilizaremos paréntesis.

Fórmulas.

Las fórmulas de L_0 se construyen siguiendo unas sencillas reglas de formación. Dichas reglas extraen del conjunto de filas de signos del alfabeto a aquellas a las que llamamos fórmulas. El conjunto de las fórmulas de L_0 (al que llamamos **FORM**(L_0), o simplemente **FORM**, cuando esté claro por el contexto) es *el menor conjunto* que se puede generar con su ayuda a partir de las letras proposicionales.

- **F1.** Las letras proposicionales son fórmulas.
- **F2.** Si A y B son fórmulas, también lo son: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$

		A
		B
ATOM		
p		$(A \wedge B)$
q		

CONECT
$\neg, \vee, \wedge$
$\rightarrow, \leftrightarrow$

Comentario 9 *Adviértase que tal y como hemos definido el conjunto de fórmulas, como el menor conjunto que cumple las reglas **F1** y **F2**, si un conjunto $\mathcal{Q}$ cumple las mencionadas reglas, entonces $\mathbf{FORM}(L_0) \subseteq \mathcal{Q}$ lo que significa que todas las fórmulas están en dicho conjunto.*

Comentario 10 *A las fórmulas que son simplemente letras proposicionales, las llamamos **fórmulas atómicas**. Las fórmulas obtenidas mediante la regla **F2** reciben las denominaciones siguientes:*

Forma lógica	Denominación
$\neg A$	negación
$(A \wedge B)$	conjunción
$(A \vee B)$	disyunción
$(A \rightarrow B)$	condicional
$(A \leftrightarrow B)$	bicondicional

Comentario 11 *Comentario importante:* Entre las reglas de formación de fórmulas tenemos la siguiente: Si A y B son fórmulas, también lo es $(A \wedge B)$. ¿Qué pintan A y B aquí? Entre los signos de nuestro lenguaje no aparecían las primeras letras mayúsculas del alfabeto latino, se nos podría decir.

Comentario 12 Demostrar que una sucesión de signos del alfabeto L_0 es una fórmula consiste en mostrar que se construyó conforme a las reglas del cálculo de fórmula; es decir, **F1** y **F2**

2.1.3. Subfórmulas.

Llamamos *subfórmulas* de una fórmula a todas aquellas partes de una fórmula que son también fórmulas (generadas por **F1** y **F2**). Descomponer una fórmula en subfórmulas es una manera de demostrar que efectivamente se trata de una fórmula. La forma más sencilla de hacerlo es mediante árboles genealógicos, que todo el mundo entiende con facilidad. Para que no confundirlos con los árboles lógicos, que se verán después, yo los hago de abajo a arriba, con aspecto de auténtico árbol genealógico.

2.1.4. Forma lógica.

Las fórmulas de nuestro lenguaje L_0 que no son atómicas tienen cinco formas lógicas posibles: negaciones, conjunciones, disyunciones, condicionales y bicondicionales. El saber identificar la *forma lógica* de una fórmula dada es fundamental para manipular el cálculo deductivo correctamente.

2.1.5. Ejercicios:

1. Sin alterar el orden de los signos, transformad las sucesiones de signos siguientes en fórmulas cuya forma lógica sea un condicional, utilizando paréntesis cuando sea necesario.

a) $p \rightarrow r \leftrightarrow q$

b) $p \vee r \rightarrow q \vee r$

c) $p \wedge q \rightarrow p$

d) $q \rightarrow \neg s \wedge t$

e) $p \rightarrow r \leftrightarrow q \rightarrow r$

2. ¿Son fórmulas las siguientes filas de signos?. Caso afirmativo demostradlo en el cálculo de fórmulas, o construid su árbol genealógico.

Verdadero Falso

$(p \vee \neg p)$

$((p \wedge q \rightarrow p)$

$((p \neg p) \vee r) \rightarrow r)$

$((p \wedge q) \vee r) \rightarrow r)$

$((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge q \vee r)$

2.1.6. Formalización.

Este tema tiene una vertiente práctica, la formalización, en la que me gusta insistir, pues considero que es fundamental que se adquiriera mucha soltura en el uso del lenguaje simbólico. El que la formalización preceda a la interpretación semántica tiene una justificación: permite una introducción intuitiva de los conectores. Esto no resulta tan sencillo en el caso del condicional, especialmente cuando tiene antecedente falso, pero se pueden poner ejemplos pertinentes (por ejemplo, con una fuerte relación de causalidad entre antecedente y consecuente) para convencernos, al menos de que es preciso adoptar una convención al respecto.

Mi anécdota predilecta para condicionales con antecedente y consecuente falso es la siguiente. Dos periodistas que no se podían ver. El primero publica en el diario local una foto de su hijito disfrazado de rociero, con el siguiente pie:

Fotografía del simpático rociero Pepito Ruiz, hijo del brillante escritor D. José Ruiz.

Al día siguiente aparece, en la misma página, el siguiente insulto rimado:

*Si tu hijo es rociero y tú un escritor brillante, yo soy Felipe III,
Genoveva de Brabante y el hijo del Espartero.*

Los apartados que trataremos son los que siguen:

1. Formalizaciones sencillas: negación.
Negamos la verdad de un enunciado afirmando su negación. La negación recoge el uso de la partícula “no” del castellano (o cualquiera de sus equivalentes; “no es cierto que”, “no es verdad que”, “nunca”, “jamás”). La interpretación que le daremos será la siguiente:
La negación de un enunciado verdadero será falsa y la de uno falso será verdadera.
2. Formalizaciones sencillas: conjunción.
Cuando utilizamos una conjunción entre dos enunciados queremos indicar que ambos son verdaderos. Normalmente usamos la conjunción copulativa, “y” para indicar conjunción, “pero”, “aunque”, “sin embargo” se usan también. Hay un ligero matiz que diferencia estos usos, que se pierde en el lenguaje formal. La interpretación que le daremos será la siguiente:
La conjunción de dos enunciados es verdadera si y sólo si ambos lo son.
3. Formalizaciones sencillas: disyunción.
La disyunción que recoge nuestra conectiva es la llamada *incluyente* (o *no excluyente*), como cuando en un anuncio **SE SOLICITA SECRETARIA QUE SEPA FRANCÉS O INGLÉS**, que evidentemente no

excluye a la que sepa los dos idiomas. Normalmente se expresa mediante “o”, “a menos que”, “a no ser que”, “y/o”. La interpretación que le daremos será la siguiente:

La disyunción de dos enunciados es verdadera si al menos uno de ellos lo es.

4. Formalizaciones sencillas: condicional.

Formalizamos $(A \rightarrow B)$ para indicar un enunciado condicional. En este caso A es el antecedente y B el consecuente. En castellano usamos normalmente la expresión “si A entonces B ”. Se usan también “si A , B ”, “ B , si A ”, “ A es condición suficiente para B ”, “ B es condición necesaria para A ”, “sólo si B , A ”. La interpretación que le daremos será la siguiente:

Un enunciado condicional es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, en el resto de los casos es verdadero.

5. Formalizaciones sencillas: bicondicional.

Cuando queremos indicar que “ A es condición suficiente para B ” y que “ B es condición necesaria para A ” lo formalizamos así: $(A \leftrightarrow B)$. La interpretación que le daremos será la siguiente:

Un enunciado bicondicional es verdadero cuando y sólo cuando sus dos miembros son simultáneamente verdaderos o falsos.

6. Formalizaciones complejas.

Se trata de combinar varios conectores.

Resumen 13 *Lo dicho anteriormente queda resumido en las siguientes tablas, en donde se entiende que los conectores son funciones veritativas (esto es, funciones que asignan valores de verdad a pares de valores de verdad) y que 1 y 0 corresponden a “Verdadero” y “Falso”*

Conectores binarios.

C	D	$(C \wedge D)$	$(C \vee D)$	$(C \rightarrow D)$	$(C \leftrightarrow D)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

(Tabla de los conectores binarios usados en nuestro lenguaje formal; los conectores binarios se interpretan como funciones binarias sobre el conjunto de los valores de verdad $\{1, 0\}$.)

Conector monario.

C	$\neg C$
1	0
0	1

(Tabla del conector monario de negación. Este conector es una función monaria sobre el conjunto de valores de verdad)

2.1.7. Ejemplos y Ejercicios

EJEMPLO 1.- Elegid la formalización adecuada.

1. **Pedro irá al dentista** (p), tanto si **quiere** (q) como si no quiere.
2. **Pienso** (p) luego **existo** (q)
3. No pienso, luego existo.
4. **El fuego** (p) es la causa del **humo** (q)
5. El fuego siempre produce humo.
6. Si **Pedro juega al badminton** (p), **Quiteria también** (q)
7. Sólo si Pedro juega al badminton, juega Quiteria.

	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (q \vee \neg q)$	$p \rightarrow \neg q$	*
1					★
2	★				
3					★
4		★			
5	★				
6	★				
7		★			

* Ninguna de las anteriores

Comentario 14 La formalización de (1) es $(q \vee \neg q) \rightarrow p$, la de (3) $\neg p \rightarrow q$.

EJEMPLO 2.- Elegid la formalización adecuada.

1. Sólo cuando **llueve** (p) o **hace viento** (q) **la contaminación disminuye** (r).
2. Si **Antonio estudia** (p) pero no **aprueba** (q), entonces **algo falla** (r)
3. **Crece la inflación** (p) si el **IVA aumenta** (q) y no **hay contención del gasto** (r)
4. Siempre que **Noemí estudia piano** (p) o **Daniel toca el trombón** (q), **su madre sale de compras** (r)
5. Si **Vargas Llosa escribió Lituma en los Andes** (p) pero no **escribió La Regenta** (q), entonces **Camilo José Cela escribió La Colmena** (r)
6. **La magia del cuento se revela** (r) sólo cuando **Pinocho miente** (p) o **Blancanieves muerde la manzana** (q)

	$(p \vee q) \rightarrow r$	$r \rightarrow (p \vee q)$	$p \rightarrow (q \vee \neg q)$	$(q \wedge \neg r) \rightarrow p$	*
1		★			
2					★
3				★	
4	★				
5					★
6		★			

* Ninguna de las anteriores.

Comentario 15 La formalización tanto de (2) como de (5) es $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

EJERCICIO 1.- Elegid la (o las) formalización adecuada a la frase siguiente:
 Excepto cuando **llueve** (p), siempre que **hay nubes** (q) la **temperatura sube** (r) cuando **sopla el levante** (s).

$(q \rightarrow (r \rightarrow (s \wedge \neg p)))$	
$(q \rightarrow ((s \wedge \neg p) \rightarrow r))$	
$(p \rightarrow \neg r)$ Simplificando	
$(r \rightarrow (\neg p \wedge (q \wedge s)))$	

EJERCICIO 2.-

Usando las siguientes claves de formalización, expresad en español lo consignado en las fórmulas:

$p \equiv$ Te han dicho que salgas a la pizarra
 $q \equiv$ Debes salir a la pizarra
 $r \equiv$ Pedro ha salido a la pizarra
 $s \equiv$ Pedro ha sacado un diez en su examen de lógica
 $t \equiv$ Debes presentarte al examen
 $u \equiv$ Debes estudiar en casa

1. $\neg p \rightarrow \neg q$
2. $r \wedge s$
3. $\neg(r \rightarrow \neg(t \vee u))$
4. $\neg p \rightarrow (t \leftrightarrow u)$
5. $(p \vee u) \rightarrow (q \vee u)$
6. $(p \wedge q) \rightarrow \neg t$
7. $q \rightarrow (\neg s \wedge t)$
8. $p \rightarrow ((r \leftrightarrow q) \rightarrow r)$

2.1.8. El mundo de Tarski.

Cuando se aprende una segunda lengua se pueden seguir dos métodos muy diferentes:

- Utilizar la lengua propia y hacer traducciones directas e inversas hacia la nueva.
- Aprender a usarla directamente.

El primero es el método tradicional y ha sido el predominante en la enseñanza de la lógica; sin embargo, este método plantea diversos problemas. En el caso de la lógica la dificultad principal estriba en que el lenguaje natural es mucho más complejo que el formal, y con frecuencia las dificultades de formalización radican en el lenguaje natural. Sin pretenderlo transferimos al lenguaje formal una complejidad que no le es propia. Otro problema es que para ser un buen traductor hace falta conocer y dominar bien las dos lenguas, mientras que en nuestro caso se supone que estamos justamente aprendiendo el lenguaje formal.

Estas consideraciones llevaron a los autores de *El mundo de Tarski*, Barwise y Etchemendy, a concebir el mencionado programa, en el que el aprendizaje del lenguaje formal es “directo”. Aunque el programa es fundamentalmente para enseñar el lenguaje de la lógica de primer orden y es más interesante en ese caso, hay algunos ejercicios que pueden hacerse en proposicional. Es especialmente recomendable cuando el estudio de la lógica proposicional sea el preámbulo del de la de primer orden. A la información sobre este programa se puede acceder desde nuestra página de ARACNE:

<http://aracne.usal.es>

2.2. Convenciones sobre notación.

Entre las convenciones acerca de la notación, se suele incluir la supresión de paréntesis. Nosotros no las emplearemos, pues considero que los paréntesis, aunque engorrosos, ayudan mucho a entender las fórmulas. Lo más frecuente es asignar prioridad a los conectores.

Por supuesto, la apariencia gráfica de los conectores es puramente convencional. Los que nosotros usamos son los más frecuentes, pero también se usan:

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
$\sim$	$\&$	γ	$\supset$	$\equiv$
$-$	$\cdot$			$=$

2.3. Glosario.

- **Lenguaje natural (ordinario)** Producidos en la evolución psicológica e histórica; p.e. español, inglés, ruso,...
- **Lenguaje formal (o artificial)** Creados por el hombre, determinando su alfabeto y sus reglas de formación.

- **Metalinguaje y lenguaje objeto** Para hablar acerca de nuestro lenguaje formal utilizaremos el castellano, del mismo modo que utilizamos el castellano para estudiar el latín. Cuando ésto se hace, al lenguaje en estudio se le llama **lenguaje objeto** (latín, en el ejemplo) y al lenguaje que utilizamos de vehículo, **metalenguaje** (castellano, en el ejemplo anterior). Nuestro lenguaje objeto es el lenguaje formal y el castellano, aumentado con algunos signos, es el metalenguaje.
- **Uso y mención.** Decimos que usamos una expresión cuando la utilizamos como un signo; es decir, cuando ésta se refiere a algo distinto de la propia expresión. Decimos que mencionamos una expresión cuando la utilizamos para referirnos a la expresión misma.
- **Alfabeto.** Por alfabeto podemos entender el conjunto de símbolos que forman las expresiones de un lenguaje. El alfabeto de nuestro lenguaje L_0 de la lógica proposicional contiene dos tipos de signos; a saber, letras proposicionales y conectores.
- **Conectores.** $\neg$ negador, $\vee$ disyuntor, $\wedge$ conyuntor, $\rightarrow$ condicionador y $\leftrightarrow$ bicondicionador.
- **Fórmulas.** Sucesiones finitas de signos del alfabeto construídas conforme a las reglas **F1** y **F2** del cálculo de fórmulas. Reciben los nombres siguientes:
 p fórmula **atómica** (o simple) (*Cualquier letra proposicional lo es*)
 $\neg A$ **negación**, $(A \vee B)$ **disyunción**, $(A \wedge B)$ **conjunción**,
 $(A \rightarrow B)$ **condicional**, $(A \leftrightarrow B)$ **bicondicional**
- **Subfórmulas.** Llamamos subfórmulas de una fórmula a todas aquellas partes de una fórmula que son también fórmulas (generadas por F1 y F2).
- **Forma lógica.** Es el tipo de fórmula; es decir, p fórmula **atómica**
 $\neg A$ **negación**, $(A \vee B)$ **disyunción**, $(A \wedge B)$ **conjunción**,
 $(A \rightarrow B)$ **condicional**, $(A \leftrightarrow B)$ **bicondicional**
- **Cálculo (de fórmulas).** Algoritmo (procedimiento efectivo) mediante el cual podemos generar las fórmulas (y justificar que una sucesión determinada de signos del alfabeto lo es)
- **Arbol genealógico (de una fórmula).** Procedimiento de generación de subfórmulas.
- **Inducción semiótica.** Procedimiento mediante el cual se prueba que todas las fórmulas tienen una determinada propiedad (o se define algún concepto para todas las fórmulas).

2.4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Lenguaje natural y Lenguaje formal. Lenguaje y Metalenguaje. Uso y Mención. Funciones veritativas.

Se puede encontrar una estupenda explicación de estos conceptos en DEAÑO, A (1978) pág 21 a 27.

También se puede consultar BERGMANN et alts, (1990), pág 49 a 51.

Formalización. Conectores.

En el libro de SUPPES (1975), pág 25-44

El mundo de Tarski

Sirve, de momento, para practicar con el lenguaje proposicional. La pega es que es un lenguaje un poco peculiar ya que las fórmulas atómicas son atómicas, pero de un lenguaje de primer orden.