

Capítulo 8

INTRODUCCIÓN GENERAL

8.1. ¿Por qué necesitamos la Lógica de Primer Orden?

El objetivo fundamental de este tema es el de introducir, de manera intuitiva, los conceptos fundamentales de la lógica clásica de primer orden¹. Desde una perspectiva muy general, nos interesa destacar lo siguiente: (1) la caracterización de la lógica como el estudio de la consecuencia (o de los conjuntos consistentes de enunciados) y (2) el objetivo de encontrar sistemas formales que mecanicen el procedimiento de determinar si a partir de ciertas hipótesis se siguen ciertas conclusiones. En esto, ¡naturalmente!, coincide la lógica proposicional con la de primer orden. Los detalles cambian, pues el lenguaje de la lógica de primer orden, FOL (abreviatura del inglés First Order Logic), es considerablemente más complejo.

De manera que se mantiene:

- *Lógica* = estudio de la *consecuencia* (razonamientos válidos o correctos)
- *Lógica* = estudio de los conjuntos de creencias *consistentes*
- *Lógica* = *Gramática* + *Semántica* (+ *Cálculo*)

A la pregunta que sirve de encabezamiento a este apartado respondemos que aunque la lógica proposicional es formalmente muy satisfactoria, su capacidad expresiva es bastante limitada.

¹La lógica clásica se caracteriza por su rigor y precisión, pero carece de matices; la verdad es absoluta, el tiempo está ausente, no hay ambigüedad. La lógica clásica caracteriza el razonamiento de las matemáticas y cuando se aplica a razonamientos no matemáticos, se matematizan primero. Hay otras lógicas: Temporal, modal, dinámica, borrosa, no monotónica, etc.

Lo veremos con un ejemplo.

Ejemplo 64 *El razonamiento siguiente es claramente correcto; sin embargo, la lógica proposicional no nos permite demostrarlo ya que en esta lógica los tres enunciados quedan sin analizar; es decir, se consideran fórmulas atómicas*

$\alpha \equiv$ Sólo los viejos y los niños dicen la verdad.
 $\beta \equiv$ María Manzano no es una vieja ni es una niña.
 LUEGO:
 $\gamma \equiv$ María Manzano miente.

En lógica proposicional α , β y γ se formalizan como letras proposicionales (por ejemplo, p , q y r) y por lo tanto $\{p, q\} \not\models r$.

Para poder entrar en el detalle de este razonamiento y establecer su corrección necesitamos un lenguaje que contenga no sólo los conectores (entre ellos, la negación, $\neg$, el conyuntor, $\wedge$, el condicional, $\rightarrow$, y el disyuntor $\vee$), sino también:

- Constantes individuales, por ejemplo, a . En nuestro ejemplo, María Manzano se formalizaría como una constante individual.
- Relatores; por ejemplo, V , N y M . En nuestro ejemplo, ser viejo, niño o mentiroso se formalizarían como relatores monarios.
- Cuantificadores; por ejemplo, $\forall$. Nos sirve para expresar “todos los”.
- Variables individuales, para dar curso a la cuantificación.

Con este lenguaje se podría formalizar:

$\alpha \equiv \forall x(\neg Mx \rightarrow (Vx \vee Nx))$
 $\beta \equiv \neg Va \wedge \neg Na$
 LUEGO:
 $\gamma \equiv Ma$

En la lógica de primer orden introduciremos un lenguaje formal, desarrollaremos una semántica para sus fórmulas e introduciremos un cálculo deductivo que nos permitirá demostrar γ a partir de $\{\alpha, \beta\}$.

Comentario 65 *El lenguaje requerido para formalizar el razonamiento anterior sólo utiliza relatores monarios. La lógica que sólo utiliza relatores monarios es más expresiva que la proposicional, pero retiene de ésta algunas de sus metapropiedades, tales como la decidibilidad, que se pierden al pasar al lenguaje de primer orden sin restricciones. En la parte anterior de este curso, la del razonamiento lógico con diagramas, hemos estudiado esa lógica.*

Comentario 66 *Es cierto que la lógica de primer orden contiene a la proposicional. Esto quiere decir que si un razonamiento es proposicionalmente correcto, lo seguirá siendo en primer orden, pero si es incorrecto proposicionalmente no tiene porqué seguir siendo incorrecto en primer orden. (Lo acabamos de ver en el ejemplo, es correcto en primer orden e incorrecto en proposicional.)*

8.2. Lenguajes de orden cero, de primero y de segundo orden.

Como se ha dicho anteriormente, la lógica que estamos estudiando es la denominada lógica clásica.

Habiendo caracterizado a la lógica como el estudio de los razonamientos válidos o correctos y llegado a la conclusión de que la exigencia de rigor y precisión nos obliga a introducir un lenguaje formal, necesitamos saber cuál. Todo dependerá del nivel de abstracción que se vaya a usar; cuando los enunciados simples no se analizan y en el razonamiento tan sólo intervienen los conectores, el lenguaje a usar es el proposicional (o de orden cero); cuando se analizan los enunciados atómicos y se cuantifica sobre individuos, el lenguaje ha de ser el de primer orden; cuando la cuantificación se extiende a propiedades y relaciones, precisamos el lenguaje de segundo orden ².

Habitualmente estamos interesados en una cierta “realidad matemática” a la que hemos otorgado una estructuración básica: tenemos un universo o dominio de discurso, en el que están los objetos de los que queremos hablar, y ciertas relaciones y funciones definidas sobre el universo de discurso.

Ejemplo 67 *Imaginad que lo que nos interesa es el estudio de las relaciones de orden. Por muy limitada que haya sido nuestra experiencia matemática, seguro que no nos resultan desconocidas ciertas estructuras de orden.*

- Ya en la escuela primaria aprendimos el orden de los naturales, de los enteros y de otros números. También nos familiarizamos con el concepto de “ser un subconjunto de” y vimos que establecía un cierto orden, que en ciertos dominios podía incluso ser lo que llamamos “una cadena”.
- Por otra parte, tal vez en Filosofía de la Ciencia os planteasteis cómo se establece un concepto métrico o una escala (por ejemplo, la masa, la dureza de los metales, la intensidad de un seísmo) y llegasteis a la conclusión de que fue preciso un proceso de comparación entre sucesos o cualidades y el establecimiento de una relación de orden.
- Posiblemente algunos de vosotros habeis estudiado los retículos y tal vez los cardinales y los ordinales.
- Más adelante quizá estudiéis teoría de conjuntos axiomática, pero casi seguro que en alguna ocasión empleareis el Axioma de elección, El teorema del buen orden o el Lema de Zorn.

Comentario 68 *Un curso breve de Teoría de conjuntos está disponible en ARACNE.*

²Para estudiar la lógica de segundo orden puede usarse: María Manzano. (1996) **Extensions of First Order Logic**. Cambridge University Press.

Con todo ello quiero decir que ya sabeis que en “el” Universo matemático hay ciertas estructuras matemáticas de enorme importancia a las que llamamos órdenes. La ventaja de usar un lenguaje lógico es que podemos hacer abstracción de las estructuras concretas y hablar simultáneamente de todas ellas.

Decimos que una relación $\mathbf{R}$ definida sobre un conjunto $\mathbf{A}$ es de orden, si es:

- $\alpha \equiv$ Reflexiva
- $\beta \equiv$ Antisimétrica
- $\gamma \equiv$ Transitiva

Cuando además es conectada,

- $\delta \equiv$ Conectada

decimos que $\mathbf{R}$ es un orden lineal.

Cuando

- $\sigma \equiv$ Todos los subconjuntos de $\mathbf{A}$ tienen primer elemento

decimos que la relación $\mathbf{R}$ es un buen orden.

¿Qué lenguaje necesitamos para hablar de lo que nos interesa, las relaciones de orden?

Claramente el lenguaje proposicional es insuficiente porque en él sólo caben razonamietos de este tipo:

1. $\neg\gamma \vdash \neg((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$. [Que nos serviría para ver que si en la relación $\mathbf{R}$ falla la transitividad, no puede ser de orden.]
2. $((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \wedge \delta \vdash ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$. [Que nos sirve para ver que si la relación $\mathbf{R}$ es un orden lineal, también es un orden (parcial).]

Sin embargo, si tomamos un lenguaje de primer orden con un relator binario R , podremos expresar las características de una relación de orden así:

- $\alpha \equiv \forall x Rxx$
- $\beta \equiv \forall xy((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x = y)$
- $\gamma \equiv \forall xyz((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
- $\delta \equiv \forall xy(Rxy \vee Ryx)$

Estas fórmulas son verdaderas en las estructuras de los naturales y de los enteros con su orden,

$$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle, \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$$

y en

$$\langle \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}, \subseteq \rangle$$

y en muchas otras.

En principio $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ axiomatiza la propiedad de ser un orden lineal en el sentido siguiente: una estructura $\mathfrak{A}$ cualquiera es un orden lineal si y sólo si es un modelo de $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Cuando además del lenguaje de primer orden tengamos un cálculo deductivo, todas las propiedades de los órdenes lineales las demostraremos en el cálculo y valdrán simultáneamente para todas las estructuras que sean órdenes lineales. De esta forma, al situarnos en este nivel de abstracción que el lenguaje lógico permite, conseguimos economizar recursos.

¿Se pueden expresar en primer orden todas las propiedades imaginables de estructuras matemáticas?, ¿Sirve la lógica de primer orden para axiomatizar toda la matemática?

La respuesta es que nó. En nuestro caso, para expresar la propiedad de ser un buen orden se precisa de la cuantificación sobre propiedades; es decir, de la lógica de segundo orden (SOL). En SOL σ se expresa:

$$\sigma \equiv \forall X(\exists y Xy \rightarrow \exists v(Xv \wedge \forall z(Xz \rightarrow Rvz \wedge v \neq z)))$$

Como hemos visto, el lenguaje de la lógica de segundo orden es más expresivo que el de primer orden y éste que el de orden cero.

Comentario 69 *Sin embargo, las propiedades lógicas de estos lenguajes van decreciendo: mientras que la lógica proposicional posee un cálculo deductivo correcto, completo y es decidible, la de primer orden posee un cálculo correcto y completo, pero ya no es decidible, y la de segundo orden ni es decidible ni posee un cálculo completo.*

Para expresar gráficamente lo anterior, pensad en una balanza: en un platillo se pone el poder expresivo de la lógica y en el otro las propiedades lógicas. En la lógica proposicional pesan más las propiedades lógicas, en la de segundo orden la capacidad expresiva, la de primer orden está más equilibrada. Sabiendo ésto somos nosotros los que decidiremos qué lógica necesitamos, qué virtudes nos interesa preservar.

8.3. Glosario

1. **Consistencia:** Decimos que un conjunto de enunciados es consistente cuando existe al menos una situación que los hace simultáneamente verdaderos. (ingl.: Consistency).
2. **Inconsistencia:** Decimos que un conjunto de enunciados es inconsistente cuando no existe ninguna situación que los haga simultáneamente verdaderos. (ingl.: Inconsistency)
3. **Consecuencia:** Decimos que un enunciado es consecuencia de un conjunto de enunciados que sirven de hipótesis si, y sólo si, no existe ninguna

situación en la que cada una de las hipótesis sea verdadera y la conclusión sea falsa; es decir, cuando el conjunto formado por las hipótesis y la negación de la conclusión sea inconsistente. (ingl.: Consequence).

8.4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Estas referencias coinciden básicamente con las que dimos en el primer capítulo de Lógica proposicional. 1.8