ÍNDICE

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS

HUBERTO MARRAUD GONZÁLEZ

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

> A primera vista se diría que se trata de pequeñas figuras absurdas que avanzan bailando a lo ancho del papel en que están dibujadas. ¿Por qué razón atribuye usted importancia a tema tan absurdo?
>
> A.Conan Doyle, *La aventura de los bailarines*

ARGUMENTOS Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS.

La *lógica* es una disciplina matemática que tiene por objeto la noción de corrección argumental.

[1] La lógica es, en la actualidad, una disciplina matemática, pero eso no quiere decir que lo haya sido siempre. Las ciencias cambian a lo largo de la historia y ocasionalmente esos cambios afectan a la definición de su objeto.
[2] El concepto de estructura matemática proporciona un modo conveniente de describir el objeto de la matemática. En general, una teoría matemática se define con respecto a una clase de estructuras matemáticas.
[3] En el sentido que aquí es pertinente, un argumento (formulado en un lenguaje L) está formado por un cierto número de oraciones (de ese lenguaje) $O_1,...,O_n$, O_{n+1}. Entre éstas se distinguen las premisas, $O_1,...,O_n$, y la conclusión, O_{n+1}.[1]
[4] Un argumento $O_1,...,O_n$, O_{n+1} puede ser correcto o incorrecto; en el primer caso se dice que O_{n+1} se sigue o es consecuencia de $O_1,...,O_n$. Por tanto, extensionalmente, la noción de corrección argumental (para un lenguaje L) se identifica con el conjunto de los argumentos en los que la conclusión es consecuencia de las premisas.

Una *estructura matemática* es una secuencia $S=<B,<R_i>_{i\in I},<f_j>_{j\in J}>$ con dos funciones asociadas $\alpha:I\rightarrow\mathbf{N}$ y β: $I\rightarrow\mathbf{N}$ tal que: (1) $B\neq\emptyset$ es el universo de la estructura, (2) I y J son conjuntos de índices tales que $I\cup J\neq\emptyset$, (3) para cada $i\in I$, R_i es una relación $\alpha(i)$-aria definida sobre B, es decir, $R_i \subseteq B^{\alpha(i)}$; (4) para cada $j\in J$, f_j es una operación $\beta(j)$-aria definida sobre B, es decir, $f_j:B^{\beta(j)}\rightarrow B$. El tipo o signatura de una estructura matemática es $<\alpha,\beta>$.

[1] Lo que aquí llamamos *estructura matemática* recibe en ocasiones los nombres de *sistema algebraico* o *dominio matemático*. Puede darse una definición más general que la precedente, que por lo demás es suficiente para nuestras necesidades.
[2] Cuando $I=\emptyset$, se dice que S es un álgebra, y cuando $J=\emptyset$ que es un sistema relacional.
[3] Si $I=\{1,...,n\}$ y $J=\{1,...,m\}$ son finitos, suele escribirse $S=<B,R_1,...,R_n,f_1,...,f_m>$ en vez de $S=<B,<R_i>_{i\in I},<f_j>_{j\in J}>$.

Una *teoría matemática* T estudia las propiedades de las estructuras matemáticas que satisfacen determinadas condiciones $C_1,...,C_n$.

[1] No obstante, en D.J.Shoesmith y T.J.Smiley (1978) puede encontrarse un concepto más general de argumento.

[1] La clase de las estructuras matemáticas estudiadas por una determinada teoría matemática T es siempre cerrada bajo isomorfismos.
[2] Dos estructuras matemáticas S y S' con el mismo tipo son isomorfas syss (si y sólo si) existe una función $h:B\rightarrow B'$ tal que (1) h es biyectiva, (2) para todo $i\in I$ y toda secuencia $<o_1,...,o_{\alpha(i)}>$ de $B^{\alpha(i)}$, $<o_1,...,o_{\alpha(i)}> \in R_i$ syss $<h(o_1),..., o_{\alpha(i)}> \in R'_i$, y (3) para todo $j\in J$ y toda secuencia $<o_1,...,o_{\beta(j)}>$ de $B^{\beta(j)}$, $h(f_j<o_1,...,o_{\beta(j)}>) = f'_j(<h(o_1),...,h(o_{\beta(j)})>)$.
[3] Naturalmente, no todas las teorías matemáticas tienen, atendiendo a su objeto, la misma generalidad. Por ejemplo, la aritmética es la teoría de las estructuras isomorfas al anillo $<E,+,A>$ de los enteros, y así es una teoría poco general, contrastando, entre otras, con la teoría de grupos. Ésta tiene por objeto los grupos o estructuras $<B,\varnothing,\bullet>$, donde $\bullet$ es una operación binaria que satisface los postulados (1) para cualesquiera elementos a,b y c de B, $a\bullet (b\bullet c)=(a\bullet b)\bullet c$, y (2) para todo elemento a de B, hay sendos elementos b y c de B tales que $a\bullet b=b\bullet a=a$ y $c\bullet a=a\bullet c=b$.
[4] Los dominios de dos teorías matemáticas pueden solaparse. Esto incluye el caso en el que el dominio de una de ellas está contenido en el de otra. Así, los grupos que satisfacen, para cualesquiera a y b de B, el postulado adicional $a\bullet b=b\bullet a$ reciben el nombre de *grupos abelianos*.

Un *sistema lógico* es una estructura matemática $S=<Sb(F),\varnothing,C>$, donde F es un conjunto no-vacío (de fórmulas), Sb(F) es el conjunto de sus partes, y $C:Sb(F)\rightarrow Sb(F)$ es una operación unaria (operación de consecuencia).

[1] La idea es identificar una teoría de la corrección argumental para un lenguaje L con el correspondiente sistema lógico $S=<Sb(F),C>$, donde F es el conjunto de oraciones de L. Puesto que C(X) es, intuitivamente, el conjunto de las consecuencias de X, la corrección de un argumento con las premisas $A_1,...,A_n$ y la conclusión A_{n+1} se representa como $A_{n+1}\in C(\{A_1,...,A_n\})$.
[2] A veces se reemplaza la operación de consecuencia por una relación de consecuencia $R \subseteq Sb(F)xF$. Es cuestión de gustos, puesto que se tiene $A\in C(X)$ syss $<X,A>\in R$.
[3] *La lógica* es la teoría de los sistemas lógicos; *una lógica* (p.ej., la lógica clásica, la lógica intuicionista, etc.) es una teoría de una clase de sistemas lógicos.
[4] Para simplificar, en lo que sigue escribiremos $<F,C>$ por $<Sb(F),C>$. En lo sucesivo y a lo largo de todo el libro se siguen usando X,Y,Z,… para partes o subconjuntos de F, y A,B,C,... para elementos de F.

PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LÓGICOS.

Un sistema lógico $S=<F,C>$ es tarskiano syss satisface las condiciones siguientes:

(T1) $A\in C(\{A\})$ *reflexividad*
(T2) si $X\subseteq Y$ entonces $C(X) \subseteq C(Y)$ *monotonía*
(T3) $C(C(X))\subseteq C(X)$ *transitividad*

Un sistema lógico $S=<F,C>$ es *finitario* syss

(T4) para toda fórmula A y todo conjunto de fórmulas X, si $A\in C(X)$ entonces hay un subconjunto finito X' de X tal que $A\in C(X')$.

Un sistema lógico $S=<S,F>$ es e*structural* syss

(T5) $s(C(X))=C(s(X))$ para toda sustitución s sobre F.

Un sistema lógico es *estándar* syss es tarskiano, estructural y finitario.

[1] Entre las fórmulas las hay simples y complejas. Una fórmula simple se caracteriza porque ninguna de sus partes (salvo la propia fórmula) es una fórmula. Una sustitución sobre F es entonces una función s del conjunto de fórmulas simples de F en el conjunto de fórmulas de F. Si A es una fórmula de F, cuyas subfórmulas simples son $B_1,...,B_n$, y s es una sustitución, s(A) es la fórmula resultante de sustituir simultáneamente en A cada ocurrencia de $B_1,...,B_n$ por $s(B_1),...,s(B_n)$.

Análogamente, si X es un conjunto de fórmulas de F, s(X) es el conjunto resultante de reemplazar cada $A \in X$ por s(A).
[2] La clasificación anterior de los sistemas lógicos se transfiere a las lógicas, de manera que se dice que una lógica es tarskiana (no-tarskiana) syss los sistemas lógicos que estudia son tarskianos (no-tarskianos),etc.
[3] Los postulados del último recuadro fueron propuestos por Tarski[2] como parte de la definición de operación de consecuencia. Hay que señalar a este respecto que para cualquiera de ellos se conocen lógicas que no lo satisfacen, y algunas de ellas son relativamente populares o lo han sido en algún momento (por ejemplo, las lógicas no-monótonas).
[4] En determinados contextos puede ser interesante considerar otros postulados: un sistema lógico es teoremático syss $C(\varnothing) \neq \varnothing$, es explosivo syss para algún conjunto finito de fórmulas X, C(X)=F, etc.
[5] Dado un sistema lógico S=<F,C>, una *teoría* de S es un $X \subseteq F$ tal que C(X)=X. Un conjunto de fórmulas X es axiomatizable en S si y sólo si existe un $Y \subseteq X$ finito tal que C(Y)=X. En ese caso, se dice que Y es una base axiomática para X.

La relación u operación de consecuencia de un sistema lógico puede definirse semántica o sintácticamente, es decir, en términos de interpretaciones admisibles de sus fórmulas o en términos de la forma de las mismas, respectivamente.
Se dice que un sistema lógico S=<F,C> es un *lenguaje formal* cuando C se considera definida semánticamente, y se conviene en usar '$\models_S$' para designar una relación de consecuencia definida semánticamente.
Se dice que un sistema lógico S=<F,C> es un *sistema deductivo* cuando C se considera definida sintácticamente, y se conviene en usar '$\vdash_S$' para designar una relación de consecuencia definida sintácticamente.

[1] La distinción entre sistemas deductivos y lenguajes formales *no* es una división de los sistemas lógicos, sino más bien de sus descripciones -un mismo sistema lógico puede aparecer como sistema deductivo y como lenguaje formal; es decir, $\vdash_S$ y $\models_S$ pueden ser nombres de una misma relación de consecuencia.
[2] Dicho esto, hay que señalar que algunos sistemas lógicos sólo pueden ser descritos semánticamente (como la lógica estándar de segundo-orden), si bien para todo sistema deductivo hay un lenguaje formal que caracteriza al mismo sistema lógico.
[3] La definición de una relación u operación de consecuencia presupone una definición previa del conjunto de fórmulas del sistema lógico correspondiente. Ésta consta normalmente de una tabla de signos y de un conjunto de reglas de formación, que combinados dan una definición recursiva de fórmula. Para evitar confusiones usamos el término *prolenguaje* para designar a los lenguajes artificiales de este tipo.
[4] En ocasiones se usa entrañamiento semántico por consecuencia (definida) semánticamente y derivabilidad o derivabilidad formal por consecuencia (definida) sintácticamente.
[5] Para construir un lenguaje formal, dado un prolenguaje, se procede como sigue: (1) se especifica la clase de las estructuras matemáticas admisibles para ese prolenguaje o estructuras-modelo. (2) Se especifican entonces, por medio de un conjunto de reglas semánticas, las funciones de interpretación admisibles de los signos y expresiones del prolenguaje sobre estructuras-modelo. (3) Una interpretación admisible del prolenguaje en cuestión es un par <S,I>, formado por una estructura-modelo y una función de interpretación sobre S. (4) Si V es el conjunto de los valores que pueden tomar las fórmulas de F bajo las interpretaciones admisibles, se determina el subconjunto W de V de valores designados. (5) Finalmente, se define: $A \in C(X)$ syss para toda interpretación admisible I, si para todo $B \in X$, $I(B) \in W$ entonces $I(A) \in W$.
[6] Adviértase que una definición semántica de la consecuencia no es, según lo expuesto, una definición recursiva. No sucede lo mismo con las definiciones sintácticas, cuyo esquema genérico

2 En honor a la verdad hay que decir que los postulados T1-T5 se deben más bien a Łoś y Suszko (1958), quienes formulan el postulado de reflexividad como $X \subseteq C(X)$. Los postulados originales de Tarski son: cardinal de $F \leq \omega$; $X \subseteq C(X)$; $C(C(X)) \subseteq C(X)$; $C(X) = \cup\{C(Y): Y$ es un subconjunto finito de $X\}$; hay un A tal que C(A)=S. Posteriormente Tarski eliminó el último postulado.

es: un argumento correcto es un argumento que posee tales y cuales propiedades estructurales (es decir, propiedades concernientes a la forma y disposición de las fórmulas que lo componen y sus partes) o que puede obtenerse a partir de tales y cuales argumentos estructuralmente descritos por medio de tales y cuales transformaciones estructurales.
[7] Por consiguiente, la relación de derivabilidad es recursivamente enumerable, la de entrañamiento semántico no tiene porqué serlo. Así, un sistema lógico cuya operación de consecuencia no sea recursivamente enumerable no podrá analizarse como sistema deductivo, aunque sí como lenguaje formal.

Según lo expuesto, podemos distinguir tres partes en el estudio de los sistemas lógicos: la teoría de los prolenguajes o gramática lógica, la teoría de los lenguajes formales o teoría de modelos, y la teoría de los sistemas deductivos o teoría de la demostración.

[1] Obviamente, la gramática lógica es presupuesta por la teoría de la demostración y la teoría de modelos.
[2] El nombre *teoría de la demostración* no es particularmente afortunado, y *teoría de la derivabilidad* sería preferible. Una fórmula A es demostrable syss $A \in C(\varnothing)$. Pero ya se ha señalado implícitamente que hay sistemas deductivos no-teoremáticos, y por otra parte no puede darse por sentado que, aún en sistemas teoremáticos, la derivabilidad sea definible en términos de demostrabilidad.
[3] Un único sistema lógico puede presentarse por medio de sistemas deductivos distintos, como comprobaremos en lo que sigue.

ARGUMENTOS DEMOSTRATIVOS.

La noción de consecuencia ha sido formalmente caracterizada por medio de la operación de consecuencia $C:Sb(F) \rightarrow Sb(F)$ o de la relación de consecuencia $R \subseteq Sb(F)xF$. En ambos casos se asume que un argumento consta de premisas y conclusión, y que las premisas de un argumento forman un conjunto (de fórmulas).

La acepción de 'argumento' implícita en las definiciones precedentes es privativa de la lógica. En una acepción más común, un argumento consta no sólo de premisas y conclusión, sino también de un discurso o cadena argumentativa que pretende mostrar que la conclusión se sigue de las premisas. Corcoran habla en este segundo caso de *argumentos demostrativos*. La corrección de un argumento demostrativo requiere no sólo que la conclusión se siga de las premisas, sino también que el discurso argumentativo exprese un razonamiento correcto de las premisas a la conclusión. Naturalmente todo esto queda un poco en el aire mientras no se especifiquen normas de razonamiento correcto.

La noción de derivabilidad tiene una conexión con la de argumento demostrativo de la que carece la noción de entrañamiento. Las reglas de transformación de los sistemas deductivos son los componentes del discurso argumentativo que mostraría el modo en que puede transitarse de las premisas a la conclusión. Un sistema deductivo no sólo clasifica los argumentos del tipo <X,A> en válidos e inválidos sino que además, a diferencia de un lenguaje formal, especifica las manipulaciones posibles de las premisas para extraer la conclusión.

Un modo muy general (es decir, independiente de la especificidad del prolenguaje elegido) de acotar las manipulaciones admitidas de las premisas es darles alguna estructura suplementaria, presentándolas no como un mero conjunto sino como, por ejemplo, una secuencia. Así, aunque un sistema deductivo define una operación de conjuntos de fórmulas en conjuntos de fórmulas, esos sistemas no operan directamente con argumentos premisas-conclusión –es decir, con pares de la forma <X,A> donde X es un conjunto de fórmulas y A es una fórmula. Lo habitual es que un sistema deductivo opere con expresiones de otro tipo –por ejemplo, pares de la forma <X,Y> formados por secuencias finitas de fórmulas- para dar una definición del conjunto de los argumentos válidos, definición que por ello es, en el sentido pertinente, indirecta. Las expresiones u objetos sintácticos manipulados pueden cambiar de un sistema deductivo a otro, aún cuando ambos caractericen una misma relación de consecuencia.

En suma, un sistema deductivo da en primer lugar una definición del conjunto de los argumentos demostrativos correctos y a partir de ahí una definición del conjunto de los argumentos premisas-conclusión correctos.

En distintos sistemas deductivos, pues, pueden encontrarse distintas asunciones acerca de las expresiones u objetos manipuladas, que pueden estar formadas por conjuntos, multiconjuntos o secuencias de fórmulas (y, a veces, símbolos auxiliares.

Asumiré que el lector sabe qué es un conjunto. Multiconjuntos y secuencias pueden definirse en términos de conjuntos:

Secuencias. (1) La secuencia vacía $< >$ es $\varnothing$; (2) la secuencia $<a>$ de un elemento a es $\{a\}$; (3) la secuencia $<a,b>$ es $\{a,\{a,b\}\}$; (4) la secuencia $<a_1,...,a_{n+1}>$ es $<<a_1,...,a_n>,a_{n+1}>$.

Multiconjuntos. (1) El multiconjunto vacío [ ] es $\varnothing$; (2) el multiconjunto $[a_1,...,a_n]$ es $\{a'_1,...,a'_n\}$, donde $a'_i=a_i$ si para todo $j<i$, $a_j\neq a_i$, y en caso contrario $a'_i=\{a'_k\}$, donde $a_k=a_i$, $k<i$, y para todo m, $k<m<i$, $a_m\neq a_i$. Así, mientras $\{a,a,b\}=\{a,b\}=\{b,a\}$, $<a,a,b>\neq<a,b>\neq<b,a>$ y $[a,b,b]\neq[a,b]=[b,a]$.

Como, por otra parte, conjuntos y multiconjuntos pueden ser vistos como clases de equivalencia de secuencias, la descripción más general -pero no siempre la más manejable- de los sistemas deductivos tomará las secuencias como expresiones u objetos básicos.

GRAMÁTICA LÓGICA ABSTRACTA.

La gramática lógica tiene encomendado el estudio de los prolenguajes. A lo largo de este libro se describen distintos prolenguajes ($\mathcal{P}$,$\mathcal{P}$ $\perp$,etc.). A continuación se introduce de forma general, abstracta (es decir, sin hacer referencia a símbolos concretos) la noción de gramática lógica. Al definir el grado lógico, el rango cuantificacional, etc. en el marco de esa gramática abstracta, no será preciso definir esas nociones cada vez que se presente un prolenguaje concreto.

➢ Tabla de símbolos.

1.Símbolos lógicos.
- 1.1 Operadores oracionales n-arios ($n\in N$).
- 1.2 Cuantificadores.

2. Símbolos no-lógicos.
- 2.1 Variables individuales.
- 2.2 Letras funcionales n-arias ($n\in N$).
- 2.3 Letras relacionales n-arias ($n\in N$).

3. Símbolos auxiliares.
- 3.1 Paréntesis.

➢ Definición de término.

(1) Las variables individuales son términos.

(2) Si f es una letra funcional n-aria y $<t_1,...,t_n>$ es una secuencia de términos entonces $f(t_1,...,t_n)$ es un término.

➢ Reglas de formación. Noción de fórmula.

(RF1) Si R es un símbolo relacional n-ario y $<t_1,...,t_n>$ es una secuencia de términos entonces $R(t_1,...,t_n)$ es una fórmula.

(RF2) Si $<A_1,...,A_n>$ es una secuencia de fórmulas y $\bigcirc$ es un operador oracional n-ario entonces $\bigcirc(A_1,...,A_n)$ es una fórmula.

(RF3) Si A es una fórmula, v una variable individual y Q un cuantificador entonces (Qv)(A) es una fórmula.

[1] Un prolenguaje particular se determina estipulando los símbolos, lógicos o no lógicos, de cada categoría. En cualquier caso, se conviene que los conjuntos de símbolos de cada categoría son disjuntos dos a dos.

[2] Un prolenguaje sin cuantificadores, variables individuales, letras funcionales y letras relacionales

no ceroarias es un prolenguaje de orden cero. Un prolenguaje con cuantificadores, variables individuales y letras relacionales n-arias, para algún n distinto de 0, es un prolenguaje de primer-orden.
[3] Una característica importante de los prolenguajes es la no ambigüedad sintáctica de sus fórmulas. En algunos casos (cuando no se emplea una notación prenexa como en el cuadro precedente) la no-ambigüedad de las fórmulas se asegura usando símbolos auxiliares (como los paréntesis).
[4] Para precisar el punto anterior, defínase recursivamente la «secuencia de lectura» de una fórmula, s(A): (1) si $A=R(t_1,...,t_n)$ entonces $s(A)=<R,t_1,...,t_n>$, (2) si $A=O(A_1,...,A_n)$ entonces $s(A)=<O,sA_1,...,sA_n>$, (3) si A=QvB entonces s(A)=<Q,v,sB>. Como obviamente a cada fórmula le corresponde una y sólo una secuencia de lectura, se obtiene el siguiente resultado:

TEOREMA DE UNICIDAD DE LECTURA. s es una inyección del conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$ en el conjunto de secuencias finitas de signos de $\mathcal{P}$; es decir, s es una función y si s(A)=s(B) entonces A=B.

[5] Las fórmulas de un prolenguaje son, en definitiva, secuencias finitas de sígnos extraídos de un repertorio previamente especificado, construídas por medio de un número finito de reglas fijas. Por consiguiente, el conjunto de las fórmulas de un prolenguaje es decidible, o, con otras palabras, existe un método efectivo para establecer, para cualquier secuencia finita semejante, si es una fórmula o no.
[6] Antes de abandonar esta cuestión, veamos un caso en el que no puede demostrarse un teorema de unicidad de lectura. Sea A el conjunto de las letras del alfabeto latino. El conjunto P de «palabras» se define como sigue: (1) $A \subseteq P$, (2) Si $<\alpha_1,...,\alpha_i>$ y $<\beta_1,...,\beta_j>$ son palabras entonces $<\alpha_1,...,\alpha_i,\beta_1,...,\beta_j>$ es una palabra. En suma, las palabras son aquí secuencias finitas de letras del alfabeto latino. Sin embargo, la palabra <abc>, por ejemplo, puede «leerse» de dos maneras distintas, a saber: <<a,b>,c> y <a,<b,c>>.
[7] Otro nombre, bastante extendido, para las letras funcionales ceroarias es *constantes individuales*.

A continuación, definimos un conjunto de nociones gramaticales, y por tanto sintácticas, básicas. El teorema de unicidad de lectura garantiza la corrección de las definiciones.

Alcance de una ocurrencia de un símbolo lógico en una fórmula.

Ya se ha señalado que una fórmula es una secuencia finita de signos. Hablando con propiedad, una fórmula es más bien una secuencia finita de *ocurrencias* de signos (un mismo signo puede tener varias ocurrencias en una fórmula). Si una ocurrencia de un operador oracional n-ario 'O' es el i-ésimo término de la secuencia de lectura S(A), los términos i+1-ésimo,...,i+n-ésimo de s(A) corresponderán a secuencias de lectura de fórmulas, $s(A_1),...,\ s(A_n)$. Se dice entonces que el alcance de esa ocurrencia de 'O' en A está formado por las correspondientes ocurrencias de $A_1,...,A_n$ en A. Asimismo, si una ocurrencia de un cuantificador 'Q' es el i-ésimo término de s(A), el i+2-ésimo término de s(A) corresponderá a una secuencia de lectura de una fórmula B. En tal caso, el alcance de esa ocurrencia de Q en A es la ocurrencia correspondiente de B en A.

Por tanto tanto, el alcance de una ocurrencia de un símbolo lógico en una fórmula A puede identificarse con un conjunto de ocurrencias de fórmulas en A.

Una secuencia de ocurrencias de símbolos lógicos en una fórmula A, $<s_1,...,s_{n+1}>$, constituye una secuencia anidada cuando el alcance de s_1 en A está contenido en el alcance de s_2 en A,...., y el alcance de sn en A está contenido en el alcance de s_{n+1} en A.

Complejidad o grado lógico de una fórmula A, c(A).

(1) $c(Rt_1,...,t_n)=0$,
(2) $c(O(A_1,...,A_n))= \text{máx}\{c(A_1),...,c(A_n)\} + 1$,
(3) $c(QvA')= c(A') + 1$.

La complejidad es pues una función de fórmulas en números naturales que especifica la longitud de la secuencia más larga de ocurrencias anidadas de símbolos lógicos de una fórmula. Si c(A)=0 se dice que A es una fórmula atómica, y si $c(A)\neq 0$ que A es una fórmula molecular. Si **F** es el conjunto

de las fórmulas del prolenguaje $\mathcal{P}$ usaremos la notación '$\mathbf{F}_n$' para designar al conjunto de las fórmulas de $\mathcal{P}$ de complejidad n (n=0,1,2,...).

Rango cuantificacional de una fórmula A, RC(A).

(1) Si C(A)=0, RC(A)=0,

(2) $C(O(A_1,...,A_n))=máx\{RC(A_1),...,RC(A_n)\}$,

(3) RC(QvA')= RC(A') + 1.

Variables libres en una fórmula A, VL(A).

Sea V(A) el conjunto de variables individuales que ocurren en una fórmula A; entonces:

(1) VL(A)=V(A), si c(A)=0,

(2) $VL(O(A_1,...,A_n))= VL(A_1) \cup ... \cup VL(A_n)$,

(3) VL(QvA')= VL(A') - {v}.

Si $x \in V(A)$ pero $x \notin VL(A)$, se dice que x *está ligada en A*.

Subfórmulas de una fórmula A.

El conjunto SF(A) de subfórmulas de A queda definido por medio de las claúsulas siguientes:

(1) SF(A)={A}, si c(A)=0,

(2) $SF(O(A_1,...,A_n))= SF(A_1) \cup,..., \cup SF(A_n) \cup \{O(A_1,...,A_n)\}$,

(3) SF(QvA')= SF(A') $\cup$ {QvA}.

De entre las subfórmulas de una fórmula molecular se distinguen sus subfórmulas inmediatas: si $A=O(A_1,...,A_n)$, sus subfórmulas inmediatas son $A_1,...,A_n$, y si A=QvB, que B es la subfórmula inmediata de A.

Ocurrencias libres y ligadas de una variable en una fórmula A.

Una ocurrencia x' de una variable x en una fórmula A está libre syss (1) x' está en una subfórmula B de A, $x \in VL(B)$, y (2) esa ocurrencia de B en A no es una subfórmula de ninguna fórmula de la forma QxC. En caso contrario, x' está ligada en A.

No hay que confundir las nociones de variable libre y ocurrencia libre de una variable: si una variable v está libre en una fórmula A entonces hay al menos una ocurrencia libre de v en A, aunque podría haber otras ocurrencias ligadas de esa variable en A.

Fórmulas abiertas y cerradas.

Si $VL(A)=\varnothing$ se dice que A es una *fórmula cerrada* de $\mathcal{P}$ y en caso contrario -es decir, si $VL(A)\neq\varnothing$- se dice que A es una *fórmula abierta de* $\mathcal{P}$.

Término libre para una variable en una fórmula.

Un término t está libre para una variable v en una fórmula A syss al sustituir cualquier ocurrencia libre de v en A por una ocurrencia de t, toda ocurrencia de una variable libre w en esa ocurrencia de t está libre en la fórmula resultante.

Subtérminos de un término t.

El conjunto ST(t) de un término t queda definido por las claúsulas:

(1) si t es una variable, ST(t)={t},

(2) si $t=f^n(t_1,...,t_n)$ entonces $ST(\Gamma)=\{f^n(t_1,...,t_n)\} \cup ST(t_1) \cup ... \cup ST(t_n)$.

Subfórmulas generalizadas.

Una noción ligeramente distinta de la de subfórmula definida antes es la de *subfórmula generalizada.* El conjunto de subfórmulas generalizadas de una fórmula A, SFG(A), se define así:

(1) SFG(A)={A}, si c(A)=0,

(2) $SFG(O(A_1,...,A_n))= SFG(A_1) \cup,..., \cup SFG(A_n) \cup \{O(A_1,...,A_n)\}$,

(3) SFG(QvB)= $\cup${SFG(B(v/t)/t es un término} $\cup$ {QvB}, donde B(v/t) es la fórmula resultante de sustituir cada ocurrencia libre de v en B por (una ocurrencia de) t.

Estructura de las fórmulas cuantificacionales.

Si $A=(Q_1v_1),...,(Q_nv_n)B$, se dice que $(Q_1v_1),...,(Q_nv_n)$ es el *prefijo cuantificacional* de A y que B es la *matriz cuantificacional* de A.

Sublenguaje, fragmento de un prolenguaje.

Dados dos prolenguajes $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$, diremos que $\mathcal{P}$ es un sublenguaje de $\mathcal{P}'$ cuando se cumpla $F\subseteq F'$. Si además se cumple $F_0=F'_0$, diremos que $\mathcal{P}$ es un fragmento de $\mathcal{P}'$.

TIPOLOGÍA DE LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS.

Una vez definido el conjunto F de fórmulas, hay dos estrategias básicas para definir la derivabilidad: la hilbertiana y la gentzeniana. En ambos casos se trata de dar una definición recursiva de una operación $C:Sb(F)\rightarrow Sb(F)$ o de una relación $R\subseteq Sb(F)xF$; las diferencias se refieren a cuál sea el criterio de complejidad adoptado. En los sistemas hilbertianos el criterio es el cardinal del conjunto de premisas, de modo que primero se define $C(\varnothing)$ y sucesivamente se define C(X) para conjuntos de cardinalidad creciente. El criterio de complejidad que subyace en un sistema gentzeniano es más sutil y tiene en cuenta la complejidad de las fórmulas que integran el argumento. Si c(A) es la complejidad de una fórmula A, sea $c(X)=máx\{c(A)/A\in X\}$. Así, una posibilidad es decir que un argumento $<X,A>$ es entonces más complejo que un argumento $<Y,B>$ si $c(X\cup\{A\}) > c(Y\cup\{B\})$. Otra posibilidad es definir la complejidad de un argumento $<X,A>$ por medio de la ecuación $c(<X,A>)=\Sigma\{c(B)/B\in X\cup\{A\}\}$ –es decir, como la suma de las complejidades de las fórmulas (y no de las ocurrencias de esas fórmulas) que lo integran. Por consiguiente, sea cual sea la definición de la complejidad de un argumento adoptada, un buen ejemplo de deducción primitiva según un criterio gentzeniano es $<\{A\},A>$ si $c(A)=0$.[3]

ESTRATEGIA HILBERTIANA.

(1) Se define inductivamente $C(\varnothing)$.
(2) Para todo conjunto finito de fórmulas X, C(X)queda definido por una estipulación de la forma: $A\in C(X)$ syss $B\in C(\varnothing)$.
(3) Para todo conjunto de fórmulas X, finito o infinito, C(X) queda definido por la estipulación: $A\in C(X)$ syss para algún subconjunto finito Y de X, $A\in C(Y)$.

ESTRATEGIA GENTZENIANA.

Pueden distinguirse dos variantes, que denominaremos gentzeniano-scottiana y gentzeniano-tarskiana. Para explicar mínimamente esta terminología, diremos que de una relación $R\subseteq SbF\mathbf{x}SbF$ que satisface unos requisitos análogos a los enunciados antes para las operaciones de consecuencia se dice que es una relación de *consecuencia de Scott* (por Dana Scott). Adviértase que la operación de consecuencia correspondiente a una relación de consecuencia de Scott es del tipo $C:SbF\rightarrow Sb(Sb(F))$. Cuando se consideran relaciones de consecuencia de Scott, se denominan relaciones de *consecuencia de Tarski* a las relaciones $R\subseteq SbF\mathbf{x}F$ descritas en las páginas anteriores.

Estrategia de Gentzen-Scott

(1) Se define inductivamente un conjunto de pares de conjuntos finitos de fórmulas o secuentes, S (es decir, una relación de consecuencia de Scott). Naturalmente, la complejidad de un secuente está en función de la complejidad de las fórmulas que lo integran.
(2) Para todo conjunto finito de fórmulas X, C(X) queda definido por la estipulación: $A\in C(X)$ syss $<X,\{A\}>\in S$.

---

3 En realidad, la complejidad de un argumento según un criterio gentzeniano depende de la complejidad del esquema argumental que lo valida, y así no de la complejidad de las fórmulas que integran el argumento sino de la complejidad de los esquemas de fórmula que aparecen en dicho esquema argumental. Así, los argumentos $<\{p\},p>$ y $<\{\bigcirc(p_1,\ldots,p_n)\},\bigcirc(p_1,\ldots,p_n)>$ caen bajo el esquema argumental $<\{A\},A>$ y por ello se les asignaría la misma complejidad: serían deducciones básicas.

(3) Para todo conjunto de fórmulas X, finito o infinito, C(X) queda definido por la estipulación: $A \in C(X)$ syss para algún subconjunto finito Y de X, $A \in C(Y)$.

Estrategia de Gentzen-Tarski

(1) Se define inductivamente un conjunto de pares formados por un conjunto finito de fórmulas y una fórmula.
(2) Para todo conjunto de fórmulas X, finito o infinito, C(X) queda definido por la estipulación: $A \in C(X)$ syss para algún subconjunto finito Y de X, $A \in C(Y)$.

[1] Del mismo modo en que antes se ha distinguido, dentro de los sistemas lógicos, entre lenguajes formales y sistemas deductivos, puede distinguirse dentro de éstos entre sistemas hilbertianos y gentzenianos.
[2] Algunos sistemas deductivos sólo pueden caracterizarse gentzenianamente. En efecto, para que una relación u operación de consecuencia sea definible *à la Hilbert* es preciso que sea teoremática (a menos que sea vacía) y que su naturaleza y los recursos expresivos del prolenguaje correspondiente permitan capturar una operación sobre conjuntos de fórmulas a través de una propiedad de las fórmulas (es decir, un conjunto de fórmulas).
[3] Adviértase que ambas estrategias presuponen que la relación de consecuencia es finitaria.
[4] Para simplificar, en las descripciones de las dos estrategias no se han tenido en cuenta las diferencias de formato entre las expresiones con las que opera el sistema deductivo y los argumentos.

TIPOLOGÍA DE LAS REGLAS DE INFERENCIA.

[1] Reglas de tipo Hilbert o de nivel 0.
Transforman fórmulas en fórmulas, y por consiguiente son de la forma:

$$A_1,...,A_n \Rightarrow B$$

[2] Reglas de tipo Gentzen o de nivel 1.
Transforman reglas de nivel 0 en reglas de nivel 0, y por consiguiente son de la forma:

$$\frac{X_1 \Rightarrow Y_1,\ldots, X_n \Rightarrow Y_n}{X \Rightarrow Y}$$

[3] En general, las reglas de nivel n+1 transforman reglas de nivel n en reglas de nivel n.

[1] Aunque esta jerarquía de las reglas de inferencia fué propuesta -y mínimamente explorada- por Moisil en los años 50, en la práctica sólo se emplean reglas de los niveles 0 y 1.[4]
[2] En un sistema hilbertiano se empieza por dar una definición inductiva de un conjunto T de fórmulas (o conjunto de teoremas del sistema). Por tanto consta de claúsulas de base, de la forma $A \in T$ o $\varnothing \vdash_S A$ o simplemente $\vdash_S A$, y de claúsulas de recurrencia, de la forma 'si $\vdash_S A_1,..., \vdash_S A_n$ entonces $\vdash_S B$'. Las fórmulas declaradas teoremas por las claúsulas de base reciben el nombre de *axiomas del sistema*. Por ello a veces se llama *sistemas axiomáticos* a los sistema hilbertianos. Las claúsulas de un sistema hilbertiano son, obviamente, reglas de nivel 0. Una última precisión terminológica: algunos denominan *esquemas de axioma* y *reglas de prueba* a las claúsulas de base y recurrencia de un sistema hilbertiano.
[3] En un sistema gentzeniano se da una definición inductiva de un conjunto de pares ordenados de conjuntos finitos de fórmulas o secuentes, Σ. En vez de escribir '<X,Y>' para designar un secuente suele escribirse '$X \vdash Y$' o '$X \Rightarrow Y$'. Así pues, sus claúsulas de base son de la forma $(X \vdash Y) \in \Sigma$ o abreviadamente $X \vdash Y$, y las de recurrencia de la forma 'si $X_1 \vdash Y_1,...,X_n \vdash Y_n$ entonces $X \vdash Y$. El conjunto Σ así definido es el conjunto de los secuentes derivables del sistema, los secuentes

[4] Sin embargo, vid. K.Došen, 'Sequent systems for modal logics'[1985] y G.Crocco y L.Fariñas del Cerro, 'Structure, Consequence Relation and Logic' en Gabbay [1994] a propósito de la noción de secuente de segundo grado.

derivables directamente usando claúsulas de base reciben el nombre de *axiomas* y las *claúsulas de recurrencia*, que son evidentemente reglas de nivel 1, el de *reglas derivacionales*.
[4] Un sistema hilbertiano puede definirse, por tanto, como un sistema deductivo definido por reglas de nivel 0, y un sistema gentzeniano como un sistema deductivo definido por reglas de nivel 1.

Esta jerarquía de las reglas de inferencia no está exenta de alguna ambigüedad. Un axioma del cálculo secuencial como $A \vdash A$ (cfr. Capítulos 3 y 4) puede verse alternativamente como una regla de nivel 0 o como una regla de nivel 1 de la forma $\varnothing \vdash \varnothing \Rightarrow A \vdash A$.

CLASIFICACIÓN DE LAS REGLAS DE NIVEL 1.

Como ya se ha indicado al comentar las propiedades definitorias de los sistemas lógicos, entre las fórmulas las hay simples y complejas. A continuación se generaliza la noción de complejidad de fórmulas a conjuntos de fórmulas, secuentes y conjuntos de secuentes.

La complejidad de un conjunto de fórmulas X, c(X) es la suma de las complejidades de sus elementos. La complejidad de un secuente $X \vdash Y$ es la suma de las complejidades de X e Y, es decir, $c(X \vdash Y)=c(X)+c(Y)$. La complejidad de un conjunto de secuentes $X_1 \vdash Y_1,\ldots,X_n \vdash Y_n$ es $c(X_1 \cup \ldots \cup X_n) + c(Y_1 \cup \ldots \cup Y_n)=c(X_1 \vdash Y_1,\ldots,X_n \vdash Y_n)$.

Estas definiciones tratan con conjuntos. Por consiguiente: $c(\{A,B,B\})=c(A)+c(B)$; $c(X \vdash Y, X \vdash Y)=c(X,Y)$, etc.

Las reglas de nivel 1, cuya forma genérica es $(X_1 \vdash Y_1,\ldots,X_n \vdash Y_n) \Rightarrow (X \vdash Y)$, se dividen en reglas operacionales y reglas estructurales. A continuación se enuncia un criterio formal para diferenciarlas.

A) Una *regla* de nivel 1 es *operacional* si para toda aplicación de esa regla , o bien $(X_1 \vdash Y_1,\ldots,X_n \vdash Y_n) =c(X \vdash Y)+1$ o bien $c(X_1 \vdash Y_1,\ldots,X_n \vdash Y_n)+1= c(X \vdash Y)$. En el primer caso se dice que es una regla de *eliminación*, en el segundo que es una regla de *introducción*.
b) Una *regla* de nivel 1 es *estructural* si no es operacional. Por tanto, pueden distinguirse tres variedades de reglas estructurales atendiendo a la relación entre $c(X_1 \vdash Y_1,\ldots,X_n \vdash Y_n)$ y $c(X \vdash Y)$:

b.1 Reglas estructurales para las que se cumple $c(X_1 \vdash Y_1,\ldots,X_n \vdash Y_n)=c(X \vdash Y)$ para cualquier aplicación de la regla;

b.2 Reglas en las que la complejidad de $X_1 \vdash Y_1,\ldots,X_n \vdash Y_n$ es siempre menor o igual que la complejidad de $X \vdash Y$. El valor de $c(X \vdash Y) - c(X_1 \vdash Y_1,\ldots,X_n \vdash Y_n)$ varía de una aplicación a otra, aunque para al menos una aplicación es >1.

b.3 Reglas en las que la complejidad de $X_1 \vdash Y_1,\ldots,X_n \vdash Y_n$ es siempre mayor o igual que la complejidad de $X \vdash Y$. El valor de $c(X_1 \vdash Y_1,\ldots,X_n \vdash Y_n)–c(X \vdash Y)$ es variable, aunque para alguna aplicación de la regla es >1.

COMENTARIO.
[1] Por tanto, las reglas de nivel 1 pueden ser estructurales u operacionales (a éstas se les llama a veces *lógicas*). Las reglas estructurales expresan características generales bien de la derivabilidad bien de la misma operación de consecuencia, y así se enuncian sin mencionar símbolo lógico alguno. Podría decirse por ello que manipulan estructuras, frente a las reglas operacionales que manipulan fórmulas.
[2] Dentro de las reglas estructurales, se distingue entre reglas de razonamiento y reglas de datos. Las reglas de razonamiento expresan características muy generales de la operación de consecuencia como las descritas en el epígrafe *Propiedades de los sistemas lógicos*: reflexividad, transitividad, etc. Las reglas de datos definen la estructura fundamental de los objetos sintácticos con los que opera el sistema; dicho de otro modo, se refieren a los modos en los que pueden manipularse las fórmulas que integran un argumento para construir argumentos demostrativos. Así, las reglas de datos expresan características de la derivabilidad antes que características de la relación de consecuencia.
[3] Un buen ejemplo de regla de razonamiento es la regla de corte, $X \vdash A \quad X,A \vdash Y \Rightarrow X \vdash Y$, que expresa la transitividad de la relación de consecuencia.

[4] Las reglas de datos dicen, entre otras cosas, si las premisas forman un conjunto, una secuencia, un multiconjunto o algún otro tipo de estructura más compleja. Un buen ejemplo de reglas de datos son las reglas X,A,B,Z ⊢Y ⇒ X,B,A,Z ⊢Y y X ⊢Y,A,B,Z ⇒ X ⊢Y,B,A,Z (de permutación o intercambio) especifican que el orden de los elementos del antecedente y el consecuente no es significativo.

[4] Las reglas operacionales representan las distintas operaciones aplicables a los secuentes en el lenguaje objeto. Bajo ciertas condiciones mínimas, pueden verse como reglas para la manipulación de secuentes en el lenguaje objeto. Ejemplos característicos son X,A,B ⊢Y ⇒ X,A&B ⊢Y (introducción de '&') y X,A&B ⊢Y ⇒ X,A,B ⊢Y (eliminación de '&').

[5] Decir que A se sigue de X es decir que pueden manipularse de acuerdo con un procedimiento previamente establecido fórmulas $B_1,\ldots,B_n$ de X para extraer la conclusión A. La manipulación de las fórmulas $B_1,\ldots,B_n$ incluye disponerlas en un orden determinado. Puede suceder que una ordenación S de $B_1,\ldots,B_n$ permita extraer la conclusión A según el procedimiento establecido y otra disposición S' no. Diríamos entonces que el argumento premisas-conclusión <X,A> es correcto, lo mismo que el argumento demostrativo <S,A> y a diferncia del argumento demostrativo <S',A>.

[6] Las reglas de razonamiento expresan propiedades de los argumentos premisas-conclusión, por ejemplo, si el argumento <X,A> es correcto, también lo es el argumento <X ∪ Y,A> (monotonía), mientras que las reglas de datos expresan propiedades de los argumentos demostrativos (como la permutación).

[7] Las reglas de nivel 1 difieren, pues, por su generalidad, máxima en las reglas de razonamiento y mínima en las reglas operacionales. Como las reglas de razonamiento están ligadas a la idea misma de consecuencia, cabe esperar que aparezcan –con unos ropajes u otros- en cualquier sistema deductivo. Las reglas de datos, por su parte, parecen propias de una lógica particular, y así variarán de una lógica a otra pero no cuando se consideren sistemas deductivos distintos para una misma lógica. Finalmente, las reglas operacionales están vinculadas al prolenguaje utilizado más que a la lógica que se pretende caracterizar.[5]

Para prevenir confusiones hay que advertir que algunos autores, generalmente en el contexto de sistemas de deducción natural (*vid.* capítulo 7), hablan de reglas operacionales de introducción y de eliminación en un sentido distinto al nuestro. Para caracterizar completamente el significado derivacional de un operador lógico '○' hay que especificar tanto el conjunto de las consecuencias de las fórmulas de la forma $\circ(A_1,\ldots,A_n)$ como los conjuntos de fórmulas de los que se siguen esas fórmulas. Dicho de otro modo, hay que especificar el comportamiento de las fórmulas $\circ(A_1,\ldots,A_n)$ como premisas y como conclusiones. Hay autores, como Prawitz, que denominan 'reglas de eliminación' a las reglas operacionales que determinan el comportamiento de esas fórmulas en tanto que premisas de una inferencias y 'reglas de introducción' a las que determinan su comportamiento como conclusión de una inferencia. En los sistemas de deducción natural, las dos acepciones de eliminación/introducción coinciden, de manera que las reglas operacionales de introducción en nuestra acepción son las reglas operacionales de introducción en la acepción de Prawitz, y lo mismo sucede con las reglas de eliminación. En los sistemas de cálculo de secuentes, por el contrario, las reglas de eliminación de Prawitz son, según nuestra terminología, reglas de introducción en el antecedente, y sus reglas de introducción son reglas de introducción en el consecuente.

EJERCICIOS.

(1) Definir las nociones de conjunto y multiconjunto en términos de relaciones de equivalencia entre secuencias.

(2) Si E es el conjunto de los enteros no negativos, sea ζ la relación entre subconjuntos de E y enteros no negativos definida por la estipulación XζA si y sólo si máx(X)≤A (es decir, A es mayor o igual que el mayor de los elementos de X). ¿Cuáles de las propiedads distintivas de los sistemas

5 Sin embargo las cosas no son tan sencillas. Es sabido que algunos resultados sobre lógicas no clásicas son sensibles a la elección del prolenguaje en el que se expresa esa lógica. El fenómeno es conocido como "advertencia de Makinson", por ser este autor quien primero reparó en él.

lógicos estándar posee <E, ζ>?

(3) Siendo E como en el ejercicio anterior, sea ξ la relación entre subconjuntos de E y enteros no negativos definida por la estipulación XξA si y sólo si máx(X)≥A (es decir, A es menor o igual que el mayor de los elementos de X). ¿ Cuáles de las propiedads distintivas de los sistemas lógicos estándar posee <E, ξ >?

(4) Si N es el conjunto de los enteros no negativos, la noción de fórmula de $\mathcal{P}_N$ se define como sigue:

RF1. Si A∈N entonces (A) es una fórmula de $\mathcal{P}_N$.

RF2. Si (X) e (Y) son fórmulas de $\mathcal{P}_N$, (X,Y) es una fórmula $\mathcal{P}_N$.

¿Es $\mathcal{P}_N$. un prolenguaje? En concreto, ¿puede demostrarse un teorema de unicidad de lectura para $\mathcal{P}_N$?

(4) Modificar la definición precedente de fórmula de $\mathcal{P}_N$ para asegurar su no ambigüedad.

(5) ¿Cuáles serían los símbolos lógicos, y en qué categoría caerían, de $\mathcal{P}_N$?

(6) Clasificar las reglas del sistema deductivo SM del capítulo 3, indicando en el caso de las reglas estructurales si son de tipo b.1, b.2 o b.3.

(7) Partiendo de la respuesta al ejercicio 2, definir la complejidad o grado lógico de una fórmula de $\mathcal{P}_N$. Calcular la complejidad de las fórmulas (i) (((1),(3)),(7)), (ii) ((13)(580)) y (iii) (((1(3))5)(80)).

(8) Especificar el conjunto de subfórmulas de las fórmula (i)-(iii) del ejercicio 4.

(9) ¿Se cumple que si c(A)<c(B) entonces B tiene más subfórmulas que A (es decir, formulado con un poco más de precisión, que el cardinal de SF(B) es mayor que el cardinal de SF(A))?

(10) La regla de nivel 1

$$\frac{X \vdash Y}{s(X) \vdash s(Y)}$$

Para cualquier sustitución s, ¿Es una regla de razonamiento o una regla de datos?

(11) La regla

$$\frac{X \vdash Y \qquad Z \vdash W}{X,Z \vdash Y,W}$$

¿Es una regla operacional, estructural o de datos?

(12) Indicar el nivel de la regla

$$\frac{X,A \vdash Y}{X \vdash A,Y} \Rightarrow \frac{X,A \vdash Y}{X \vdash Y}$$

Comparar esa regla con la regla de Corte:

$$\frac{X,A \vdash Y \quad X \vdash A,Y}{X \vdash Y}$$

¿En qué difieren estas dos reglas?

CAPÍTULO 2. SISTEMAS HILBERTANOS

> Pero, además, no hay en rigor más remedio que confesar nuestra extrañeza cuando en lógica se oye hablar de axiomas...
>
> W. y M. Kneale, *El desarrollo de la lógica.*

EL PROLENGUAJE $\mathcal{P}$.

Un sistema deductivo es un par <F,C>, formado por un conjunto de fórmulas y una operación unaria de consecuencia sobre Sb(F). Por tanto, para construir un sistema deductivo el primer paso es especificar el conjunto de sus fórmulas o, dicho de otro modo, el prolenguaje correspondiente.

El prolenguaje $\mathcal{P}$ es un lenguaje de primer-orden cuyas *variables individuales* son

$$x,y,z,x_0,y_0,z_0,...,x_n,y_n,z_n,...,$$

sus letras *relacionales n-arias*, para todo $n\in \mathbf{N}$, son

$$P^n,Q^n,R^n,P^n_1,Q^n_1,R^n_1,...,P^n_i,Q^n_i,R^n_i,...$$

y sus *letras funcionales n-arias*, para todo $n\in \mathbf{N}$, son

$$f^n,g^n,h^n,f^n_1,g^n_1,h^n_1,...,f^n_i,g^n_i,h^n_i,...$$

En cuanto a sus símbolos lógicos, incorpora un operador oracional unario ¬ (llamado *negador*), tres operadores oracionales binarios &,v,→ (llamados, respectivamente, *conjuntor*, *disyuntor* y *condicional*), y dos cuantificadores, ∃ y ∀, (*cuantificador existencial* y *cuantificador universal*, respectivamente).

Con estas especificaciones y lo expuesto en el capítulo 1 disponemos ya de una definición precisa del conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$. Siguiendo la práctica común, escribiremos '(A&B)' por '&(A,B)', '(AvB)' por 'v(A,B)' y '(A→B)' por '→(A,B)'. En cuanto al modo de leer las fórmulas, '¬(A)' se lee 'no-A', '(A&B)' se lee 'A y B', '(AvB)' se lee 'A o B' y '(A→B)', finalmente, 'si A entonces B'.

Abreviaturas

Convenciones notacionales sobre el uso de paréntesis.

Se escribe...	por...
$R^n_m t_1,...,t_n$	$R^n_m(t_1,...,t_n)$
¬A	¬(A) si A es atómica
¬¬(A)	¬(¬(A))
A&B→C	(A&B)→C
A→B&C	A→(B&C)
AvB→C	(AvB)→C
A→BvC	A→(BvC)
(Qv)A	(Qv)(A) si A es atómica
(Qu)(Q'v)(A)	(Qu)((Q'v)(A)),
[donde Q y Q' son cuantores]	

TEOREMAS DE LAS LÓGICAS MÍNIMA, INTUICIONISTA Y CLÁSICA.

Una vez determinado el conjunto de fórmulas, el siguiente paso en la construcción de un sistema deductivo es introducir la relación de derivabilidad. Si se adopta una estrategia hilbertiana, la construcción de esa relación comienza por una definición inductiva de un conjunto de fórmulas (el

conjunto de los teoremas del sistema, es decir C(∅)). Por eso a veces se describe un sistema deductivo hilbertiano como un par <F,T>, donde T⊆F es el conjunto de sus teoremas.

Naturalmente, a partir de un único conjunto de fórmulas F pueden introducirse distintos conceptos de derivabilidad, resultando así sistemas deductivos distintos. A continuación se enuncian tres sistemas hilbertianos que no sólo son distintos entre sí, sino que corresponden a sistemas lógicos distintos, aunque comparten el prolenguaje $\mathcal{P}$.

Lógica mínima (HM).

Axiomas

A1. (A→(B→A))
A2. ((A→(A→B))→(A→B))
A3. ((A→B)→((B→C)→(A→C)))
A4. ((A&B)→A)
A5. ((A&B)→B)
A6. ((A→B)→((A→C)→(A→(B&C))))
A7. (A→(AvB))
A8. (A→(BvA))
A9. ((A→C)→((B→C)→((AvB)→C)))
A10. (((A→B)&(A→¬B))→¬A)
A11. ((∀v)(A(v))→A(t))*
A12. (A(t)→(∃v)(A(v))*

Reglas de prueba

R1. ⊢A, ⊢(A→B) ⇒ ⊢B.[6]
R2. ⊢(B→A(v)) ⇒ ⊢(B→(∀v)(A(v)))**
R3. ⊢(A(v)→B) ⇒ ⊢((∃v)(A(v))→B)**

(*) Donde el término t está libre para la variable v en la fórmula A(v), y A(v) es la fórmula resultante de sustituir simultáneamente cada ocurrencia del término t en A(t) por una ocurrencia de la variable v.

(**) Donde B no contiene ocurrencias libres de la variable v, y A(v) es como en la nota precedente.

Lógica intuicionista (HI).

Axiomas

A1-A12
A13 (¬A→(A→B))

Reglas de prueba

R1-R3

Lógica clásica (HC/HC').

Axiomas

A1-A13
A14 (¬¬A→A) o A14'. (Av¬A)

Reglas de prueba

R1-R3

[1] Lo que tenemos en cada uno de estos casos es una definición inductiva de un conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$. Para indicar que una fórmula A pertenece a uno de esos conjuntos se escribe '$\vdash_{HM}$A', '$\vdash_{HI}$A', '$\vdash_{HC}$A' o '$\vdash_{HC'}$A' , según el caso, leyéndose, respectivamente, "A es un teorema de HM", "A es un teorema de HI", "A es un teorema de HC" y "A es un teorema de HC'".

[2] Las claúsulas de base de estas definiciones inductivas son los esquemas de axioma A1-A14 o A14'. Un esquema de axioma identifica una clase de fórmulas de $\mathcal{P}$, formada por las

[6] Esta regla es conocida como regla de *modus ponens*.

fórmulas que resultan de sustituir en el esquema cada metavariable A,B,C por una fórmula de $\mathcal{P}$, la metavariable v por una variable individual y la metavariable t por un término de $\mathcal{P}$. Así, postular un esquema de axioma es afirmar que todas las fórmulas de la clase correspondiente son axiomas, y por ende teoremas, del sistema en cuestión.

[3] En cuanto a las relaciones entre los conjuntos de teoremas de estos sistemas hilbertianos, se tiene: $HM \subset HI \subset HC = HC'$.

[4] Para establecer que una fórmula es un teorema de uno de estos sistemas, de acuerdo con la definición precedente, hay que mostrar que o bien es un axioma o bien es obtenible a partir de axiomas aplicando las reglas de prueba. Dicho de otro modo, para establecer $\vdash_{HM}B$, $\vdash_{HI}B$, $\vdash_{HC}B$ o $\vdash_{HC'}B$ hay que exhibir una secuencia finita de fórmulas $<A_1,...,A_n>$, tal que cada A_i, $1 \leq i \leq n$, es (1) un axioma, o (2) hay $k,j<i$, $A_k=A_j \rightarrow A_i$ [R1], o (3) hay $j<i$, $A_j=C \rightarrow D(v)$ y $A_i=C \rightarrow (\forall v)D(v)$, donde C no contiene ocurrencias libres de la variable [R2], o (3) hay $j<i$, $A_j=C(v) \rightarrow D$ y $A_i=(\exists v)C \rightarrow D$, donde D no contiene ocurrencias libres de la variable [R3], y finalmente $A_n=B$.

[5] Se dice entonces que $<A_1,...,A_n>$, es una *demostración* de $B=A_n$ en HM, HI, HC o HC', según el caso. La *longitud de esa demostración* es la longitud de la secuencia correspondiente, n. Adviértase que $<A_1,...,A_i>$, $i<n$, es a su vez una demostración de A_i; por ello diremos que $<A_1,...,A_i>$ es una subdemostración con respecto a $<A_1,...,A_n>$.

DERIVABILIDAD MÍNIMA, INTUICIONISTA Y CLÁSICA.

Si X es un conjunto de *fórmulas cerradas* de $\mathcal{P}$ y HS uno de los sistemas hilbertianos descritos, designamos con 'HS $\cup$ X' al sistema resultante de incorporar a HS como *axiomas* (y no como esquemas axiomáticos) las fórmulas de X. Para cualquier conjunto de fórmulas cerradas X y cualquier fórmula A, $X \vdash_{HS} A$ syss $\vdash_{HS \cup X} A$; es decir, A es derivable (o deducible) en HS a partir de X syss A es un teorema de HS $\cup$ X. Así pues, la derivabilidad a partir de un conjunto de fórmulas cerradas en un sistema hilbertiano se define en términos de la demostrabilidad en sus extensiones axiomáticas.

Esta definición de derivabilidad es parcial, puesto que contempla únicamente la derivabilidad a partir de conjuntos de fórmulas cerradas. La dificultad para extenderla a conjuntos cualesquiera de fórmulas (abiertas y cerradas) radica en las restricciones de las reglas R2 y R3. Un ejemplo lo aclarará. Si se generalizase la definición precedente omitiendo 'cerradas', dado un conjunto de fórmulas X, una fórmula $A[v] \in X$, con ocurrencias libres de la variable 'v' y siendo B una fórmula cerrada cualquiera tal que $\vdash_{HS}B$, se tendría la derivación siguiente:

$\vdash_{HS \cup X} A[v]$	hipótesis
$\vdash_{HS \cup X} A[v] \rightarrow (B \rightarrow A[v])$	A1
$\vdash_{HS \cup X} B \rightarrow A[v]$	R1
$\vdash_{HS \cup X} B \rightarrow (\forall v)(A[v])$	R2
$\vdash_{HS \cup X} B$	hipótesis
$\vdash_{HS \cup X} (\forall v)(A[v])$	R1

Provocando el fallo del teorema de deducción (*vid.infra*), puesto que si valiese el teorema de deducción una aplicación de R3 llevaría a $\vdash_{HS}(\exists v)(A[v]) \rightarrow (\forall v)(A[v])$.

La generalización de la definición que estamos comentando requiere, en primer lugar, reforzar las restricciones de R2 y R3:

Si X es un conjunto de fórmulas, HS $\cup$ X es el sistema hilbertiano resultante de añadir a HS las fórmulas de X como axiomas y reemplazar R2 y R3 por

R2'. $\vdash_{HS \cup X} (B \rightarrow A(v)) \Rightarrow \vdash_{HS \cup X} (B \rightarrow (\forall v)(A(v)))^{**}$

R3'. $\vdash_{HS \cup X} (A(v) \rightarrow B) \Rightarrow \vdash_{HS \cup X} ((\exists v)(A(v)) \rightarrow B)^{**}$

(**) Donde ni B ni las fórmulas de X contienen ocurrencias libres de la variable v.

En segundo lugar, hay que modificar levemente la definición de $X \vdash_{HS} A$ si queremos preservar la monotonía de la relación de derivabilidad. En efecto, si copiáramos tal cual la definición anterior -

ahora con una caracterización distinta del sistema HS ∪ X- podría suceder que $X \vdash_{HS} A$ y sin embargo no $X,B \vdash_{HS} A$. Por ejemplo, si (1) las fórmulas de X no contienen ocurrencias libres de la variable 'v', (2) $A=C\rightarrow(\forall v)(D[v])$ se deriva de X aplicando R2, y (3) la variable 'v' si ocurre libre en B. Para evitarlo se propone la siguiente definición alternativa:

$$X \vdash_{HS} A \text{ syss hay un } Y \subseteq X \text{ tal que } \vdash_{Y} A.^{7}$$

Nuestro primer teorema importante es el teorema de deducción, que, en el contexto de la teoría de la demostración, establece una cierta completitud (sintáctica) del sistema hilbertiano considerado. En efecto, el teorema enuncia que para cualquier deducción existente en sus extensiones axiomáticas hay ya un teorema en el mismo sistema que la expresa.

TEOREMA 1 (T. DE DEDUCCIÓN). Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualesquiera fórmulas A y B de $\mathcal{P}$, si $X,A \vdash_{HS} B$ entonces $X \vdash_{HS} A\rightarrow B$.

DEMOSTRACIÓN. Adviértase que $X,A \vdash_{HS} B$ syss $\vdash_{HS \cup Y \cup \{A\}} B$ para algún $Y \subseteq X$ y, análogamente, $X \vdash_{HS} A\rightarrow B$ syss $\vdash_{HS \cup Z} A\rightarrow B$ para algún $Z \subseteq X$. Por inducción sobre la longitud de la demostración de B en $HS \cup Y \cup \{A\}$, n. Si n=1, B es un axioma de $HS \cup Y \cup \{A\}$ y por tanto la demostración correspondiente es <B>,. Distinguimos dos subcasos: (i) B es un teorema de HS ∪ Y, y (ii) B=A, en cuyo caso $A\rightarrow B$ es $B\rightarrow B$.

Subcaso i.

$\vdash_{HS \cup Y} B$	(por hipótesis)
$\vdash_{HS \cup Y} B\rightarrow(A\rightarrow B)$	(por A1)
$\vdash_{HS \cup Y} (A\rightarrow B)$	(por R1)

Subcaso ii.

$\vdash_{HS \cup Y} B\rightarrow(B\rightarrow B)$	(por A1)
$\vdash_{HS \cup Y} (B\rightarrow(B\rightarrow B))\rightarrow(B\rightarrow B)$	(por A2)
$\vdash_{HS \cup Y} (B\rightarrow B)$	(por R1)

Asúmase entonces que el teorema se cumple para $n \leq k$, y considérese el caso en que n=k+1. Hay que considerar cinco subcasos: B es un teorema de HS ∪ Y, B=A, B se obtiene aplicando una de las reglas de prueba R1-R3. Los dos primeros se tratan como en la base. Para R1, R2 y R3 se necesitan los dos resultados que se establecen a continuación.

[L1] $\vdash_{HS} A\rightarrow(B\rightarrow C) \Rightarrow \vdash_{HS} (A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)$

$A\rightarrow(B\rightarrow C)$	hip.
$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow(A\rightarrow C)))$	[A3]
$((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow(A\rightarrow C))$	[R1]
$(A\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C)$	[A2]
$(((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow(A\rightarrow C)))\rightarrow(((A\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow (A\rightarrow C))\rightarrow(((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C))$	[A3]
$((A\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C))$	[R1]
$((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C)$	[R1]
$(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$	[A3]
$((A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow((((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow (A\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)))$	[A3]
$(((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$	[R1]
$(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)$	[R1]

[L2] $\vdash_{HS} A\rightarrow(B\rightarrow C) \Rightarrow \vdash_{HS} B\rightarrow(A\rightarrow C)$

$A\rightarrow(B\rightarrow C)$	hipótesis
$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$	[L1]
$(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)$	[R1]
$B\rightarrow(A\rightarrow B)$	[A1]

[7] Así, en el ejemplo discutido en el texto, si $\vdash_{HS \cup X} A$ entonces $X \cup \{B\} \vdash_{HS} A$.

(B→(A→B))→(((A→B)→(A→C))→(B→(A→C)) [A3]
((A→B)→(A→C))→(B→(A→C)) [R1]
B→(A→C) [R1]

Si B resulta de aplicar R1 a dos fórmulas C y C→B que preceden a B en la secuencia, dado que la longitud de las subdemostraciones de C y C→B es <k, por hipótesis de inducción $\vdash_{HS \cup Y} A \rightarrow C$ y $\vdash_{HS \cup Y} A \rightarrow (C \rightarrow B)$. En la demostración que sigue, y también en las de los casos correspondientes a R2 y R3, se omite por comodidad el prefijo '$\vdash_{HS \cup X}$'. En tal caso,

A→C	hipótesis
(A→C)→((C→(A→B))→(A→(A→B)))	A3
(C→(A→B))→(A→(A→B))	R1
A→(C→B)	hipótesis
C→(A→B)	L2
A→(A→B)	R1
(A→(A→B))→(A→B)	A2
A→B	R1

Ocupémonos ahora de R2. Se tendría $\vdash_{HS \cup Y \cup \{A\}} B \rightarrow C[v]$ y a partir de aquí por R2 $\vdash_{HS \cup Y \cup \{A\}} B \rightarrow (\forall v) C[v]$. La hipótesis de inducción proporciona $\vdash_{HS \cup Y} A \rightarrow (B \rightarrow C[v])$, y hay que concluir $\vdash_{HS \cup Y} A \rightarrow (B \rightarrow (\exists v) C[v])$.

(B&A→B)→((B→C[v])→(B&A→C[v]))	A3
((B→C[v])→(B&A→C[v]))	A5
(B&A→B)	R1
(A→(B→C[v]))→(((B→C[v])→(B&A→C[v]))→(A→(B&A→C[v])))	A3
A→(B→C[v])	hip.
(((B→C[v])→(B&A→C[v]))→(A→(B&A→C[v])))	R1
(A→(B&A→C[v]))	R1
B&A→A	A5
(B&A→A)→((A→B&A→C[v]))→(B&A→(B&A→C[v])))	A3
((A→(B&A→C[v]))→(B&A→(B&A→C[v])))	R1
(B&A→(B&A→C[v]))	R1
(B&A→(B&A→C[v]))→B&A→C[v])	A2
(B&A→C[v])	R1
(B&A→(∀v)C[v])	A6
(B→B)→((B→A)→(B→B&A))	A6
B→(B→B)	A1
(B→(B→B))→(B→B)	A2
B→B	R1
(B→A)→(B→B&A)	R1
A→(B→A)	A1
(A→(B→A))→(((B→A)→(B→B&A))→(A→(B→B&A)))	A3
((B→A)→(B→B&A))→(A→B→B&A))	R1
A→(B→B&A)	R1
(B→B&A)→((B&A→ (∀v)C[v])→(B→(∀v)C[v]))	A3
(A→(B→B&A))→(((B→B&A)→((B&A→(∀v)C[v])→(B→(∀v)C[v])))→(A→((B&A→(∀v)C[v])→(B→(∀v)C[v]))))	A3
(((B→B&A)→((B&A→(∀v)C[v])→(B→(∀v)C[v])))→(A→((B&A→(∀v)C[v])→(B→(∀v)C[v]))))	R1
(A→((B&A→(∀v)C[v])→(B→(∀v)C[v])))	R1
(A→(B&A→(∀v)C[v]))→(A→(B→(∀v)C[v]))	L1
(B&A→(∀v)C[v])→(A→(B→(∀v)C[v]))	A1
(A→(B&A→(∀v)C[v]))	R1
(A→(B→(∀v)C[v]))	R1

Para R3 la demostración es, afortunadamente, menos prolija. Por hipótesis de inducción se tiene $\vdash_{HS \cup Y} A \rightarrow (B[v] \rightarrow C)$, y hay que demostrar $\vdash_{HS \cup Y} A \rightarrow ((\exists v)B[v] \rightarrow C)$.

$A \rightarrow (B[v] \rightarrow C)$	[hipótesis]
$B[v] \rightarrow (A \rightarrow C)$	[L2]
$(\exists v)B[v] \rightarrow (A \rightarrow C)$	[R3]
$A \rightarrow (\exists v)B[v] \rightarrow C)$	[L2]

N.B.- Adviértase que al aplicar en estas demostraciones R2 y R3, respectivamente, se satisfacen las restricciones (reforzadas) anexas en virtud de los supuestos iniciales.

⊣

COROLARIO 1. Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula B de $\mathcal{P}$, si $X, \vdash_{HS} B$ entonces hay $\{A_1,...,A_n\} \subseteq X$ tal que $\vdash_{HS} A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (...\rightarrow (A_n \rightarrow B)))$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que una derivación de B a partir de X en HS es una demostración en HS $\cup$ X y una demostración es una secuencia finita de fórmulas, si B es derivable a partir de X en HS, lo es a partir de un número finito de fórmulas de X. Sean éstas $A_1,...,A_n$. Se tiene entonces $A_1,...,A_n \vdash_{HS} B$, y aplicando n veces consecutivas el teorema de deducción $\vdash_{HS} A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (...\rightarrow (A_n \rightarrow B)))$.

⊣

La conversa del teorema de deducción es una consecuencia casi inmediata de la clausura del sistema bajo R1:

TEOREMA 2. Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualesquiera fórmulas A y B de $\mathcal{P}$, si $X \vdash_{HS} A \rightarrow B$ entonces $X, A \vdash_{HS} B$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\vdash_{HS \cup X} A \rightarrow B$ entonces $\vdash_{HS \cup X \cup \{A\}} A \rightarrow B$. Por otra parte, es obvio que $\vdash_{HS \cup X \cup \{A\}} A$, y por R1 se sigue $\vdash_{HS \cup X \cup \{A\}} B$.

⊣

Por tanto, el corolario 1 puede reforzarse como sigue:

COROLARIO 2. Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula B de $\mathcal{P}$, $X \vdash_{HS} B$ syss hay $\{A_1,...,A_n\}$ tal que $\vdash_{HS} A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (...\rightarrow (A_n \rightarrow B)))$.

SISTEMAS IMPLICACIONALES.

El teorema de deducción y su conversa (teorema 2) proporcionan la clave para interpretar el contenido de los esquemas de axioma, en tanto que permiten leerlos como aserciones sobre la relación de consecuencia. El siguiente teorema aclara lo que quiero decir:

TEOREMA 3. Si $X, A \rightarrow B \vdash_{HS} C$ entonces si $X, A \vdash_{HS} B$ entonces $X \vdash_{HS} C$.

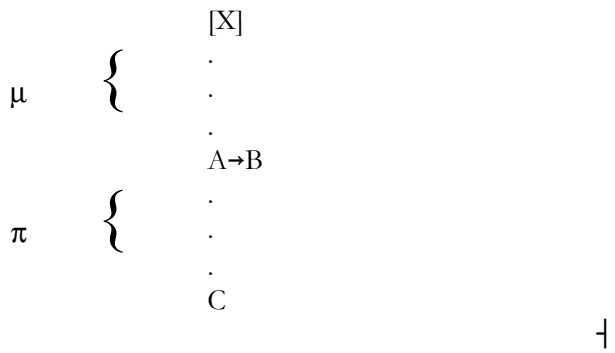
DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $X, A \rightarrow B \vdash_{HS} C$ y $X, A \vdash_{HS} B$. Si, para representar una derivación π en HS de B a partir de $A_1,...,A_n$, usamos la notación

$[A_1]$
.
.
.
$[A_n]$
.
.
.
B

podemos representar las asunciones previas como

[X]	[X]
$[A \rightarrow B]$	[A]

Sea π la derivación de la izquiera y λ la de la derecha. De la segunda hipótesis y el teorema deducción se sigue $X \vdash_{HS} A \rightarrow B$, es decir, la existencia de una derivación de $A \rightarrow B$ a partir de X, llamémosla μ. Usando las derivaciones π y μ se obtiene entonces una derivación de C a partir de X:



Los teoremas 1, 2 y 3 permiten extraer de los sistemas hilbertianos descritos lo que Došen llama *sistemas implicacionales* y que son definiciones recursivas de conjuntos de expresiones de la forma "$X \vdash A$'. Así, el teorema de deducción y su conversa permiten parafrasear A1. $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$ como $A,B \vdash A$. Para A2. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$, su conversión secuencial en la regla $A,A \vdash B \Rightarrow A \vdash B$ viene indicada a continuación:

$\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	A2
$A,A \vdash B$	supuesto
$A \vdash A \rightarrow B$	Teorema 1
$\vdash A \rightarrow (A \rightarrow B)$	Teorema 1
$\vdash A \rightarrow B$	R1
$A \vdash B$	Teorema 2

Usando el mismo procedimiento, y teniendo en cuenta la definición de derivabilidad, los axiomas y reglas restantes transforman en:

A3. $A \vdash B, B \vdash C \Rightarrow A \vdash C$
A4. $A\&B \vdash A$
A5. $A\&B \vdash B$
A6. $A \vdash B, A \vdash C \Rightarrow A \vdash B\&C$
A7. $A \vdash AvB$
A8. $A \vdash BvA$
A9. $A \vdash C, B \vdash C \Rightarrow AvB \vdash C$
A10. $A \vdash B, A \vdash \neg B \Rightarrow \vdash \neg A$
A13. $\neg A, A \vdash B$
A14. $\neg\neg A \vdash A$
A11. $(\forall x)(A(v)) \mid A(t)^{*}$
A12. $A(t) \vdash (\exists v)(A(v)^{*}$
R1. $\vdash A, \vdash (A \rightarrow B) \Rightarrow \vdash B$
R2. $\vdash B, \vdash A(v) \Rightarrow B \vdash (\forall v)(A(v))^{**}$
R3. $A(v) \vdash B \Rightarrow (\exists v)(A(v)) \mid B^{**}$

(*) Donde el término t está libre para la variable v en la fórmula A(v), y A(v) es la fórmula resultante de sustituir simultáneamente cada ocurrencia del término t en A(t) por una ocurrencia de la variable v.
(**) Donde B no contiene ocurrencias libres de la variable v, y A(v) es como en la nota precedente

Se aprecia entonces que en el conjunto del sistema hilbertiano está codificada información de dos tipos: información sobre las características generales y estructurales de la relación de derivabilidad e información sobre las condiciones de introducción y eliminación de símbolos lógicos. Así A3 expresa, via comportamiento derivacional de '→', la transitividad de la relación de derivabilidad, etc. Sin embargo, la información de los dos tipos se encuentra entremezclada en los principios del sistema hilbertiano. Un ejemplo claro lo constituye la regla de *modus ponens*, a la que corresponden de hecho dos reglas secuenciales: ⊢A, ⊢ (A→B) ⇒ ⊢B (eliminación de '→') y ⊢A, A ⊢B ⇒ ⊢B (corte). La primera de estas reglas es operacional y la segunda estructural.

En este orden de cosas, llama la atención la ausencia de una regla de introducción del condicional, que se explica precisamente porque toda la información sobre la derivabilidad se codifica hilbertianamente (al menos en apariencia) como información acerca del condicional. Dicho de otro modo, todos los axiomas tienen la forma de principios de introducción del condicional. Teniendo ésto en cuenta no es extraño que la regla de introducción del condicional aparezca (en la metateoría) bajo la forma del teorema de deducción.

Resumiendo, a partir de los sistemas hilbertianos HM, HI y HC se obtienen -teniendo en cuenta la monotonía que se desprende de la definición misma de la relación de derivabilidad- los sistemas deductivos implicacionales que se describen a continuación.

SIM (sistema implicacional mínimo)

Principios estructurales.

Reflexividad	X,A,B ⊢A
Contracción	X,A,A ⊢B ⇒ X,A ⊢B
Transitividad o Corte	X,A ⊢B, X,B ⊢C ⇒ X,A ⊢C

Principios lógicos.

& eliminación	*X,A&B ⊢A*
& eliminación	X,A&B ⊢B
& introducción	X,A ⊢B, X,A ⊢C ⇒ X,A ⊢B&C
v introducción	X,A ⊢AvB
v introducción	X,A ⊢BvA
v eliminación	X,A ⊢C, X,B ⊢C ⇒ X,AvB ⊢C
¬ introducción	X,A ⊢B, X,A ⊢¬B ⇒ X ⊢¬A
∀ eliminación	X,(∀x)(A(v))|A(t)*
∀ introducción	X,B ⊢A(v) ⇒ X,B ⊢(∀v)(A(v))**
∃ introducción	X,A(t) ⊢(∃v)(A(v)*
∃ eliminación	A(v) ⊢B ⇒ (∃v)(A(v))|B**
→ introducción	X,A ⊢B ⇒ X ⊢A→B
→ eliminación	X ⊢A, X, ⊢(A→B) ⇒ X ⊢B

(*) Donde el término t está libre para la variable v en la fórmula A(v), y A(v) es la fórmula resultante de sustituir simultáneamente cada ocurrencia del término t en A(t) por una ocurrencia de la variable v.

(**) Donde B y las fórmulas de X no contienen ocurrencias libres de la variable v, y A(v) es como en la nota precedente.

SII (sistema implicacional intuicionista)

SM +

¬ eliminación X,A,¬A ⊢B

SIC (sistema implicacional clásico)

SI +

¬ eliminación' *X,¬¬A ⊢A*

TEOREMAS DEL FRAGMENTO POSITIVO.

Dados dos sistemas deductivos S_0=<F, $\vdash_0$> y S_1=<F, $\vdash_1$> diremos que S_1 es una extensión de S_0 (S_0 es una restricción de S_1) syss (1) F es un sublenguaje de F', y (2) para cualquier conjunto de fórmulas X⊆F, {A/X $\vdash_0$A}⊆{A/X $\vdash_1$A}∩F_0. Si además se cumple {A/X $\vdash_0$A}={A/X $\vdash_1$A}∩F_0, se dice que S_1 es una extensión conservadora de S_0.

En esta sección y la siguiente se comparan los sistemas deductivos HM, HI y HC con la correspondiente restricción al fragmento positivo de $\mathcal{P}$, es decir, al prolenguaje resultante de suprimir el negador. La operación de consecuencia de esa restricción, llamémosla HP, queda definida (*à la* Hilbert) por los axiomas A1-A9, A11 y A12 y las reglas de prueba R1-R3. A este respecto, se establecen los siguientes resultados:
(1) HM y HI son extensiones conservadoras de HP, pero
(2) HC no es una extensión conservadora de HP.

Si F es el conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$, sea F^+ el conjunto de las fórmulas de su fragmento positivo. Asimismo, 'HP' designará a la axiomatización del fragmento positivo resultante de eliminar el axioma A10 de HM.

Para toda fórmula A, sea at(A) el conjunto de sus subfórmulas atómicas y , como de costumbre, sea &at(A) la conjunción de las fórmulas de at(A). Por tanto, si A es $\neg\neg p^0 \rightarrow ((q^0 \vee \neg p^0) \rightarrow \neg\neg p^0)$, at(A)={$p^0$,$q^0$} y &at(A) =($p^0$&$q^0$).

La *clausura universal* de una fbf A con ocurrencias libres de las variables $x_1,...,x_n$ y sólo de esas variables es la fórmula $(\forall x_1)...(\forall x_n)$A.

Si X es un conjunto finito de fórmulas y C es la clausura universal de &X, la función t_X:F→F se define recursivamente como sigue:

1) t_X(A)=A si c(A)=0;
2) t_X(A&B)= t_X(A)& t_X(B);
3) t_X(AvB)= t_X(A)v t_X(B);
4) t_X(A→B)= t_X(A)→ t_X(B);
5) t_X(¬A)= t_X(A)→t_X(C);
6) t_X((∀v)A)=(∀v) t_X(A);
7) t_X ((∃v)A)=(∃v) t_X(A).

Ahora podemos enunciar:

LEMA 1. Para cualquier conjunto finito de fórmulas X, si A es una fórmula de F^+ (por tanto es una fórmula sin ocurrencias del negador) y at(A)⊆X entonces $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X→A, donde $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$& X es la clausura universal de &X.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre c(A). Si c(A)=0, *A es una fórmula atómica* y &X puede representarse como A&B; en tal caso por A4 $\vdash_{HI+}$A&B→A, y por aplicación reiterada de A11, $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X→A. Sea pues c(A)=k+1 y supóngase que el lema vale para fórmulas de complejidad ≤k. Si A *es la conjunción* A=B&C, la hipótesis de inducción proporciona $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X→B y $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X → C; A6 y dos aplicaciones de R1 llevan entonces a $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X→B&C. Si A *es la disyunción* A=BvC, por hipótesis de inducción $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X→B, y entonces A3, A7 y sendas aplicaciones de R1 permiten concluir $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X→BvC. Si A *es de la forma* A=B→C, por hipótesis de inducción $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X→B. En ese caso los axiomas A3, A1 y dos aplicaciones de R1 llevan a $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X→(B→C). Considérense finalmente los casos cuantificacionales. Si A *es la fórmula* (∃v)(B), por hipótesis de inducción $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X→B(v) y por A12 $\vdash_{HI+}$B(v)→(∃v)B. Usando entonces A3 y R1 se concluye $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X→(∃v)B(v). Si A tiene la forma (∀v)(B), por hipótesis de inducción $_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X→B(v) y por R2, puesto que el antecedente de esta fórmula no contiene ocurrencias libres de las variables $x_1,\ldots,x_n$, se concluye $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$&X→(∀v)B(v). ⊣

Si π es una demostración en HI, neg(π) es el número de aplicaciones de los axiomas de negación A10 y A13 en π. Está claro entonces que si neg(π)=0, π es al mismo tiempo una demostración en HI^+.

LEMA 2. Si π es una demostración en HI de la fórmula A entonces para todo conjunto finito de fórmulas X cerrado bajo subfórmulas atómicas y tal que at(A)⊆X, hay una demostración en HI μ de $t_X(A)$ y o bien neg(μ)=0 o bien neg(μ)<neg(π).

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre la longitud n de la demostración π de A en HI. Si n=0, A es un axioma de HI. Para los axiomas distintos de A10 y A13 la demostración no ofrece especial dificultad. Para A10, se tiene $(t_X(A)\rightarrow t_X(B))\&(t_X(A)\rightarrow(t_X(B)\rightarrow C))\rightarrow(t_X(A)\rightarrow C)$, que el lector paciente puede comprobar es demostrable en HP. Para A13, la traducción para un conjunto de fórmulas X es $t_X(\neg A\rightarrow(A\rightarrow B))=(t_X(A)\rightarrow t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X))\rightarrow(t_X(A)\rightarrow t_X(B))$. Por el lema 1, si $at(t_XB)\subseteq X$, entonces $\vdash_{HI^+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow t_X(B)$. Como $at(t_X(B))=at(B)\cup at(X)$, basta con que X sea cerrado bajo subfórmulas atómicas para que se cumpla $at(t_XB)\subseteq X$ y así $\vdash_{HI^+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow t_X(B)$. Por el axioma A3 $(t_X(A)\rightarrow t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X))\rightarrow((t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X)\rightarrow t_X(B))\rightarrow(t_X(A)\rightarrow t_X(B)))$. Por R1, de la hipótesis $t_X(A)\rightarrow t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X)$ se sigue $((t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X)\rightarrow t_X(B))\rightarrow(t_X(A)\rightarrow t_X(B)))$. Por el lema 1, $((t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X)\rightarrow t_X(B))$ y entonces de nuevo por R1, $(t_X(A)\rightarrow t_X(B))$. Adviértase que la derivación depende de la hipótesis $t_X(A)\rightarrow t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X)$. Por consiguiente, una aplicación del teorema de deducción lleva a concluir $(t_X(A)\rightarrow t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X))\rightarrow(t_X(A)\rightarrow t_X(B))$. Para n=k+1, los casos de R2 y R3 tampoco ofrecen dificultad. En cuanto a R1, por la hipótesis de inducción $t_X(B\rightarrow A)=t_X(B)\rightarrow t_X(A)$ y $t_X(B)$ son demostrables en HP, y, por *modus ponens*, se sigue entonces que también lo es $t_X(A)$. ⊣

COROLARIO 3. Si A es una fórmula positiva (es decir, sin ocurrencias del negador), entonces si $\vdash_{HI}A$ entonces $\vdash_{HP}A$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, ya que si $A\subseteq F^+$ entonces $t_X(A)=A$. ⊣

COROLARIO 4. Si A es una fórmula positiva (esto es, sin ocurrencias del negador), entonces si $\vdash_{HM}A$ entonces $\vdash_{HP}A$.

DEMOSTRACIÓN. Trivial, ya que si $\vdash_{HM}A$ entonces $\vdash_{HI}A$. ⊣

EL MÉTODO DE MATRICES.

El razonamiento desarrollado para mostrar que HI es una extensión conservadora del fragmento positivo, no puede extenderse a HC. La dificultad radica en que, en general, la traducción de A14 $\neg\neg A\rightarrow A$ via un conjunto X de fórmulas será de la forma $((A\rightarrow B)\rightarrow B)\rightarrow A$, que no es la de un esquema teoremático de HI ni aún cuando $\vdash B\rightarrow A$.

Para demostrar que HC no es una extensión conservadora del fragmento positivo basta con encontrar una fórmula de $\mathcal{P}$, sin ocurrencias del negador, que sea una teorema de HC pero no de HP. Para ello usaremos la fórmula $((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$[8].

Para demostrar que esa fórmula es un teorema de HC demostramos primero:

[**L3**] $A\rightarrow B,\neg B\vdash_{HM}\neg A$

$A\rightarrow B$	Hip.
$(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow(A\rightarrow B))$	A1
$(\neg B\rightarrow(A\rightarrow B))$	R1
$(\neg B\rightarrow(A\rightarrow B))\rightarrow((\neg B\rightarrow(A\rightarrow\neg B))\rightarrow(\neg B\rightarrow((A\rightarrow B)\&(A\rightarrow\neg B))))$	A6
$((\neg B\rightarrow(A\rightarrow\neg B))\rightarrow(\neg B\rightarrow((A\rightarrow B)\&(A\rightarrow\neg B))))$	R1
$\neg B\rightarrow(A\rightarrow\neg B)$	A1
$\neg B\rightarrow((A\rightarrow B)\&(A\rightarrow\neg B))$	R1

[8] Hablando con propiedad, '$((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$' no es una fórmula de $\mathcal{P}$, a diferencia de, por ejemplo, '$((p^0\rightarrow q^0)\rightarrow p^0)\rightarrow p^0$'. Por comodidad en lo que sigue se omiten los superíndices. El esquema $((A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow A$ es conocido como *ley de Peirce*.

¬B	Hip.
(A→B)&(A→¬B)	R1
((A→B)&(A→¬B))→¬A	A10
¬A	R1

A partir de aquí, aplicando el teorema de deducción, se concluye:

[**L4**] A→B ├HM¬B→¬A

[**L5**] A,B ├$_{HM}$A&B [Adjunción]

A→(B→A)	A1
A	Hip.
B→A	R1
(B→A)→((B→B)→(B→(A&B)))	A6
((B→B)→(B→(A&B)))	R1
B→(B→B)	A1
(B→(B→B))→(B→B)	A2
B→B	R1
B→(A&B)	R1
B	Hip.
A&B	R1

[**T1**] (p→q)→p ├$_{HC}$p

(p→q)→p	Hipót.
¬p→¬(p→q)	L4
¬p→(p→q)	A13
(¬p→(p→q))&(¬p→¬(p→q))	L5
((¬p→(p→q))&(¬p→¬(p→q)))→¬¬p	A10
¬¬p	R1
¬¬p→p	A14
p	R1

Una nueva aplicación del teorema de deducción establece entonces ((p→q)→p)→p.

Para demostrar que ((p→q)→p)→p no es un teorema de HP introducimos la noción de matriz. Un *álgebra* es un triplo <A,<f_i>$_{i\in I}$>, donde A es un conjunto no vacío y los f_i son operaciones sobre A de distintas ariedades, $\alpha(f_i)$. α es entonces el tipo o signatura de ese álgebra. El prolenguaje $\mathcal{P}$ puede verse como un álgebra <F,<¬,&,v,→>>, de tipo α, α(¬)=1, α(&)=α(v)= α(→)=2, o, si se prefiere, <1,2,2,2>. Una *matriz* para $\mathcal{P}$ es entonces un triplo M=<**A,**,<f_i>$_{i0I}$,D>, donde <**A**,<f_i>$_{i0I}$> es un álgebra del mismo tipo que $\mathcal{P}$ y D⊆A recibe el nombre de *conjunto de valores designados* de M. Para establecer una correspondencia entre el prolenguaje $\mathcal{P}$ y la matriz M se recurre a homomorfismos de $\mathcal{P}$ en M; es decir a aplicaciones h:F→**A** tales que

1. h(¬(A))=f_1(h(A)),
2. h(A&B)=f_2(h(A),h(B)), h(AvB)=f_3(h(A),h(B)) y h(A→B)=f_4(h(A),h(B))

El interés, en tales casos, está en las fórmulas A tales que para cualquier homomorfismo h de $\mathcal{P}$ en M se cumple h(A)∈D.

Para establecer que ((p→q)→p)→p no es un teorema de HP construimos una matriz para el fragmento proposicional positivo de $\mathcal{P}$, es decir, el fragmento resultante de omitir '¬' y los cuantores. A continuación se demuestra que para cualquier homomorfismo h y cualquier fórmula A se cumple que si ├$_{HP}$A entonces h(A)∈D, y sin embargo no sucede lo mismo para la ley de Peirce.

Una matriz para el fragmento proposicional positivo de $\mathcal{P}$.

Sea M=<{0,1,2},<f_i>$_{1\le i\le 3}$,{2}>, donde las operaciones f_i vienen especificadas por las tablas:

f_1(&)	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

f_2(v)	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

f_3(→)	0	1	2
0	2	2	2
1	1	1	2
2	0	1	2

0	0	0	0	0	0	1	2	0	2	2	2
1	0	1	1	1	1	1	2	1	0	2	2
2	0	1	2	2	2	2	2	2	0	1	2

Queda para el lector concienzudo verificar que si $\vdash_{HP}A$ entonces para cualquier homomorfismo h, h(A)=2. Sea finalmente un homomorfismo h tal que h(p)=1 y h(q)=0. En tal caso, $h(((p\to q)\to p)\to p) = f_3(f_3(f_3(h(p),h(q)),h(p)),h(p)) = f_3(f_3(f_3(1,0),1),1) = f_3(f_3(0,1),1) = f_3(2,1) = 1$. Un corolario de estos resultados es que el conjunto de los teoremas de HC no está contenido en el conjunto de los teoremas de HI.

Atendiendo a sus formulaciones hilbertianas, parece que las diferencias entre las lógicas mínima, intuicionista y clásica se refieren exclusivamente a la interpretación del negador (aunque esto es menos claro cuando se adopta A14' como axioma clásico específico). Sin embargo que HC no sea una extensión conservadora del fragmento positivo muestra que ese diagnóstico es superficial. Si la demostración en HC de fórmulas sin ocurrencias del negador requiere el concurso de axiomas de negación, es que en ese sistema deductivo la caracterización del negador afecta, y por tanto determina en parte, la de otros operadores.

DERIVABILIDAD INTUICIONISTA vs. DERIVABILIDAD CLÁSICA.

Es inmediato que si $X\vdash_{HI}A$ entonces $X\vdash_{HC}A$, y acabamos de comprobar que la conversa no se cumple. Sin embargo, es posible encontrar traducciones fiables de la derivabilidad clásica a la derivabilidad intuicionista. Es decir, se trata de encontrar una función $t:F\to F$ tal que $X\vdash_{HC}A$ syss $t(X)\vdash_{HI}t(A)$, donde, si $X=\{B_1,...,B_i\}$, entonces $t(X)=\{t(B_1),...,t(B_i)\}$. La doble negación proporciona justamente una traducción fiable de la derivabilidad clásica a la derivabilidad intuicionista para el fragmento proposicional-es decir, elíminense los cuantores y tómese $t(A)=\neg\neg A$.

TEOREMA 4 (T. DE GLIVENKO). Para cualesquiera $X\subseteq F$ y $A\in F$, $X\vdash_{HC}A$ syss $\neg\neg(X)|_{HI}\neg\neg A$.
DEMOSTRACIÓN. Demostramos primero que si $\neg\neg(X)|_{HI}\neg\neg A$ entonces $X\vdash_{HC}A$. Asumiendo que $X=\{B_1,...,B_i\}$, la correspondiente derivación intuicionista puede representarse así:

$$\begin{array}{l}\neg\neg B_1\\ .\\ .\\ .\\ \neg\neg B_i\\ \pi\ \left\{\begin{array}{l}.\\.\\.\end{array}\right.\\ \neg\neg A\end{array}$$

El primer paso es demostrar

$$[\mathbf{L6}]\ |_{HI}(A\to\neg\neg A).$$

$\neg A\to(A\to\neg\neg A)$	A13
$A\to(\neg A\to\neg\neg A)$	L2
$(\neg A\to(\neg A\to\neg A))$	A1
$(\neg A\to(\neg A\to\neg A))\to(\neg A\to\neg A)$	A2
$\neg A\to\neg A$	R1
$(\neg A\to\neg A)\to(A\to(\neg A\to\neg A))$	A1
$A\to(\neg A\to\neg A)$	R1
$(A\to(\neg A\to\neg A))\to((A\to(\neg A\to\neg\neg A))\to(A\to((\neg A\to\neg A)\&(\neg A\to\neg\neg A))))$	A6
$(A\to(\neg A\to\neg\neg A))\to(A\to((\neg A\to\neg A)\&(\neg A\to\neg\neg A)))$	R1
$A\to((\neg A\to\neg A)\&(\neg A\to\neg\neg A))$	R1

$((\neg A\rightarrow\neg A)\&(\neg A\rightarrow\neg\neg A))\rightarrow\neg\neg A$	A10
$(A\rightarrow((\neg A\rightarrow\neg A)\&(\neg A\rightarrow\neg\neg A)))\rightarrow((((\neg A\rightarrow\neg A)\&(\neg A\rightarrow\neg\neg A))\rightarrow\neg\neg A)\rightarrow(A\rightarrow\neg\neg A))$	A3
$(((\neg A\rightarrow\neg A)\&(\neg A\rightarrow\neg\neg A))\rightarrow\neg\neg A)\rightarrow(A\rightarrow\neg\neg A)$	R1
$(A\rightarrow\neg\neg A)$	R1

A partir de la derivación intuicionista inicial se obtiene entonces la siguiente derivación clásica:

		B_1
		.
		.
		.
		B_i
L6	{	.
		.
		.
		$\neg\neg B_1$
		.
		.
		.
		$\neg\neg B_i$
		.
π	{	.
		.
		$\neg\neg A$
A14		$\neg\neg A\rightarrow A$
R1		A

Para la conversa, si $X\vdash_{HC}A$ entonces $\neg\neg(X)\vdash_{HI}\neg\neg A$, se procede por inducción sobre la longitud n de la derivación clásica de A a partir de X. Si n=1, A es un axioma o un elemento de X. En el segundo caso, basta con observar que $\neg\neg A\vdash_{HI}\neg\neg A$. Si A es uno de los axiomas comunes (A1-A10 y A13), basta con emplear L4 y R1. Supóngase, por tanto, que A es un axioma en virtud del esquema A14, $\neg\neg B\rightarrow B$; habrá que demostrar entonces que $\vdash_{HI}\neg\neg(\neg\neg B\rightarrow B)$.

$A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$	A1
$(A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A))\rightarrow(\neg(\neg\neg A\rightarrow A)\rightarrow\neg A)$	L4,TD
$\neg(\neg\neg A\rightarrow A)\rightarrow\neg A$	R1
$\neg\neg A\rightarrow(\neg A\rightarrow A)$	A13
$(\neg\neg A\rightarrow(\neg A\rightarrow A))\rightarrow(\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A))$	L2
$\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$	R1
$(\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A))\rightarrow(\neg(\neg\neg A\rightarrow A)\rightarrow\neg\neg A)$	L4,TD
$\neg(\neg\neg A\rightarrow A)\rightarrow\neg\neg A)$	R1
$\neg(\neg\neg A\rightarrow A)\rightarrow\neg A)\&\neg(\neg\neg A\rightarrow A)\rightarrow\neg\neg A)$	L3
$(\neg(\neg\neg A\rightarrow A)\rightarrow\neg A)\&\neg(\neg\neg A\rightarrow A)\rightarrow\neg\neg A))\rightarrow\neg\neg(\neg\neg A\rightarrow A)$	A10
$\neg\neg(\neg\neg A\rightarrow A)$	R1

Asúmase entonces que el teorema vale para $n\leq k$. Sea π una derivación clásica de longitud k+1 de A a partir de X; hay que considerar tres casos, correspondientes a la regla R1. Si π es de la forma

.
.
.
$B\rightarrow A$
B

A R1

y puesto que la longitud de las subderivaciones (clásicas) de B→A y A es ≤k, se sigue de la hipótesis de inducción la existencia de sendas derivaciones intuicionistas de ¬¬(B→A) y ¬¬A. Para demostrar ¬¬(A→B)→(¬¬A→¬¬B), establecemos primero

[**L7**] $\vdash_{HI}\neg\neg B\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A))$

$\neg A,B\rightarrow A\vdash_{HI}\neg A\rightarrow\neg B$	L4
$\neg A,B\rightarrow A\vdash_{HI}\neg B$	R1
$\neg A\vdash_{HI}(B\rightarrow A)\rightarrow\neg B$	R1,TD
$\vdash_{HI}((B\rightarrow A)\rightarrow\neg B)\rightarrow(\neg\neg B\rightarrow\neg(B\rightarrow A))$	L4,TD
$\neg A\vdash_{HI}\neg\neg B\rightarrow\neg(B\rightarrow A)$	R1
$\neg A,\neg\neg B\vdash_{HI}5(B\rightarrow A)$	LEMA 2
$\neg\neg B\vdash_{HI}\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A)$	TD
$\vdash_{HI}\neg\neg B\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A))$	TD

[**L8**] $\neg\neg(B\rightarrow A),\neg\neg B\vdash_{HI}\neg\neg A$

$\neg\neg(B\rightarrow A)$	Hip.
$\neg\neg(B\rightarrow A)\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg\neg(B\rightarrow A))$	A1
$\neg A\rightarrow\neg\neg(B\rightarrow A)$	R1
$\neg\neg B$	Hip.
$\neg\neg B\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A))$	L7
$\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A)$	R1
$(\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A))\&(\neg A\rightarrow\neg\neg(B\rightarrow A))$	L5
$((\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A))\&(\neg A\rightarrow\neg\neg(B\rightarrow A)))\rightarrow\neg\neg A$	A10
$\neg\neg A$	R1

Dos aplicaciones del teorema de deducción llevan entonces a

[**L9**]$|_{HI}$ $\neg\neg(B\rightarrow A)\rightarrow(\neg\neg B\rightarrow\neg\neg A)$

y, por *modus ponens* a partir de la hipótesis de inducción, $X\vdash_{HI}\neg\neg A$. ⊣

Para el prolenguaje $\mathcal{P}$, la función t que se define a continuación proporciona una traducción fiable entre derivabilidad clásica y la intuicionista.

t(A)=¬¬ A, si c(A)=0,
t(¬A)=¬ t(A),
t(A&B)=t(A)&t(B),
t(A→B)=t(A)→t(B),
t(AvB)=¬¬(t(A)vt(B)),
t((∀v)A)=(∀v)t(A),
t((∃v)A)=¬¬((∃v)tA).

Antes de comprobarlo conviene establecer algunos resultados útiles para simplificar las demostraciones venideras. Una consecuencia casi inmediata que tiene la virtud de acortar apreciablemente las demostraciones es:

[**L10**] $A\rightarrow B,B\rightarrow C\vdash_{HI}A\rightarrow C$

Otro principio útil es la regla de sustitución de equivalentes demostrados, que empleando la abreviatura $A\equiv B=_{def.}(A\rightarrow B)\&(B\rightarrow A)$ puede formularse así:

[EQ] Si $\vdash_{HS} A \equiv A'$ y la fórmula B' resulta de la fórmula B al sustituir algunas ocurrencias de A en B por ocurrencias de A', entonces $\vdash_{HS} B \equiv B'$.

TEOREMA 5. HC es cerrado bajo la regla [EQ].

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre c(B). Si c(B)=0 y A≠B, B=B', y si A=B entonces A'=B' y el resultado se sigue directamente de la hipótesis del teorema. Sea pues c(B)=k+1. Si B=C&D, (C&D)'=C'&D'. En tal caso,

C&D→C	A4
C→C'	Hip.ind.
C&D→C'	L10
(C&D→C')→((C&D→D')→(C&D→C'&D'))	A6
((C&D→D')→(C&D→C'&D'))	R1
C&D→D	A5
D→D'	Hip.ind.
C&D→D'	L10
C&D→C'&D'	R1

La conversa, C'&D'→C&D, se demuestra *mutatis mutandis* del mismo modo. Como esto sucede con todos los casos restantes, en cada uno de ellos me limitaré a considerar uno de los sentidos de la equivalencia, quedando la demostración del otro para el lector. Si B=CvD, (CvD)'=C'vD', y entonces

C'→C'vD'	A7
C→C'	hip.ind.
C→C'vD'	L10
(C→C'vD')→((D→C'vD')→(CvD→C'vD'))	A9
((D→C'vD')→(CvD→C'vD'))	R1
D'→C'vD'	A8
D→D'	hip.ind.
D→C'vD'	L10
CvD→C'vD'	R1

Sea entonces B=C→D, de manera que (C→D)'=C'→D'.

C→D	hip.
C'→C	hip.ind.
C'→D	L10
D→D'	hip.ind.
C'→D'	L10
(C→D)→(C'→D')	TD

Si B=¬C, (¬C)'= ¬(C').

C'→C	hip.ind.
¬C	hip.
¬C'	L3
¬C→¬C'	TD

Para B=(∀v)C(v), ((∀v)C(v))'=(∀v)(C(v))', y por consiguiente

(∀v)C(v)→C(v)	A11
C(v)→C(v)	Hip.ind.
(∀v)C(v)→C(v)'	L10
(∀v)C(v)→(∀v)C(v')	R2

Finalmente, si B=(∃v)C(v), y por tanto ((∃v)C(v))'=(∃v)(C(v))',

C(v)'→(∃v)(C(v))'	A12
C(v)→C(v)'	Hip.ind
C(v)→(∃v)(C(v))'	L10
(∃v)C(v)→(∃v)C(v))'	R3.

⊣

Supóngase a continuación que $t(X) \vdash_{HI} t(A)$. En ese caso $t(X) \vdash_{HC} t(A)$, y como puede comprobarse fácilmente que, para cualquier fórmula B, $\vdash_{HC} B \equiv t(B)$, por [EQ] se sigue $X \vdash_{HC} A$.

Para la conversa se precisa un nuevo resultado auxiliar:

LEMA 3. Para toda fórmula A de $\mathcal{P}$, $\vdash_{HI} \neg\neg t(A) \rightarrow t(A)$.
DEMOSTRACIÓN. Como de costumbre por inducción sobre c(A). Si c(A)=0, por el teorema de Glivenko $\vdash HI \neg\neg(\neg\neg A \rightarrow A)$; úsense entonces L8 y R1 para llegar a $\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$. Sea pues c(A)=k+1. Hay que considerar seis subcasos.
(1) A=¬B.

tB→¬¬tB	L6
¬¬¬tB→(tB→¬¬¬tB)	A1
¬¬¬tB	hip.
(tB→¬¬¬tB)	R1
(tB→¬¬tB)&(tB→¬¬¬tB)	L5
(tB→¬¬tB)&(tB→¬¬¬tB)→¬tB	A10
¬tB	R1
¬¬¬tB→¬tB	TD

(2) A=B&C:

tB&tC→tB	A4
¬tB→¬(tB&tC)	L4
¬¬(tB&tC)→¬¬tB	L4
¬¬tB→tB	hip.ind.
¬¬(tB&tC)→tB	L10
(¬¬(tB&tC)→tB)→((¬¬(tB&tC)→tC))→(¬¬(tB&tC)→tB&tC))	A6
(¬¬(tB&tC)→tC)→(¬¬(tB&tC)→tB&tC	R1
tB&tC→tC	A4
¬tC→¬(tB&tC)	L4
¬¬(tB&tC)→¬¬tC	L4
¬¬tC→tC	hip.ind.
¬¬(tB&tC)→tC	L10
¬¬(tB&tC)→(tB&tC)	R1

(3) A=BvC:
hay que demostrar ¬¬¬¬(tBvtC)→¬¬(tBvtC); procédase como en la base.
(4) A=B→C:

¬¬(tB→tC)→(¬¬tB→¬¬C)	L9
¬¬(tB→tC)	hip.
¬¬tB→¬¬tC	R1
tB→¬¬tB	L6
tB→¬¬tC	L10
¬¬tC→tC	hip.ind.
tB→tC	L10
¬¬(tB→tC)→(tB→tC)	TD

(5) A=(∃v)B(v):
hay que demostrar ¬¬¬¬(∃v)tB(v)→¬¬(∃v)tB(v); procédase por consiguiente como en la base y el subcaso de la disyunción.
(6) A=(∀v)B(v):

(∀v)tB(v)→tB(v)	A11
¬tB(v)→¬(∀v)tB(v)	L4
¬¬(∀v)tB(v)→¬¬tB(v)	L4
¬¬(∀v)tB(v)→(∀v)¬¬ tB(v)	R2
(∀v)¬¬tB(v)→¬¬tB(v)	A11
¬¬(∀v)tB(v)→¬¬tB(v)	L10
¬¬tB(v)→tB(v)	hip.ind.
¬¬(∀v)tB(v)→tB(v)	L10
¬¬(∀v)tB(v)→(∀v)tB(v)	R2

Ahora estamos en disposición de demostrar:

TEOREMA 6. $X \vdash_{HC} A$ syss $t(X) \vdash_{HI} tA$.

DEMOSTRACIÓN. Sólo falta por demostrarlo de izquierda a derecha. La demostración se efectúa por inducción sobre la longitud de la derivación clásica de A a partir de X. Si $A \in X$ o si A es uno de los axiomas A1-A6, A10, A11 o A13 la demostración es inmediata. Para los restantes axiomas, el razonamiento es el siguiente.

A7:

$tA \rightarrow tAvtB$	A7
$tAvtB \rightarrow \neg\neg(tAvtB)$	L6
$tA \rightarrow \neg\neg(tAvtB)$	L10

Obviamente, A8 se trata del mismo modo.

A9:

$(tA \rightarrow tC) \rightarrow ((tB \rightarrow tC) \rightarrow (tAvtB \rightarrow tC))$	A9
$(tAvtB \rightarrow tC) \rightarrow (\neg tC \rightarrow \neg(tAvtB))$	L4
$(\neg tC \rightarrow \neg(tAvtB)) \rightarrow (\neg\neg(tAvtB) \rightarrow \neg\neg tC)$	L4
$(tAvtB \rightarrow tC) \rightarrow (\neg\neg(tAvtB) \rightarrow \neg\neg tC)$	L10
$tA \rightarrow tC$	hip.
$(tB \rightarrow tC) \rightarrow (tAvtB \rightarrow tC)$	R1
$(tB \rightarrow tC) \rightarrow (\neg\neg(tAvtB) \rightarrow \neg\neg tC)$	L10
$\neg\neg tC \rightarrow tC$	hip.ind.
$tB \rightarrow tC$	hip.
$\neg\neg(tAvtB) \rightarrow \neg\neg tC$	R1
$\neg\neg(tAvtB) \rightarrow tC$	L10
$(tB \rightarrow tC) \rightarrow (\neg\neg(tAvtB) \rightarrow tC)$	TD
$(tA \rightarrow tC) \rightarrow ((tB \rightarrow tC) \rightarrow (\neg\neg(tAvtB) \rightarrow tC))$	TD

A12:

$t(A(s)) \rightarrow (\exists v)t(A(v))$	A12
$(\exists v)t(A(v)) \rightarrow \neg\neg(\exists v)t(A(v))$	L6
$t(A(s)) \rightarrow \neg\neg(\exists v)t(A(v))$	L10

A14:

Por el lema 2, $\neg\neg t(A) \rightarrow t(A)$.

Supóngase a continuación que la longitud de la derivación clásica de A fuese k+1. Hay que considerar tantos subcasos como reglas de prueba.

Para R1 y R2 aplíquese la regla correspondiente a la fórmula o fórmulas resultantes de la hipótesis inductiva. Para la regla restante, demostramos primero:

[**L11**] $(\forall v)(\neg A(v)) \rightarrow \neg(\exists v)A(v))$

$\neg A(t) \rightarrow (A(t) \rightarrow B)$	A13
$(\forall v)\neg A(v) \rightarrow \neg A(t)$	A11
$(\forall v)\neg A(v) \rightarrow (A(t) \rightarrow B)$	L10
$A(t) \rightarrow ((\forall v)\neg A(v) \rightarrow B)$	L6,R1
$(\exists v)A(v) \rightarrow ((\forall v)\neg A(v) \rightarrow B)$	R3
$(\forall v)\neg A(v) \rightarrow ((\exists v)A(v) \rightarrow B)$	L6,R1
$\neg A(t) \rightarrow (A(t) \rightarrow \neg B)$	A13
$(\forall v)\neg A(v) \rightarrow \neg A(t)$	A11
$(\forall v)\neg A(v) \rightarrow (A(t) \rightarrow \neg B)$	L10
$A(t) \rightarrow ((\forall v)\neg A(v) \rightarrow \neg B)$	L6,R1
$(\exists v)A(v) \rightarrow ((\forall v)\neg A(v) \rightarrow \neg B)$	R3
$(\forall v)\neg A(v) \rightarrow ((\exists v)A(v) \rightarrow \neg B)$	L6,R1
$(\forall v)\neg A(v)$	hip.

$(\exists v)A(v)\rightarrow B$	R1
$(\exists v)A(v)\rightarrow \neg B$	R1
$((\exists v)A(v)\rightarrow B)\&((\exists v)A(v)\rightarrow \neg B)$	L5
$((\exists v)A(v)\rightarrow B)\&((\exists v)A(v)\rightarrow \neg B)\rightarrow \neg(\exists v)A(v)$	A10
$\neg(\exists v)A(v)$	R1
$(\forall v)\neg A(v)\rightarrow \neg(\exists v)A(v)$	td

Entonces se tiene el siguiente razonamiento:
R3:

$t(A(v))\rightarrow t(B)$	hip.ind.
$\neg t(B)\rightarrow \neg t(A(v))$	L4
$\neg t(B)\rightarrow (\forall v)\neg t(A(v))$	R2
$(\forall v)\neg t(A(v))\rightarrow \neg(\exists v)A(v)$	L11
$\neg\neg(\exists v)A(v)\rightarrow \neg\neg t(B)$	L4
$\neg\neg t(B)\rightarrow t(B)$	Lema 2
$\neg\neg(\exists v)A(v)\rightarrow t(B)$	L10

EJERCICIOS

(1) Demostrar (a) $\vdash_{HC}(p\rightarrow q)v(q\rightarrow p)$, (b) que esa fórmula no es un teorema de HP, (c) $\nvdash_{HC}((\exists v)A(v)\rightarrow t(B)x)(P^1x\rightarrow(\forall y)(P^1y))$.
(2) Demostrar, empleando el método de matrices, que A3 es independiente de los restantes axiomas de HM -es decir, que no es derivable de ellos.
(3) Demostrar que HC y HC' son equivalentes; es decir, para cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, $\vdash_{HC}A$ syss $\vdash_{HC'}A$.
(4) Demostrar que las relaciones de consecuencia de HM, HI y HC son estándar.
(5) La lógica de Rasiowa con seminegación queda definida por el sistema hilbertiano HR que resulta de incorporar a HP el axioma A15 $\neg(A\rightarrow A)\rightarrow B$ y la regla R3. $A\rightarrow B, B\rightarrow A \vdash \neg A\rightarrow\neg B$. Compárese HR con HM y HI, determinando las correspondientes relaciones de inclusión.
(5) Demostrar que la función s definida por:

$s(A)=\neg A$ si $c(A)=0$,
$s(\neg A)=\neg s(A)$,
$s(A\&B)=s(A)\&s(B)$,
$s(AvB)=a(A)vs(B)$,
$s(A\rightarrow B)=s(A)\rightarrow s(B)$,
$s((\exists v)A)=(\exists v)s(A)$,
$s((\forall v)A)=(\forall v)s(A)$.

proporciona una traducción apropiada entre la derivabilidad intuicionista y la derivabilidad mínima.

CAPÍTULO 3. CÁLCULOS DE SECUENTES CON REGLA DE CORTE

> El nuevo experimento ha probado, una vez más, que el chimpancé puede aplicar con corrección unas elementales reglas sintácticas, y que conecta adecuadamente la aplicación de estas reglas con la obtención de ciertas recompensas.
>
> J.Hierro, *Principios de Filosofía del Lenguaje*.

NOCIÓN DE SECUENTE

Los cálculos de secuentes para las lógicas mínima, intuicionista y clásica que se describen en este capítulo comparten con los sistemas hilbertianos del capítulo anterior, como primer componente, el prolenguaje $\mathcal{P}$.

Un *secuente de* $\mathcal{P}$ es un triplo $\langle X,\Vdash,Y\rangle$ formado por dos secuencias finitas de fórmulas de $\mathcal{P}$, X e Y, y un signo metalingüístico, '$\Vdash$', llamado «separador de secuente». En lo sucesivo escribiremos 'X$\Vdash$Y' por '$\langle X,\Vdash,Y\rangle$'. Una segunda convención notacional es que escribiremos 'X,A,B,X'$\Vdash$Y' por 'X"$\Vdash$Y', donde X" es la secuencia de fórmulas de $\mathcal{P}$ obtenida enumerando X, a continuación las fórmulas A y B, y finalmente X'. Análogamente, escribiremos 'X$\Vdash$Y,A,B,Y´' por 'X$\Vdash$Y``', donde Y" resulta de Y,A,B,Y` del modo descrito. En el secuente 'X$\Vdash$Y', la secuencia X es la parte *antecedente* e Y la parte *consecuente*.

La estrategia para la definición de relaciones de consecuencia sobre $\mathcal{P}$ propia del cálculo de secuentes es, esquemáticamente, la siguiente:

1/ Se define recursivamente un conjunto de secuentes de $\mathcal{P}$ - los secuentes demostrables. Este primer paso puede verse asimismo como la definición de una pseudorrelación de consecuencia, o de una relación de consecuencia de Scott, $\Vdash \subseteq Sb(\mathcal{P})^2$:: $\langle X,Y\rangle \in \Vdash$ syss el secuente X$\Vdash$Y es demostrable.

2/ Defínase a continuación, para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, X$\vdash$A (A se sigue del conjunto X) syss para algún secuencia finita Y de elementos de X, el secuente Y$\Vdash$A es demostrable.

SECUENTES DEMOSTRABLES EN LAS LÓGICAS MÍNIMA, INTUICIONISTA Y CLÁSICA.

Lógica mínima (SM).

➢ Reglas estructurales

Reglas de razonamiento

Axiomas $\quad A\Vdash A \qquad$ Corte $\quad \dfrac{X\Vdash A \quad X,A\Vdash B}{X\Vdash B}$

Reglas de datos

$D\Vdash \ \dfrac{X\Vdash Y}{X,A\Vdash Y} \qquad C\Vdash \ \dfrac{X,A,A\Vdash Y}{X,A\Vdash Y} \qquad P\Vdash \ \dfrac{X,A,B,X'\Vdash Y}{X,B,A,X'\Vdash Y}$

Reglas operacionales

$\Vdash\& \ \dfrac{X\Vdash A \quad X\Vdash B}{X\Vdash A\&B} \qquad \&\Vdash \ \dfrac{X,A\Vdash C}{X,A\&B\Vdash C} \qquad \&\Vdash \ \dfrac{X,B\Vdash C}{X,A\&B\Vdash C}$

$\vee\Vdash \ \dfrac{X,A\Vdash C \quad X,B\Vdash C}{X,A\vee B\Vdash C} \qquad \Vdash\vee \ \dfrac{X\Vdash A}{X\Vdash A\vee B} \qquad \Vdash\vee \ \dfrac{X\Vdash B}{X\Vdash A\vee B}$

$\neg\Vdash \ \dfrac{X\Vdash A}{X,\neg A\Vdash} \qquad \Vdash\neg \ \dfrac{X,A\Vdash}{X\Vdash\neg A}$

$\Vdash\to \ \dfrac{X,A\Vdash B}{X\Vdash A\to B} \qquad \to\Vdash \ \dfrac{X\Vdash A \quad X,B\Vdash C}{X,A\to B\Vdash C}$

$\Vdash\forall^{(*)} \ \dfrac{X\Vdash A}{X\Vdash(\forall v)A} \qquad \forall\Vdash^{(**)} \ \dfrac{X,A[t]\Vdash B}{X,(\forall v)A[v]\Vdash B}$

$$\vdash\exists^{(**)}\ \frac{X\vdash A[t]}{X\vdash(\exists v)A[v]} \qquad \exists\vdash^{(*)}\ \frac{X,A\vdash B}{X,(\exists v)A\vdash B}$$

(*) v no está libre en X, B; se dice que v es la *variable dependiente* de la regla.
(**) t es un término arbitrario de $\wp$.

Al leer las reglas $\&\vdash$, $\vee\vdash$, $\rightarrow\vdash$, $\forall\vdash$ y $\exists\vdash$ ha de tenerse en cuenta que el lado derecho de los secuentes puede ser vacío; además el lado derecho de la premisa derecha de la regla de Corte puede ser vacío y en tal caso también lo será el de la conclusión.

Lógica intuicionista (SI).

El cálculo de secuentes intuicionista, SI, resulta de añadir a SM la regla estructural de datos

$$\vdash D\ \frac{X\vdash}{X\vdash A}$$

Lógica clásica (SC).

El cálculo de secuentes clásico, SC, se obtiene al añadir dos reglas estructurales a SI y generalizar las reglas de éste para permitir la manipulación de secuentes con más de una fórmula en su parte consecuente.

➢ Reglas estructurales

Reglas de razonamiento

Axiomas $A\vdash A$ Corte $\dfrac{X\vdash A \quad X,A\vdash Y}{X\vdash Y}$

Reglas de datos

$D\vdash\ \dfrac{X\vdash Y}{X,A\vdash Y}$ $\vdash D\ \dfrac{X\vdash Y}{X\vdash A,Y}$

$C\vdash\ \dfrac{X,A,A\vdash Y}{X,A\vdash Y}$ $\vdash C\ \dfrac{X\vdash A,A,Y}{X\vdash A,Y}$

$P\vdash\ \dfrac{X,A,B,X'\vdash Y}{X,B,A,X'\vdash Y}$ $\vdash P\ \dfrac{X\vdash Y,A,B,Y'}{X\vdash Y,B,A,Y'}$

Reglas operacionales

$\vdash\&\ \dfrac{X\vdash A,Y \quad X\vdash B,Y}{X\vdash A\&B,Y}$ $\&\vdash\ \dfrac{X,A\vdash Y}{X,A\&B\vdash Y}$ $\&\vdash\ \dfrac{X,B\vdash Y}{X,A\&B\vdash Y}$

$\vee\vdash\ \dfrac{X,A\vdash Y \quad X,B\vdash Y}{X,A\vee B\vdash Y}$ $\vdash\vee\ \dfrac{X\vdash A,Y}{X\vdash A\vee B,Y}$ $\vdash\vee\ \dfrac{X\vdash B,Y}{X\vdash A\vee B,Y}$

$\neg\vdash\ \dfrac{X\vdash A,Y}{X,\neg A\vdash Y}$ $\vdash\neg\ \dfrac{X,A\vdash Y}{X\vdash\neg A,Y}$

$\vdash\rightarrow\ \dfrac{X,A\vdash B,Y}{X\vdash A\rightarrow B,Y}$ $\rightarrow\vdash\ \dfrac{X\vdash A,Y \quad X,B\vdash Y}{X,A\rightarrow B\vdash Y}$

$\vdash\forall^{*}\ \dfrac{X\vdash A,Y}{}$ $\forall\vdash^{**}(\ \dfrac{X,A[t]\vdash Y}{}$

$$\frac{}{X \Vdash (\forall v)A,Y} \qquad\qquad \frac{}{X,(\forall v)A[v] \Vdash Y}$$

$$\Vdash\exists^{**}\ \frac{X \Vdash A[t],Y}{X \Vdash (\exists v)A[v],Y} \qquad\qquad \exists\Vdash^{*}\ \frac{X,A \Vdash Y}{X,(\exists v)A \Vdash Y}$$

(*) v no está libre en X, Y; se dice que v es la *variable dependiente* de la regla.
(**) t es un término arbitrario de $\mathcal{P}$.

OBSERVACIONES.-
[1] Las reglas de cálculo secuencial definen directamente una relación de consecuencia de Scott, e indirectamente, a través de aquella, una relación de consecuencia de Tarski.
[2] Las diferencias entre las nociones de derivabilidad mínima, intuicionista y clásica se refieren fundamentalmente al tipo de objetos sintácticos manipulados. La derivabilidad mínima y la intuicionista se definen por medio de una relación de consecuencia de Scott formada por pares de las formas <X,A> y <X,∅>, donde X es una secuencia finita de fórmulas X y A una fórmula. La derivabilidad clásica, por su parte, se define en términos de una pseudorrelación de consecuencia que trata con pares de secuencias finitas de fórmulas.
[3] Adviértase que lo que diferencia al sistema intuicionista del mínimo es la presencia de la regla de debilitamiento por la izquierda

$$\frac{X \Vdash}{X \Vdash A}$$

que es una regla de datos. Por consiguiente, también en este caso las diferencias entre ambos son cuestión del tipo de estructuras admitidas.
[4] Las reglas de razonamiento expresan propiedades generales de la operación de consecuencia correspondiente: la reflexividad en el caso del esquema axiomático A⊩A y transitividad en el caso de la regla de Corte.
[5] A primera vista puede chocar la consideración del esquema axiomático como una regla. La explicación es que puede ser visto como la conclusión de una regla con un conjunto vacío de premisas; es decir, de la forma

$$\frac{}{A \Vdash A}$$

[6] Las reglas D⊩ y ⊩D reciben el nombre de «debilitamiento del antecedente» y «debilitamiento del consecuente», respectivamente; las reglas C⊩ y ⊩C son reglas de contracción, en el antecedente y en el consecuente, respectivamente; P⊩ y ⊩P son reglas de permutación en el antecedente y en el consecuente.
[7] Para entender el papel de las reglas de datos, se define primero una relación de equivalencia entre secuencias finitas de fórmulas: dos secuencias son equivalentes si toda fórmula que ocurre en una de ellas ocurre en la otra y viceversa. A partir de aquí se define una segunda relación de equivalencia, esta entre secuentes: los secuentes X⊩Y y Z⊩W son equivalentes cuando sus antecedentes son equivalentes entre sí y lo mismo sucede con sus conecuentes.
[8] Las reglas de datos de SM, SI y SC garantizan que si puede obtenerse un secuente Z⊩W a partir de un secuente X⊩Y aplicando reglas del sistema, entonces (a) Z⊩W puede obtenerse a partir de cualquier secuente equivalente a X⊩Y, y (b) cualquier secuente equivalente a Z⊩W puede obtenerse a partir de X⊩Y aplicando las reglas del sistema.
[9] En cuanto a las reglas operacionales, se dividen en reglas de introducción en el antecedente y en el consecuente. Así &⊩ es la regla de introducción del conjuntor en el antecedente y ⊩ la de introducción del conjuntor en el consecuente.
[10] Por lo que respecta a la interpretación de las reglas ∀⊩ y ⊩∃, adviértase que A[v] puede no ser el resultado de sustituir cada ocurrencia de t en A por una ocurrencia de v, es decir, que en A[v] puede haber ocurrencias de t. Por ejemplo, el paso

$$\frac{X \Vdash R^2tt,Y}{X \Vdash (\exists x)R^2xt,Y}$$

es legítimo (cada ocurrencia de 'x' en $(\exists x)R^2xt$ ha sido sustituida por una ocurrencia de 't' en R^2tt).
[11] Pese a lo dicho en la primera de estas observaciones (pero adviértase la presencia del adverbio

'fundamentalmente'), algunas de las diferencias entre SI y SC tienen que ver con las reglas operacionales. Por ejemplo, lo que hace de

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Vdash A}\ \text{axioma}}{\Vdash \neg A, A}\ \Vdash\neg}{\neg\neg A \Vdash A}\ \neg\Vdash$$

una derivación peculiar de de SC, sin parangón en SI, es el uso de la regla $\Vdash\neg$ en su forma clásica,

$$\dfrac{X, A \Vdash Y}{X \Vdash \neg A, Y}$$

que no es aceptable para el intuicionista.

NOCIÓN DE DEMOSTRACIÓN DE UN SECUENTE.

Podría definirse una demostración de un secuente $X \Vdash Y$ en SS (=SM,SI,SC) como una secuencia finita de secuentes $<X_1 \Vdash Y_1,...,X_n \Vdash Y_n>$, adaptando convenientemente la definición de demostración en HS del capítulo 4 y reformulando en el mismo sentido las reglas con dos premisas de SS –por ejemplo., reescribiendo *Corte* como

$$\dfrac{X \Vdash A, Z \qquad Y, A \Vdash W}{X, Y \Vdash Z, W.}$$

Sin embargo en su presentación más frecuente las demostraciones en SS no son secuencias sino árboles.

Un *árbol* es un sistema relacional $T =<B,\{R\},\varnothing>$, $\alpha(R)=2$, en el que se cumplen las condiciones siguientes:

1) R es irreflexiva, antisimétrica e intransitiva,

2) hay un $b \in B$ tal que para todo $a \in B$, (i) no aRb, y (ii) si $a \neq b$, hay $a_1 \in B,...,a_n \in$, bRa_1, $a_1Ra_2,...,a_nRa$ (se dice que b es el origen de T),

3) para cualesquiera a,a' y c de B, si aRc y a'Rc entonces a=a'.

Los elementos de B son entonces *nodos* de T. Si aRa' se dice que el nodo a *precede* al nodo a' o que éste *sucede* a aquél. Si cada nodo del árbol T tiene finitos sucesores, T es *finitamente ramificado*. Si cada nodo de T tiene a lo sumo dos sucesores se dice que T es *binario*, si cada nodo tiene a lo sumo tres sucesores que T es *ternario*, etc. Un nodo sin sucesores es un *nodo terminal*. Para cada $n \in N$, R^n se define inductivamente: (1) aR^1a' syss aRa', (2) $aR^{k+1}a'$ syss hay un nodo a" tal que $aR^ka"$ y $a"R^1a'$. Cuando hay un $n \in N$ tal que aR^na' se dice que el nodo a *domina* al nodo a'.

Usando la terminología que se acaba de introducir, los requisitos 1-3 en la definición de árbol pueden reformularse como sigue:

1) R es irreflexiva, antisimétrica e intransitiva,

2) hay un nodo b (el origen de T) que domina a todos los nodos de T distintos de sí mismo y que no es dominado por ninguno,

3) todo nodo de T, salvo su origen, tiene un único predecesor.

Si $T=\langle B,\{R\},\varnothing\rangle$ es un árbol, una *rama* de T es un $A \subseteq B$ linealmente ordenado por R; la *longitud* de la rama A de T es Card(A).

Una *demostración* de un secuente $X \Vdash Y$ en SS (=SM,SI,SC) es un árbol finito cuyos nodos son secuentes que cum,ple las condiciones:

(1) su origen es el secuente $X \Vdash Y$,

(2) sus nodos terminales son axiomas,

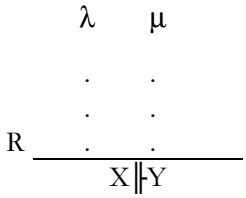
(3) cualquier nodo no terminal resulta de su(s) sucesor(es) al aplicar una regla de SS.

Del formato de las reglas de SM, SI y SC se sigue que una demostración es, en todos estos casos, un árbol binario. Convencionalmente las demostraciones de los sistemas secuenciales se escriben colocando su origen en la parte inferior.

Dada una demostración π en SS (y por tanto un árbol), la *longitud* de π es la mayor de entre las longitudes de sus ramas. Más formalmente, long(π) se define recursivamente:

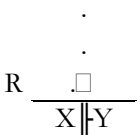
(1) $long(A \Vdash A)=1$,

(2) si π es de la forma



donde R es una regla de SS con dos premisas (Corte, $\Vdash\&,\vee\Vdash\rightarrow\Vdash$) long($\pi$)= máx(long($\lambda$),long($\mu$)) +1;

(3) si π es de la forma

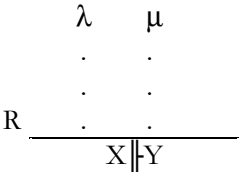


donde R es una regla de SS de una premisa, long(π)=long(λ)+1.

La noción de *altura* de una demostración π, alt(π), es semejante a la de longitud, de la que se diferencia por abstraer de las reglas de datos. Así pues,

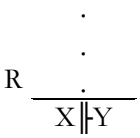
(1) alt(A$\Vdash$A)=1,

(2) si π es de la forma



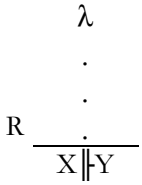
donde R es una regla de SS con dos premisas (Corte, $\Vdash\&,\vee\Vdash\rightarrow\Vdash$), alt($\pi$)=máx(alt($\lambda$),alt($\mu$))+1;

(3) si π es de la forma



donde R es una regla operacional de SS de una premisa, alt(π)=alt(λ)+1.

(4) si π es de la forma



donde R es una regla de datos de SS, alt(π)=alt(λ).

La noción de demostración de *un secuente* en SS no ha de confundirse con la de demostración de *una fórmula*; según lo expuesto en la primera sección de este capítulo, una fórmula A es demostrable en SS ($\vdash_{SS}$A) syss lo es el secuente $\Vdash$A ($\varnothing\Vdash\{A\}$), siendo rigurosos). Por tanto, una demostración de una fórmula A en SS es una demostración de este secuente.

CONVENCIONES SOBRE EL USO DE VARIABLES EN LAS DEMOSTRACIONES.

La manipulación de ocurrencias libres y ligadas de las variables en las demostraciones da lugar a problemas, poco importantes y tediosos, cuya solución precisa es bastante prolija. Para evitarlos se establecen a continuación algunas convenciones, que pueden resumirse en el eslógan *una variable ligada carece de individualidad*. La propuesta es identificar dos fórmulas que difieran únicamente por los «nombres» de sus variables ligadas; por ejemplo, $(\exists y)(\forall x)(R^2_1xy)$ y

$(\exists x)(\forall z)(R^2_1 zx)$. De manera un poco más precisa, se define una relación de equivalencia ~ entre fórmulas:

(1) A~A,

(2) si A~B entonces ¬A~¬B,

(3) si A~B y C~D entonces A&C~B&D, AvC~BvD y A→C~B→D,

(4) si A[v] y B[v'] son fórmulas y w es una variable que no ocurre en ninguna de las dos, si A[w]~B[w] entonces $(\forall x)A[x]\sim(\forall y)B[y]$ y $(\exists x)A[x]\sim(\exists y)B[y]$.

Una consecuencia inmediata de esta definición es que para cualquier fórmula A existe una fórmula B tal que A~B, ninguna variable tiene ocurrencias libres y ligadas en B, y toda variable ligada de B ocurre únicamente dentro del alcance de una misma ocurrencia de un cuantificador.

Se conviene entonces en leer los axiomas y reglas de los sistemas de cálculo de secuentes interpretando las metavariables A,B,etc. por clases de equivalencia de fórmulas módulo ~. Por consiguiente, las reglas

$$\Vdash\forall^{(*)}\ \frac{X\Vdash A,Y}{X\Vdash(\forall v)A,Y}\qquad \exists\Vdash^{(*)}\ \frac{X,A\Vdash Y}{X,(\exists v)A\Vdash Y}$$

pueden transcribirse también, conservando la restricción «v no está libre en X,Y», así:

$$\Vdash\forall^{(*)}\ \frac{X\Vdash A[v],Y}{X\Vdash(\forall w)A[w],Y}\qquad \exists\Vdash^{(*)}\ \frac{X,A[v]\Vdash Y}{X,(\exists w)A[w]\Vdash Y}$$

-es decir,, sin identificar la variable dependiente de la regla con la variable cuantificada al aplicarla.

Estas convenciones permiten suponer en lo sucesivo que se trabaja únicamente con derivaciones π tales que

(1) ningún secuente en π contiene ocurrencias libres y ligadas de una misma variable,

(2) las variables dependientes de las aplicaciones de las reglas $\Vdash\forall$ y $\exists\Vdash$ en π son distintas entre sí,

(3) todas las ocurrencias de una variable ligada de una fórmula B en un secuente de π caen bajo el alcance de una misma ocurrencia de un cuantificador.

Así una demostración como:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Px\Vdash Px}{Px\&Ry\Vdash Px}\,[\&\Vdash]}{(\exists y)(Px\&Ry)\Vdash Px}\,[\exists\Vdash]}{(\forall x)(\exists y)(Px\&Ry)\Vdash Px}\,[\forall\Vdash] \qquad \dfrac{Px\Vdash Px}{(\forall x)Px\Vdash Px}\,\forall\Vdash}{(\forall x)(\exists y)(Px\&Ry)\Vdash(\forall x)Px}\,[\Vdash\forall]}{(\forall x)(\exists y)(Px\&Ry)\Vdash Px}\,[\text{Corte}]}{(\forall x)(\exists y)(Px\&Ry),\neg Px\Vdash}\,[\neg\Vdash]}{(\forall x)(\exists y)(Px\&Ry),(\exists x)\neg Px\Vdash}\,[\exists\Vdash]$$

Ax.

será reemplazada sistemáticamente por otras como

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Px\Vdash Px}{Px\&Ry\Vdash Px}\,[\&\Vdash]}{(\exists y)(Px\&Ry)\Vdash Px}\,[\exists\Vdash]}{(\forall z)(\exists y)(Pz\&Ry)\Vdash Px}\,[\forall\Vdash] \qquad Pw\Vdash Pw\ \text{Ax.}}{(\forall z)(\exists y)(Pz\&Ry)\Vdash(\forall x)Px \qquad (\forall x)Px\Vdash Pw}\,[\Vdash\forall]}{(\forall z)(\exists y)(Pz\&Ry)\Vdash Pw}\,[\text{Corte}]}{(\forall z)(\exists y)(Pz\&Ry),\neg Pw\Vdash}\,[\neg\Vdash]}{(\forall z)(\exists y)(Pz\&Ry),(\exists w)\neg Pw\Vdash}\,[\exists\Vdash]$$

que, en un sentido que espero quede claro para el lector, son equivalentes a la primera.

EQUIVALENCIA DE SISTEMAS HILBERTIANOS Y CÁLCULOS DE SECUENTES CON REGLA DE CORTE.[9]

La coexistencia de los sistemas hilbertianos y los cálculos de secuentes con Corte obliga a preguntarse «¿Qué tienen que ver la derivabilidad hilbertiana, $\vdash_{HS}$, y la derivabilidad secuencial, $|_{SS}$?». En esta sección se muestra que se trata de definiciones distintas de una misma relación de consecuencia.

LEMA 3. Si $X \Vdash Y,A\to B,Y'$ es SS (=SM,SI,SC) demostrable, también lo es $X,A \Vdash Y,B,Y'$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre la longitud de la demostración de $X \Vdash Y,A\to B,Y'$. Si es un axioma, i.e. de la forma $A\to B \Vdash A\to B$, la demostración correspondiente es:

$$\frac{A \Vdash A \qquad B \Vdash B}{A\to B, A \Vdash B}\ \begin{matrix}\text{Axiomas}\\ \to\Vdash\end{matrix}$$

Los casos de las reglas de datos por la izquierda y la regla de corte no ofrecen dificultad, basta con aplicar la regla en cuestión a la hipótesis de inducción. Consideremos entonces las restantes reglas estructurales. La demostración correspondiente a

$$[\Vdash D]\quad \frac{X \Vdash Y}{X \Vdash A\to B, Y}$$

es

$$\begin{matrix} D \Vdash \\ \Vdash D \end{matrix}\quad \frac{\dfrac{X \Vdash Y}{X, A \Vdash Y}}{X, A \Vdash B, Y}$$

En cuanto a la regla de contracción en el consecuente, la demostración para

$$[\Vdash C]\quad \frac{X \Vdash A\to B, A\to B, Y}{X \Vdash A\to B, Y}$$

es

hip.ind.	$X \Vdash A\to B,Y$	$A \Vdash A$	$B \Vdash B$	[Axs.]
$D\Vdash$	$X,A \Vdash A\to B,Y$	$A\to B, A \Vdash B$		$\to\Vdash$
Corte	$X,A,A \Vdash B,Y$			
$\Vdash C$	$X,A \Vdash B,Y$			

La demostración en el caso de $\Vdash P$ es inmediata a partir del enunciado del teorema. En cuanto a las reglas operacionales, el esquema es siempre el mismo (salvo para $\Vdash\to$, que es inmediato): hipótesis de inducción y aplicación de la regla correspondiente, como ilustran los dos ejemplos siguientes.

$$\text{para}\quad \&\Vdash\quad \frac{X,C \Vdash A\to B,Y}{X,C\&D \Vdash A\to B,Y}\qquad \text{se tiene}\qquad \frac{X,C,A \Vdash B,Y}{X,C\&D,A \Vdash B,Y}\ \begin{matrix}\text{hip.ind.}\\ \&\Vdash\end{matrix}$$

$$\text{y para}\quad [\Vdash\&]\quad \frac{X \Vdash C,A\to B,Y \qquad X \Vdash D,A\to B,Y}{X \Vdash C\&D, A\to B,Y}\ \text{se tiene}\ \frac{X,A \Vdash C,B,Y \qquad X,A \Vdash D,B,Y}{X,A \Vdash C\&D,B,Y}\ \begin{matrix}\text{hip.ind.}\\ \Vdash\&\end{matrix}$$

TEOREMA 7. Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, si $X \vdash_{HS} A$ entonces $X \vdash_{SS} A$ (S=M,I,C).

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre la longitud n de la derivación π de A a partir de X en HS. Si n=1 entonces o bien $A\in X$ o bien A es un axioma. En el primer supuesto $A \Vdash A$ es un axioma de cualquiera de los cálculos de secuentes descritos. En el segundo supuesto, mostramos cómo derivar cada uno de los esquemas axiomáticos de HS.

[9] En lo que sigue, para simplificar algo las demostraciones en cálculo secuencial se omiten las aplicaciones de la regla de permutación.

[A1]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A}{A,B \Vdash A}\,D\Vdash}{A \Vdash B \to A}\,\Vdash\!\to}{\Vdash A \to (B \to A)}\,\Vdash\!\to$$

Axioma

[A2]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A \qquad B \Vdash B}{A \to B, A \Vdash B}\,\to\!\Vdash \qquad A \Vdash A}{A \to (A \to B), A, A \Vdash B}\,\to\!\Vdash}{\dfrac{A \to (A \to B), A \Vdash B}{\dfrac{A \to (A \to B) \Vdash A \to B}{\Vdash (A \to (A \to B)) \to (A \to B)}\,\Vdash\!\to}\,\Vdash\!\to}\,C\Vdash$$

Axiomas

Axioma

[A3]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A \qquad B \Vdash B}{A \to B, A \Vdash B}\,\to\!\Vdash \qquad C \Vdash C}{A \to B, B \to C, A \Vdash C}\,\to\!\Vdash}{A \to B, B \to C \Vdash A \to C}\,\Vdash\!\to}{A \to B \Vdash (B \to C) \to (A \to C)}\,\Vdash\!\to}{\Vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))}\,\Vdash\!\to$$

Axs.

Ax.

[A4]:

$$\dfrac{\dfrac{A \Vdash A}{A \& B \Vdash A}\,\&\Vdash}{\Vdash A \& B \to A}\,\Vdash\!\to$$

Axioma

[A5]:

$$\dfrac{\dfrac{B \Vdash B}{A \& B \Vdash B}\,\&\Vdash}{\Vdash A \& B \to B}\,\Vdash\!\to$$

Axioma

[A6]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A \qquad B \Vdash B}{A \to B, A \Vdash B}\,\to\!\Vdash \qquad \dfrac{A \Vdash A \qquad C \Vdash C}{A \to C, A \Vdash C}\,\to\!\Vdash}{A \to B, A, A \to C \Vdash B \qquad A \to B, A, A \to C \Vdash C}\,D\Vdash}{A \to B, A, A \to C \Vdash B \& C}\,\Vdash\!\&}{A \to B, A \to C, A \Vdash B \& C}\,P\Vdash}{A \to B, A \to C \Vdash A \to B \& C}\,\Vdash\!\to}{A \to B \Vdash (A \to C) \to (A \to B \& C)}\,\Vdash\!\to}{\Vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \& C)))}\,\Vdash\!\to$$

Axs.

Ax.

[A7]:

$$\dfrac{\dfrac{A \Vdash A}{A \Vdash A \vee B}\,\Vdash\!\vee}{\Vdash A \to A \vee B}\,\Vdash\!\to$$

Ax.

[A8]:

$$\dfrac{\dfrac{B \Vdash B}{B \Vdash A \vee B}\,\Vdash\!\vee}{\Vdash B \to A \vee B}\,\Vdash\!\to$$

Ax.

[A9]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A \qquad C \Vdash C}{A \to C, A \Vdash C}\,\to\!\Vdash \qquad \dfrac{B \Vdash B \qquad C \Vdash C}{B \to C, B \Vdash C}\,\to\!\Vdash}{A \to C, B \to C, A \Vdash C \qquad A \to C, B \to C, B \Vdash C}\,D\Vdash}{A \to C, B \to C, A \vee B \Vdash C}\,\vee\!\Vdash}{A \to C, B \to C \Vdash A \vee B \to C}\,\Vdash\!\to}{A \to C \Vdash (B \to C) \to (A \vee B \to C)}\,\Vdash\!\to}{\Vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))}\,\Vdash\!\to$$

Axs.

[A10]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \Vdash B}\,\text{Ax.}}{A \Vdash A,\ B,\neg B \Vdash}\,\neg\Vdash}{A \Vdash A \qquad A\to B,A,\neg B \Vdash}\,\to\Vdash}{A\to B,A\to\neg B,A,A \Vdash}\,\to\Vdash}{A\to B,A\to\neg B,A \Vdash}\,C\Vdash}{A\to B,A\to\neg B \Vdash \neg A}\,\Vdash\neg}{(A\to B)\&(A\to\neg B),A\to\neg B \Vdash \neg A}\,\&\Vdash}{(A\to B)\&(A\to\neg B),(A\to B)\&(A\to\neg B) \Vdash \neg A}\,\&\Vdash}{(A\to B)\&(A\to\neg B) \Vdash \neg A}\,C\Vdash}{\Vdash (A\to B)\&(A\to\neg B)\to\neg A}\,\Vdash\to$$

Ax. Ax Ax.

[A11]:

$$\dfrac{\dfrac{A[t] \Vdash A[t]}{(\forall v)A[v] \Vdash A[t]}\,\forall\Vdash}{\Vdash (\forall v)A[v]\to A[t]}\,\Vdash\to$$

Axioma

[A12]:

$$\dfrac{\dfrac{A[t] \Vdash A[t]}{A[t] \Vdash (\exists v)A[v]}\,\Vdash\exists}{\Vdash A[t]\to(\exists v)A[v]}\,\Vdash\to$$

Axioma

[A13] (HI):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A}{A,\neg A \Vdash B}\,\Vdash D}{\neg A,A \Vdash B}\,\Vdash P}{\neg A \Vdash A\to B}\,\Vdash\to}{\Vdash \neg A\to(A\to B)}\,\Vdash\to$$

Axioma

[A14] (HC):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A}{\Vdash \neg A,A}\,\Vdash\neg}{\neg\neg A \Vdash A}\,\neg\Vdash}{\Vdash \neg\neg A\to A}\,\Vdash\to$$

Axioma

Para las reglas de prueba recurrimos al lema 3.

[R1]: Por hipótesis de inducción $\Vdash A\to B$ y $\Vdash A$, y por el lema 3 $A \Vdash B$; úsese entonces la regla de corte para llegar a $\Vdash B$.

[R2]: Por hipótesis de inducción $\Vdash B\to A[v]$ y por el lema 3 $B \Vdash A[v]$. A partir de aquí, supuesto que 'B' no contiene ocurrencias libres de 'v',

$$\dfrac{\dfrac{B \Vdash A[v]}{B \Vdash (\forall v)A[v]}\,\Vdash\forall}{\Vdash B\to(\forall v)A[v]}\,\Vdash\to$$

[R3]: Por hipótesis de inducción y el lema 3 $A[v] \Vdash B$, y entonces -de nuevo 'B' no contiene ocurrencias libres de la variable 'v',

$$\dfrac{\dfrac{A[v] \Vdash B}{(\exists v)A[v] \Vdash B}\,\exists\Vdash}{\Vdash (\exists v)A[v]\to B}\,\Vdash\to$$

⊣

La demostración de la conversa del teorema 7 ((a saber, si $X \vdash_{SS} A$ entonces $X \vdash_{HS} A$) es bastante prolija. Por claridad, se realiza por separado para las lógicas mínima e intuicionista (teorema 8) y la lógica clásica (teorema 9).

TEOREMA 8. Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, si $X \vdash_{SM/SI} A$ entonces $X \vdash_{HM/HI} A$.

DEMOSTRACIÓN. Demostramos que si $X\|\!\sim Y$ es demostrable en SM/SI entonces (i) si $Y=\varnothing$ entonces $X\vdash_{HM/HI}A\&\neg A$, para alguna fórmula A sin variables libres, y (ii) si $Y=\{A\}$ entonces $X\vdash_{HM/HI}A$. Procedemos por inducción sobre la longitud n de la demostración de $X\|\!\sim Y$. Si n=1, $X\|\!\sim Y$ es un axioma y por tanto es de la forma $A\|\!\sim A$.

$$\dfrac{\dfrac{A\rightarrow(A\rightarrow A)}{(A\rightarrow(A\rightarrow A))\rightarrow(A\rightarrow A)}\ A2}{A\rightarrow A}\ R1 \qquad A1$$

y por el teorema de deducción se concluye $A\vdash_{HM/HI}A$. Sea pues n=k+1. Los casos de las reglas de datos son inmediatos. La única excepción, para SI, es [$\|\!\sim$D]:

$$\dfrac{X\|\!\sim}{X\|\!\sim A}$$

$$\begin{array}{ll}
\hline
X\vdash_{HI}B\&\neg B & \text{hip.ind.}\\
\hline
B\&\neg B\rightarrow\neg B & A5\\
\hline
\neg B\rightarrow(B\rightarrow A) & A1\\
\hline
B\&\neg B\rightarrow(B\rightarrow A) & L9\\
\hline
X\vdash_{HI/HC}B\rightarrow A & L9\\
\hline
B\&\neg B\rightarrow B & A4\\
\hline
X\vdash_{HI/HC}B & L9\\
\hline
X\vdash_{HI/HC}A & R1
\end{array}$$

La única regla de razonamiento, Corte, no encierra especial dificultad. Por hipótesis hay sendas derivaciones en HM/HI de A a partir de X, llamémosle π, y de B a partir de $Y\cup\{A\}$, π'. La concatenación de π y π' proporciona entonces una derivación de B a partir de $X\cup Y$.

Vayamos ahora con las reglas operacionales.

[&$\|\!\sim$]: $\dfrac{X,A\|\!\sim Y}{X,A\&B\|\!\sim Y}$ $\qquad$ $\dfrac{X,B\|\!\sim Y}{X,A\&B\|\!\sim Y}$

Por hipótesis de inducción hay una derivación π de C (que es de la forma D&¬D o el único elemento de Y, según los casos) a partir de $X\cup\{A\}$; la derivación de C a partir de $X\cup\{A\&B\}$ es entonces:

$$\begin{array}{ll}
\hline
[A\&B] & \\
\hline
A\&B\rightarrow A & A4\\
\hline
A & R1\\
\hline
[X] & \\
\hline
\left.\begin{array}{l}.\\.\\.\end{array}\right\}\ \pi & \\
\hline
C &
\end{array}$$

La otra variante de la regla se trata del mismo modo.

[$\|\!\sim$&]: $\dfrac{X\|\!\sim A \quad X\|\!\sim B}{X\|\!\sim A\&B}$

Por hipótesis de inducción hay sendas derivaciones π y π'de A a partir de X y de B a partir del mismo conjunto de hipótesis, respectivamente. Úsese entonces adjunción -es decir, [L5].

[$\|\!\sim$v]: $\dfrac{X,A\|\!\sim Y \qquad X,B\|\!\sim Y}{X,A\vee B\|\!\sim Y}$

Sea C como en el caso de [&$\|\!\sim$]. La hipótesis de inducción asegura la existencia de sendas derivaciones de C a partir de $X\cup\{A\}$ y de C a partir de $X\cup\{B\}$. Por el teorema de deducción hay entonces una derivación π de A→C a partir de X y una derivación π' de B→C a partir de X.

$$\dfrac{\dfrac{(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C))\ A9}{[X]}}{.}$$

$$\pi\ \left\{\begin{array}{l}\\ .\\ .\\ A\to C\\ \hline (B\to C)\to(A\vee B\to C)\end{array}\right.\ R1$$

$$\pi'\ \left\{\begin{array}{l}[X]\\ .\\ .\\ .\\ B\to C\\ \hline A\vee B\to C\end{array}\right.\ R1$$

$$[\Vdash\vee]:\quad \frac{X\Vdash A}{X\Vdash A\vee B}\qquad\qquad \frac{X\Vdash B}{X\Vdash A\vee B}$$

Los dos subcasos se tratan de forma similar (usando A7 o A8) y por eso nos ocupamos sólo del primero. Por hipótesis hay una derivación π de A a partir de X; así,

$$\pi.\ \left\{\begin{array}{l}[X]\\ .\\ .\\ .\\ A\\ \hline A\to A\vee B\\ \hline A\vee B\end{array}\right.\ \begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ A7\\ R1\end{array}$$

$$[\Vdash\to]:\ \frac{X,A\Vdash B}{X\Vdash A\to B}$$

Si hay una derivación de B a partir de $X\cup\{A\}$ entonces por el teorema de deducción hay una derivación de $A\to B$ a partir de X.

$$[\to\Vdash]:\ \frac{X\Vdash A\qquad X\ B\Vdash C}{X,A\to B\Vdash C}$$

Sea π una derivación de A a partir de X y π' una derivación de C a partir de $X\cup B$. Usando el teorema de deducción, hay una derivación de $B\to C$ a partir de X, π''.

$$\pi\ \left\{\begin{array}{l}[X]\\ .\\ .\\ .\\ A\\ \hline A\to((A\to B)\to A)\\ \hline (A\to B)\to A\end{array}\right.\ \begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ A1\\ R1\end{array}$$

$$\pi''\ \left\{\begin{array}{l}[X]\\ .\\ .\\ .\\ B\to C\\ \hline (A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))\\ \hline (B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))\\ \hline (A\to B)\to(A\to C)\end{array}\right.\ \begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ A3\\ L2\\ R1\end{array}$$

Por el teorema 2 y la primera derivación , hay una derivación de A a partir de $X\cup\{A\to B\}$ y por ese mismo teorema y la segunda derivación, otra derivación de $A\to C$ a partir de $X\cup\{A\to B\}$. Combinando estas derivaciones y usando la regla de modus ponens resulta una derivación de C a partir de $X\cup\{A\to B\}$.

$$\neg\vdash \qquad \frac{X\vdash A}{X,\neg A\vdash}$$

Dada una derivación π de A a partir de X se trata de encontrar una derivación (empleando reglas mínimas) de B&¬B, para alguna fórmula B, a partir de $X \cup \{\neg A\}$.

$$\pi \quad \left\{ \begin{array}{c} [X] \\ . \\ . \\ . \\ A \\ A\rightarrow(B\rightarrow A) \quad \text{A1} \\ B\rightarrow A \quad \text{R1} \\ [\neg A] \\ \neg A\rightarrow(B\rightarrow\neg A) \quad \text{A1} \\ B\rightarrow\neg A \quad \text{R1} \\ (B\rightarrow A)\&(B\rightarrow\neg A) \quad \text{L3} \\ ((B\rightarrow A)\&(B\rightarrow\neg A))\rightarrow\neg A \quad \text{A10} \\ \neg A \quad \text{R1} \end{array} \right.$$

$$[\vdash\neg]: \quad \frac{X,A\vdash}{X\vdash\neg A}$$

Dada una derivación π de B&¬B, para alguna fórmula B, a partir de $X \cup \{A\}$, se obtienen dos derivaciones de A→B y A→¬B a partir de X usando A4 y A5, respectivamente, y la regla de *modus ponens*. Por adjunción, L5, se combinan en una derivación de (A→B)&(A→¬B) y entonces empleando A10 (A→B)&(A→¬B)→¬A y R1 se llega a una derivación de ¬A a partir de X.

$$[\forall\vdash]: \quad \frac{X,A[t]\vdash C}{X,.(\forall v)A[v]\vdash C}$$

donde C es como en los casos &⊢ y ⊢v. Por hipótesis hay una derivación π de C a partir de $X \cup \{A[t]\}$.

$$\pi \quad \left\{ \begin{array}{c} [(\forall v)A[v]] \\ (\forall v)A[v]\rightarrow A[t] \quad \text{A11} \\ A[t] \quad \text{R1} \\ [X] \\ . \\ . \\ . \\ C \end{array} \right.$$

Hablando con propiedad, en las dos primeras líneas de la derivación habrá que usar una fórmula equivalente a (∀v)A[v], digamos (∀v)B[v], para asegurar que el término t está libre para v en B (cfr. *Convenciones sobre el uso de variables...*). *Mutatis mutandis* las mismas consideraciones se aplican al caso de [⊢∃].

$$[\vdash\forall]: \quad \frac{X\vdash A}{X\vdash(\forall v)A[v]}$$

donde v no está libre en X. Sea B cualquier teorema de HS sin ocurrencias libres de la variable v y π la derivación de A a partir de X proporcionada por la hipótesis inductiva.

$$\pi \quad \left\{ \begin{array}{c} [X] \\ . \\ . \end{array} \right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}\right.\begin{array}{c} \\ . \\ \\ \\ A \\ A\rightarrow(B\rightarrow A) \\ B\rightarrow A \\ B\rightarrow(\forall v)A \\ B \\ (\forall v)A \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ A1 \\ R1 \\ R2 \\ \text{hipótesis} \\ R1 \end{array}$$

$$[\Vdash\exists]: \quad \frac{X\Vdash A[t]}{X\Vdash(\exists v)A[v]}$$

Por hipótesis de inducción hay una derivación π de A[t] a partir de X. Empleando consecutivamente A12 y R1 se obtiene una derivación de $(\exists v)A[v]$ a partir de X.

$$[\exists\Vdash]: \quad \frac{X,A\Vdash C}{X,(\exists v)A\Vdash C}$$

siendo C como en los casos $\&\Vdash$, $\Vdash v$ y $\forall\Vdash$, y no habiendo ocurrencias libres de v ni en X ni en C. Dada una derivación de C a partir de $X \cup \{A\}$ el teorema de deducción proporciona una derivación π de $A\rightarrow C$ a partir de X, y entonces

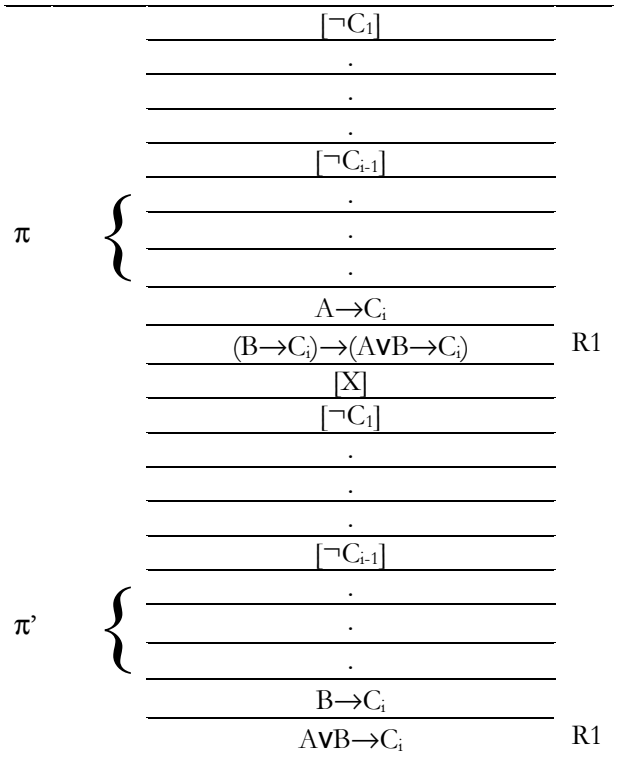
$$\pi \quad \left\{\begin{array}{c} \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}\right.\begin{array}{c} [X] \\ . \\ . \\ . \\ A\rightarrow C \\ (\exists v)(A[v])\rightarrow C \\ [(\exists v)(A[v])] \\ C \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ R3 \\ \\ R1 \end{array}$$

TEOREMA 9. Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, si $X\vdash_{SC}A$ entonces $X\vdash_{HC}A$.

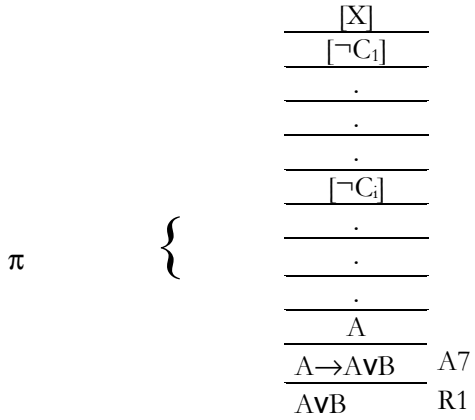
DEMOSTRACIÓN. Demostramos que si $X\Vdash Y$ es demostrable en SS entonces (i) si $Y=\varnothing$ entonces $X\vdash_{HC}A\&\neg A$, para alguna fórmula A, (ii) si $Y=\{A\}$ entonces $X\vdash_{HC}A$, y (iii) si $Y=\{A_1,...,A_n\}$, $n>1$, $X,\neg A_1,...,\neg A_{n-1}|_{HC}A_n$. Una vez demostrado el teorema 8 basta (con la excepción de las reglas adicionales de datos) con considerar este último supuesto. Como antes, procedemos por inducción sobre la longitud n de la demostración de $X\Vdash Y$. Si n=1, $X\Vdash Y$ es un axioma y por tanto es de la forma $A\Vdash A$; se procede como en el caso análogo del teorema anterior. Sea pues n=k+1. Los casos de las reglas estructurales son inmediatos salvo el de la regla de Corte. Siendo $Z=\{B_1,...,B_i\}$ y $W=\{C_1,...,C_j\}$, se sigue de la hipótesis de inducción la existencia de sendas derivaciones π y π', respectivamente, de A a partir de $X \cup \{\neg B_1,...,\neg B_i\}$ y de C_j a partir de $Y \cup \{A,C_1,...,C_{j-1}\}$. De nuevo la concatenación de π y π' proporciona la derivación de C_j a partir de $X \cup Y \cup \{\neg B_1,...,\neg B_i\} \cup \{C_1,...,C_{j-1}\}$ requerida. Vayamos ahora con las reglas operacionales. Convengamos por comodidad que $Y=\{C_1,...,C_i\}$.

$[\Vdash v]$: La hipótesis de inducción asegura la existencia de sendas derivaciones de C_i a partir de $X \cup \{A,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$ y de C_i a partir de $X \cup \{B,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}$. Por el teorema de deducción hay entonces una derivación π de $A\rightarrow C_i$ a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$ y una derivación π' de $B\rightarrow C_i$ a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$.

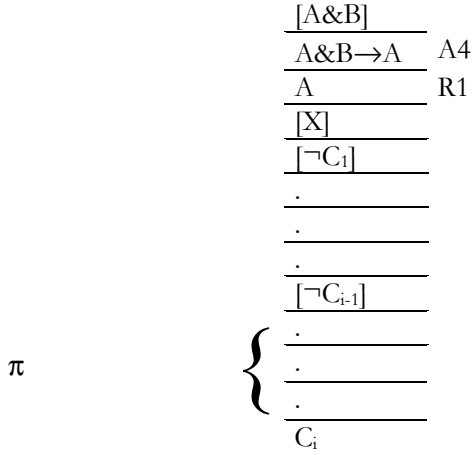
$$\frac{\dfrac{(A\rightarrow C_i)\rightarrow((B\rightarrow C_i)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C_i))}{[X]}\ A9}{\qquad\qquad}$$



[∨⊢]: Por hipótesis hay una derivación π de A a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$; en tal caso



[&⊢]: por hipótesis de inducción hay una derivación π de C_i a partir de $X \cup \{A,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$; se obtiene entonces la siguiente derivación de C_i a partir de $X \cup \{A\&B,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$:



[╟&]: Por hipótesis de inducción hay sendas derivaciones π y π', respectivamente, de A a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$ y de B a partir del mismo conjunto de hipótesis. Úsese entonces adjunción -es decir, [L3].

[╟→]: Si hay una derivación de B a partir de $X \cup \{A,\neg C_1,...,\neg C_i\}$ entonces por el teorema de deducción hay una derivación de A→B a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$.

[→╟]: Sea π una derivación de A a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$ y π' una derivación de C_i a partir de $X \cup \{B,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$. Usando sobre π' la instancia $C_i\to(\neg C_i\to C_i)$ de A1 y R1 se construye una derivación de C_i a partir de $X \cup \{B,\neg C_1,...,\neg C_i\}$ y entonces por el teorema de deducción una derivación π'' de B→C a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$.

[X]
$[\neg C_1]$
.
.
.
$[\neg C_i]$
π { . . .
A
$A\to((A\to B)\to A)$ A1
$(A\to B)\to A$ R1

[X]
$[\neg C_1]$
.
.
.
$[\neg C_i]$
π'' { . . .
$B\to C_i$
$(A\to B)\to((B\to C_i)\to(A\to C_i))$ A3
$(B\to C_i)\to((A\to B)\to(A\to C_i))$ L4
$(A\to B)\to(A\to C_i)$ R1

Por el teorema 2 y la derivación de la izquierda, hay una derivación de A a partir de $X \cup \{A\to B,\neg C_1,...,\neg C_i\}$ y por ese mismo teorema y la derivación de la derecha otra derivación de $A\to C_i$ a partir de $X \cup \{A\to B,\neg C_1,...,\neg C_i\}$. Combinando estas derivaciones y usando la regla de modus ponens resulta una derivación de C_i a partir de $X \cup \{A\to B,\neg C_1,...,\neg C_i\}$. A su vez, una aplicación del teorema de deducción suministra una derivación de $\neg C_i\to C_i$ a partir de $X \cup \{A\to B,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$. Finalmente, siendo λ esta última derivación,

λ { . . .
$\neg C_i\to C_i$
$(\neg C_i\to C_i)\to((C_i\to C_i)\to(\neg C_i v C_i\to C_i))$ A9
$(C_i\to C_i)\to(\neg C_i v C_i\to C_i)$ R1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(C_i\rightarrow(C_i\rightarrow C_i))\rightarrow(C_i\rightarrow C_i)}{C_i\rightarrow(C_i\rightarrow C_i)}\,A2}{(C_i\rightarrow C_i)}\,A1}{(\neg C_i v C_i\rightarrow C_i)}\,R1}{\neg C_i v C_i}\,R1}{C_i}\,A14'\;R1$$

Resultando así una derivación (clásica) de C_i a partir de $X \cup \{A\rightarrow B,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$.

[$\neg\vdash$]: Por hipótesis de inducción hay una derivación de A a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$, y entonces por el teorema de deducción una derivación de $\neg C_i\rightarrow A$ a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$.Por L4 y L8 se obtiene una derivación de $\neg A\rightarrow\neg\neg C_i$ a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$, que el teorema 2 convierte en una derivación de $\neg\neg C_i$ a partir de $X \cup \{\neg A,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$. Úsese entonces A14 $\neg\neg C_i\rightarrow C_i$ y transitividad (L9) para derivar la conclusión C_i de las mismas premisas.

[$\vdash\neg$]: Dada una derivación de C_i a partir de $X \cup \{A,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$, úsese el teorema de deducción para pasar a una derivación de $A\rightarrow C_i$ con premisas en $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$, y L4 para transformar su conclusión en $\neg C_i\rightarrow\neg A$. Finalmente, la conversa del teorema de deducción da una derivación de $\neg A$ desde $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$.

[$\forall\vdash$]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall v)A[v]]}{(\forall v)A[v]\rightarrow A[t]}\,A11}{A[t]}\,R1}{[X]}}{[\neg C_1]}}{\vdots}}{[\neg C_{i-1}]}}{\vdots}}{C_i}}$$

donde la derivación π, cuyas premisas son $X \cup \{A[t]\}$, en un caso, y $X \cup \{A[t],\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$, en el otro, es suministrada por la hipótesis inductiva.

[$\vdash\forall$]: El truco -como en el caso análogo del teorema 8- consiste en transformar una derivación de A[v] a partir de un conjunto de fórmulas sin ocurrencias libres de 'v' en una demostración de una fórmula de la forma $B\rightarrow A[v]$. Si la hipótesis inductiva afirma la existencia de una derivación de A[v] a partir de las fórmulas $B_1,...,B_j$, sea $B=B_1\&...\&B_j$; si lo que afirma es la existencia de una demostración de A[v], sea B cualquier fórmula demostrable en el sistema sin ocurrencias libres de v. En el primer caso A4, A5 y el teorema de deducción llevan a $\vdash_{HS}B\rightarrow A[v]$; en el segundo caso la instancia $A[v]\rightarrow(B\rightarrow A[v])$ de A1 y R1 llevan a $\vdash_{HS}B\rightarrow A[v]$. A partir de aquí, basta con aplicar R2 para obtener $\vdash_{HS}B\rightarrow(\forall v)A[v]$. El lema 2, A6 y L10, en el primer caso, y R1, en el segundo, arrojan la derivación requerida.

[$\vdash\exists$]: Por hipótesis de inducción hay una derivación π de A[t] a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$. Empleando consecutivamente A12 y R1 se obtiene una derivación de $(\exists v)A[v]$ a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$.

[∃⊩]: Dada una derivación de C_i a partir de $X \cup \{A,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$ el teorema de deducción proporciona una derivación π de $A\rightarrow C_i$ a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$, y entonces

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi\ \left\{\begin{array}{l}[X]\\ [\neg C_1]\\ .\\ .\\ .\\ [\neg C_{i-1}]\\ .\\ .\\ .\end{array}\right.}{A\rightarrow C_i}}{(\exists v)(A[v])\rightarrow C_i}\ R3}{[(\exists v)(A[v])]}}{C_i}\ R1$$

⊣

De los teoremas 7 y 8 o 9 (según el caso) se sigue -como se anunció al principio de este capítulo- que HS y SS (S=M,I,C) introducen una misma relación de consecuencia. Es decir, $\vdash_{HS}=\vdash_{SS}$.

EJERCICIOS.

(1) Demostrar en SM los esquemas $Av(B\&C)\rightarrow(AvB)\&(AvC)$, $A\&(BvC)\rightarrow(A\&B)v(A\&C)$.
(2) Demostrar en SC las fórmulas $(\exists x)((\exists y)P^1y\rightarrow P^1x)$, $(\exists x)(\neg\neg R^2xa\rightarrow(\forall y)R^2ya)$.
(3) Demostrar la equivalencia de los sistemas implicacionales del capítulo 4 y los correspondientes calculos de secuentes -es decir, demostrar que $\vdash_{SIM}=\vdash_{SM}$, $\vdash_{SII}=\vdash_{SI}$, $\vdash_{SIC}=\vdash_{SC}$
(4) Demostrar que la regla de combinación

$$\dfrac{X\Vdash Y \qquad Z\Vdash W}{X,Z\Vdash Y,W}$$

Es una regla admisible en SC, es decir que si por hipótesis los secuentes $X\Vdash Y$ y $Z\Vdash W$ son demostrables en SC, también lo es el secuente $X,Z\Vdash Y,W$.
(5) Buscar versiones de la regla de combinación admisibles en SI y SC.

CAPÍTULO 4. CÁLCULOS DE SECUENTES SIN REGLA DE CORTE

Si imaginásemos que el espacio entero está formado por el Palacio de los Duques y que cada arco representa una experiencia local, entonces la simetría que produce la repetición de los arcos no constituiría solamente un elemento de belleza de la estructura, sino que tendría como efecto algo realmente más profundo.

A.Salam, *'Los conceptos de simetría y la teoría básica de la materia'*.

TEOREMA DE ELIMINACIÓN DE LA REGLA DE CORTE.

La única regla de razonamiento de los cálculos de secuentes descritos en el capítulo anterior, Corte, presenta características marcadamente distintas de las de todas las demás, operacionales o de datos. En efecto, es la única que permite «eliminar» una fórmula (y no meramente una ocurrencia de una fórmula, como las reglas de contracción) al pasar de las premisas a la conclusión. El concepto de «propiedad de subfórmulas» permite expresar esa idea de eliminación de una manera más precisa.

> Un sistema de cálculo de secuentes SS tiene la *propiedad de subfórmulas* syss para toda demostración π en SS, si $X \Vdash Y$ y $X' \Vdash Y'$ son dos nodos de π tales que $X \Vdash Y$ domina a $X' \Vdash Y'$ entonces para toda fórmula A que ocurre en $X' \Vdash Y'$ hay una fórmula B que ocurre en $X \Vdash Y$ tal que $A \in SFG(B)$.

Si el lector tiene la paciencia de revisar las reglas de SM, SI y SC constatará que todas, salvo la regla de Corte, preservan la propiedad de subfórmulas.

Así, no está de más preguntarse qué papel desempeña la regla de Corte en esos sistemas. En el capítulo 5, sólo se ha empleado para dar cuenta de la regla de *modus ponens*, R1 de los sistemas hilbertianos, en la demostración del teorema 7. Esto sugiere cierta afinidad entre ambas, aunque esta observación puede no ser muy esclarecedora si se tiene en cuenta el modo de codificar la información de los principios de los sistemas hilbertianos. No sucede lo mismo con el teorema que viene a continuación.

TEOREMA 10. Si SS es un sistema de cálculo de secuentes para el que valen las reglas $C\Vdash$, $P\Vdash$, $D\Vdash$ y Corte entonces $\vdash_{SS}$ es transitiva.

DEMOSTRACIÓN. Si A pertenece al conjunto de consecuencias de las consecuencias de X -$A \in C(C(X))$ en la notación del capítulo 1-, hay un conjunto de fórmulas $\{B_1,...,B_n\}$ y un subconjunto finito $Y \subseteq X$ tales que los secuentes $B_1,...,B_n \Vdash A$, $Y \Vdash B_1,...,Y \Vdash B_n$ son SS-demostrables. Esta afirmación se sigue de la definición de $\vdash_{SS}$ (es una relación de consecuencia finitaria) y de la presencia de la regla $D\Vdash$ y $P\Vdash$ (para «igualar» los antecedentes de los secuentes con consecuentes B_i). Para construir una demostración de $Y \Vdash A$ se procede como sigue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Y \Vdash B_1 \quad B_1,...,B_n \Vdash A}}{Y \Vdash B_2 \quad Y,B_2,...,B_n \Vdash A}\,\text{Corte}}{Y,Y,B_3,...,B_n \Vdash A}\,\text{Corte}}{\vdots\ P\Vdash,C\Vdash}}{Y,B_3,...,B_n \Vdash A}}{\vdots}}{\vdots}}{Y \Vdash B_n \quad Y,B_n \Vdash A}}{Y,Y,B_n \Vdash A}\,\text{Corte}}{\vdots\ P\Vdash,C\Vdash}}{Y \Vdash A}$$

Parece, entonces, que el papel de la regla de Corte es asegurar la transitividad de $\vdash_{SS}$. Sucede sin embargo que los axiomas, reglas de datos y reglas operacionales de SM, SI y SC definen de hecho una relación de consecuencia que es transitiva, y por consiguiente la regla de Corte es eliminable: si hay en SS (=SM, SI, SC) una demostración de un secuente $X \Vdash Y$, hay una demostración de $X \Vdash Y$ sin regla de Corte.

Para demostrar lo enunciado en el párrafo anterior hay que establecer algunas nociones y una convención notacional.

[1] El *grado de una aplicación de Corte* es igual a la complejidad o grado lógico de su fórmula de corte + 1.

[2] El *grado de una demostración* π, $g(\pi)$, es el mayor de entre los grados de las aplicaciones de Corte en π.

Se dirá indistintamente que una demostración π no contiene aplicaciones de la regla de Corte o que $g(\pi)=0$. Si X es una secuencia de (ocurrencias de) fórmulas y A es una fórmula, escribiremos 'X-A' para indicar la secuencia resultante de eliminar de X algunas ocurrencias de A.

La demostración de la eliminabilidad de Corte es algo farragosa y es fácil que los árboles no nos dejen ver el bosque (y nunca mejor dicho). Por eso antes de acometer la demostración propiamente dicha, veamos un esbozo que destaca sus aspectos fundamentales. Pueden distinguirse dos etapas en la eliminación de la regla de Corte:

(1) *Reducción del grado de las demostraciones*: para toda demostración de grado $k>1$ de un secuente hay una demostración de grado $<k$ de ese mismo secuente; por consiguiente, todo secuente demostrable tiene una demostración de grado ≤ 1.

(2) *Eliminación de cortes de grado 1*: si hay una demostración de grado ≤ 1 de un secuente, hay una demostración libre de Corte.

Una demostración de un secuente $X,W \Vdash Y,Z$ que termina con una aplicación de Corte puede esquematizarse como sigue:

$$\dfrac{\begin{matrix}\lambda_1 \\ X' \Vdash Y'\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_1 \\ W',A \Vdash Z''\end{matrix}}{X'' \Vdash A,Y \qquad W'' \Vdash Z''}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\lambda_2 \\ X \Vdash A,Y\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2 \\ W,A \Vdash Z\end{matrix}}{X,W \Vdash Y,Z}$$

Las subdemostraciones λ_1 y π_1 concluyen aplicando las reglas R y R', respectivamente, que introducen la fórmula de corte A de la aplicación final de esta regla. Si $c(A)>1$, la clave está en aquellos casos en los que R es la regla de introducción en el consecuente del símbolo lógico principal de A y R' la regla de introducción den el antecedente del símbolo lógico principal de A. Por ejemplo,

(a)

$$\dfrac{\begin{matrix}\lambda_1 \\ X',B \Vdash Y'\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_1 \\ W' \Vdash B,Z'\end{matrix}}{X' \Vdash \neg B,Y' \qquad W',\neg B \Vdash Z} \quad \begin{matrix}[\neg \Vdash] \\ [\Vdash \neg]\end{matrix}$$

(b)

$$\dfrac{\begin{matrix}\lambda_1 \\ X' \Vdash B,Y' \quad X' \Vdash C,Y'\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_1 \\ W',B \Vdash Z'\end{matrix}}{X' \Vdash B\&C,Y' \qquad W',B\&C \Vdash Z'} \quad \begin{matrix}\&\Vdash \\ \Vdash\&\end{matrix}$$

(c)

$$\lambda_1 \quad \left\{ \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ & \cdot \end{array} \right\} \quad \pi_1$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cdot\\ X' \Vdash B[v],Y'\end{array}}{\Vdash\forall \quad X' \Vdash (\forall v)B[v],Y'} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\cdot\\ W',B[v] \Vdash Z'\end{array}}{W',(\forall v)B[v] \Vdash Z' \quad \forall \Vdash}$$

Para obtener una nueva demostración de X,W ⊩ Y,Z se aplica Corte sobre las premisas de R y R'; es decir (con una buena dosis de simplificación), se reemplaza la derivación original por

$$\lambda_1 \quad \left\{ \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right\} \quad \pi_1$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc} X' \Vdash Y' & W' \Vdash Z' \end{array}}{X'',W''\text{-}A \Vdash Y''\text{-}A,Z''} \quad \text{Corte}$$

$$\lambda_2 \quad \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right.$$

$$X,W''\text{-}A \Vdash Y\text{-}A,Z''$$

$$\pi_2 \quad \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right.$$

$$X,W \Vdash Y,Z$$

Así, en los ejemplos arriba considerados, se tendría:

(a)

$$\lambda_1 \quad \left\{ \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right\} \quad \pi_1$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc} X',B \Vdash Y' & W' \Vdash B,Z' \end{array}}{X',W' \Vdash Y',Z'} \quad \text{Corte}$$

(b)

$$\lambda_1 \quad \left\{ \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right\} \quad \pi_1$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc} X' \Vdash B,Y' & W',B \Vdash Z' \end{array}}{X',W' \Vdash Y',Z'} \quad \text{Corte}$$

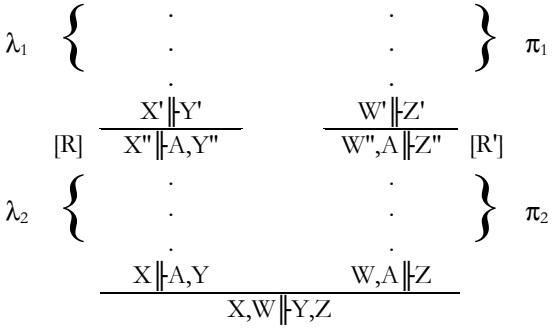
(c)

$$\lambda_1 \quad \left\{ \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right\} \quad \pi_1$$

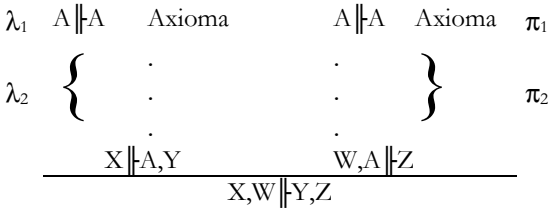
$$\dfrac{\begin{array}{cc} X' \Vdash B[v],Y' & W',B[v] \Vdash Z' \end{array}}{X',W' \Vdash Y'Z'} \quad \text{Corte}$$

¿Qué se gana «adelantando» la aplicación de Corte? La complejidad de la fórmula de Corte de la nueva aplicación es, en todos los casos, estrictamente menor que la de la aplicación original, así que iterando el procedimiento las veces que sea preciso se llegaría a una demostración de X,W ⊩ Y,Z de grado 1 (es decir, en la que las fórmulas de corte son fórmulas atómicas). La moraleja es que la transitividad de la relación de consecuencia se expresa en los sistemas secuenciales, al menos en parte y dadas ciertas condiciones mínimas, a través de la simetría de las reglas de introducción en el antecedente y el consecuente de un símbolo lógico. Esa simetría permite retroaer a las premisas una aplicación no atómica de la regla de corte.

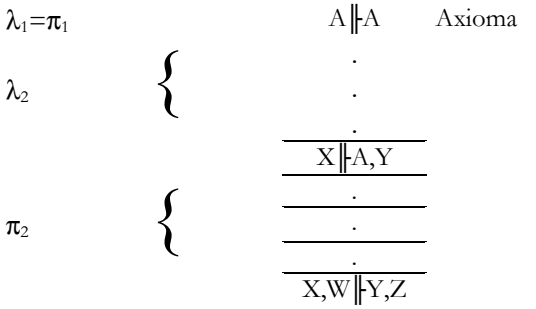
Vayamos con la segunda etapa. ¿Cómo aparece una fórmula atómica en un secuente que es un nodo de una demostración? La conclusión a la que se llega inspeccionando las reglas de los sistemas secuenciales es que o figura en un axioma o resulta de aplicar debilitamiento. Por tanto, si 'A' es una fórmula atómica en



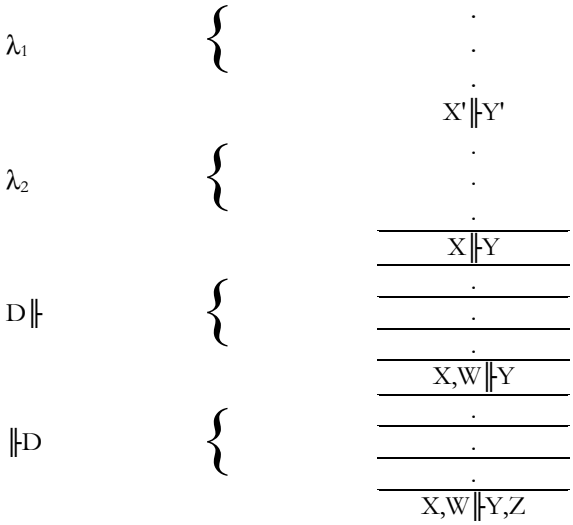
hay tres posibilidades, según las convenciones de representación acordadas: R es ⊩D (SI y SC), R' es D⊩, o X"⊩A,Y"y W",A⊩Z" son axiomas. En este último supuesto, la demostración puede reescribirse más apropiadamente como



que se transformaría en



Como los dos casos restantes son similares, se expone únicamente el primero. Si R es ⊩D, la demostración obtenida es



En las demostraciones de la eliminabilidad de la regla de Corte para SM, SI y SC intervienen los mismos mecanismo, aunque el enunciado del lema fundamental para SC difiere de su enunciado para SM y SI. Por ello, la eliminabilidad de Corte se demuestra para SC, indicándose después la formulación del lema fundamental para los sistemas restantes.

LEMA 4. Sean λ una demostración en SC de un secuente $X \vdash Y$ y π una demostración en SC de un secuente $W \vdash Z$ tales que $g(\lambda)$, $g(\pi)<c(A)$. Entonces existe una demostración μ en SC de $X,W\text{-}A \vdash Y\text{-}A,Z$, $g(\mu)<c(A)$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre $alt(\lambda)+alt(\pi)=n$; así, la demostración se articula como sigue:

BASE, n=2; se procede por (sub)inducción sobre $long(\lambda)+long(\pi)=m$. 1.1 Si m=2, $X \vdash Y$ y $W \vdash Z$ son axiomas; 1.2 si m>2 λ o π termina con una aplicación de una regla de datos...

DE k A k+1; hay que considerar los casos en los que λ y π concluyen aplicando una regla operacional o Corte (2.1, 2.2,...).

1.1 λ y π son axiomas, $B \vdash B$ y $C \vdash C$, respectivamente. Si B=C=A, $X,W\text{-}A \vdash Y\text{-}A,Z$ es $A \vdash A$. Si B≠A, $X,W\text{-}A \vdash Y\text{-}A,Z$ es $B,\{C\}\text{-}A \vdash B,C$; en cuyo caso,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{B,\{C\}\text{-}A \vdash B}\,[D\vdash]}{B,\{C\}\text{-}A \vdash C,B}\,[\vdash D]}{B,\{C\}\text{-}A \vdash B,C}\,[\vdash P]$$

Finalmente, si C≠A y por consiguiente $X,W\text{-}A \vdash Y\text{-}A,Z$ es $B,C \vdash \{B\}\text{-}A,C$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C \vdash C}{C,B \vdash C}\,[D\vdash]}{B,C \vdash C}\,[P\vdash]}{B,C \vdash \{B\}\text{-}A,C}\,[\vdash P]$$

1.2 Al menos una de las dos λ o π es de la forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Sigma\end{array}}{\Sigma'}\,[R]$$

donde R es una regla de datos. El esquema de razonamiento es en todos los casos el mismo: se aplica la hipótesis de (sub)inducción sobre Σ y R sobre el secuente resultante. Por ejemplo,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\lambda\\ \vdots\\ X' \vdash Y\end{array}}{X',B \vdash Y}\,[D\vdash]$$

La hipótesis de (sub)inducción da

$$[P\vdash]\quad\left\{\begin{array}{c}\mu\\ \vdots\\ X',W\text{-}A \vdash Y\text{-}A,Z\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ X',B,W\text{-}A \vdash Y\text{-}A,Z\end{array}\right.$$

2. Convengamos en representar λ y π como sigue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\lambda\\ \vdots\\ X \vdash Y\end{array}}{}\,[R]\qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ W \vdash Z\end{array}}{}\,[R']$$

Se consideran entonces cinco (grupos de) casos: 2.1 R o R' es una regla de datos, 2.2 R o R' es la regla de Corte, 2.3 R es una regla operacional que no se aplica para introducir el símbolo lógico

principal de A por la derecha, 2.4 R' es una regla operacional que no se aplica para introducir el símbolo lógico principal de A por la izquierda, y 2.5 R y R' son, respectivamente, las reglas de introducción del símbolo lógico principal de A por la derecha y por la izquierda.

2.1 Como la aplicación de una regla de datos no altera la altura de una demostración, uno puede remontarse hasta encontrar una aplicación de una regla que no sea de datos o un axioma, procediendo entonces como en el caso correspondiente para aplicar a continuación reglas de datos.

2.2 Para mayor concreción supongamos que R es una aplicación de Corte (X=X',X" y Y=Y',Y").

$$\dfrac{\begin{array}{c}\lambda\\ \vdots \\ X' \vdash B, Y' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \\ X'', B \vdash Y'' \end{array}}{X', X'' \vdash Y', Y'} \text{ [Corte]}$$

Por hipótesis de inducción,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mu\\ \vdots \\ X', W\text{-}A \vdash B, Y'\text{-}A, Z \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \\ X'', B, W\text{-}A \vdash Y''\text{-}A, Z \end{array}}{X', W\text{-}A, X'', W\text{-}A \vdash Y'\text{-}A, Z, Y''\text{-}A, Z} \text{ [Corte]}$$

R. de datos $\left\{ \begin{array}{c} \\ \vdots \\ \\ X', X''\text{-}A, W\text{-}A \vdash Y'\text{-}A, Y''\text{-}A, Z \end{array} \right.$

El caso restante se trata de forma análoga.

2.3 El procedimiento general es el siguiente: aplíquese R sobre el secuente proporcionado por hipótesis de inducción sobre la(s) premisa(s) de R. Así,

[⊢&]

$$\dfrac{\begin{array}{c}\lambda\\ \vdots \\ X \vdash B, Y' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \\ X \vdash C, Y' \end{array}}{X \vdash B \& C, Y'}$$

Se transforma en

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mu\\ \vdots \\ X, W\text{-}A \vdash B, Y'\text{-}A, Z \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \\ X, W\text{-}Z \vdash C, Y'\text{-}A, Z \end{array}}{X, W\text{-}A \vdash B \& C, Y'\text{-}A, Z}$$

[&⊢]

$$\dfrac{\begin{array}{c}\lambda\\ \vdots \\ X', B \vdash Y \end{array}}{X', B \& C \vdash Y} \quad \text{se transforma en} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mu\\ \vdots \\ X', B, W\text{-}Z \vdash Y\text{-}A, Z \end{array}}{X', B \& C, W\text{-}A \vdash Y\text{-}A, Z}$$

etc.

2.4 Es el dual del caso precedente y se trata, *mutatis mutandis*, del mismo modo.

2.5 Estos son los casos claves que, como se verá, sacan a la luz la simetría de las reglas operacionales de introducción por la izquierda y por la derecha de cada operador. El quid consiste, en todos los subcasos a considerar, en aplicar Corte con una fórmula de corte B tal que c(B)<c(A).

[&]

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\lambda & \pi\\ \vdots & \vdots\\ X\vdash B,Y' & X\vdash C,Y'\end{array}}{X\vdash B\&C,Y'}\ \vdash\& \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ W',B\vdash Z\end{array}}{W',B\&C\vdash Z}\ \&\vdash$$

Aplicando la hipótesis de inducción a X⊢B,Y' y W',B&C⊢Z, por una parte, y a X⊢B&C,Y' y W',B⊢Z, por la otra, se tiene (adviértase que X,(W',B)-A⊢(B&C,Y')-A,Z es X,W'-A,B⊢Y'-A,Z),

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mu\\ \vdots\\ X,W'\text{-}A\vdash(B,Y')\text{-}A,Z \qquad X,W'\text{-}A,B\vdash Y'\text{-}A,Z\end{array}}{X,W'\text{-}A,X,W'\text{-}A\vdash Y'\text{-}A,Z,Y'\text{-}A,Z}\ \begin{array}{l}\text{hip.ind.}\\ \text{[Corte]}\end{array}$$

$$\text{R. de datos}\ \left\{\begin{array}{c}\vdots\\ X,W'\text{-}A\vdash Y'\text{-}A,Z\end{array}\right.$$

[v]

$$[\vdash\vee]\ \dfrac{\begin{array}{cc}\lambda & \pi\\ \vdots & \vdots\\ X\vdash B,Y' & W',B\vdash Z \quad W',C\vdash Z\end{array}}{X\vdash BvC,Y' \qquad W',BvC\vdash Z}\ \vee\vdash]$$

Aplicando la hipótesis de inducción a X⊢B,Y' y W',BvC⊢Z, por una parte, y a X⊢BvC,Y' y W',B⊢Z, por la otra, se tiene

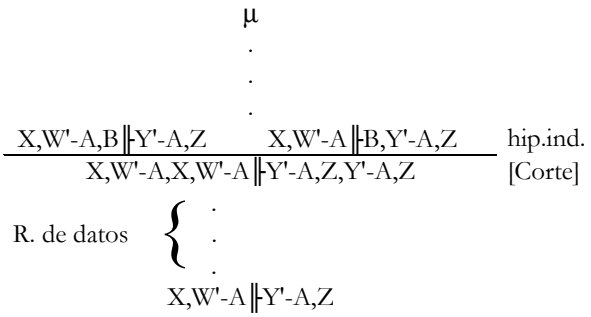
$$\dfrac{\begin{array}{c}\mu\\ \vdots\\ X,W'\text{-}A\vdash B,Y'\text{-}A,Z \qquad X,W'\text{-}A,B\vdash Y'\text{-}A,Z\end{array}}{X,W'\text{-}A,X,W'\text{-}A\vdash Y'\text{-}A,Z,Y'\text{-}A,Z}\ \begin{array}{l}\text{hip.ind.}\\ \text{Corte}\end{array}$$

$$\text{R. de datos}\ \left\{\begin{array}{c}\vdots\\ X,W'\text{-}A\vdash Y'\text{-}A,Z\end{array}\right.$$

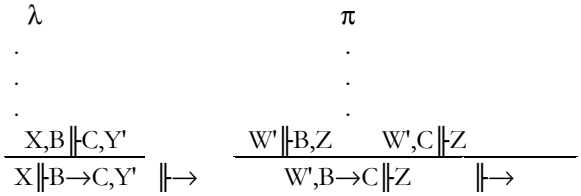
[¬]

$$[\vdash\neg]\ \dfrac{\begin{array}{cc}\lambda & \pi\\ \vdots & \vdots\\ X,B\vdash Y' & W'\vdash B,Z\end{array}}{X\vdash\neg B,Y' \qquad W',\neg B\vdash Z}\ \neg\vdash]$$

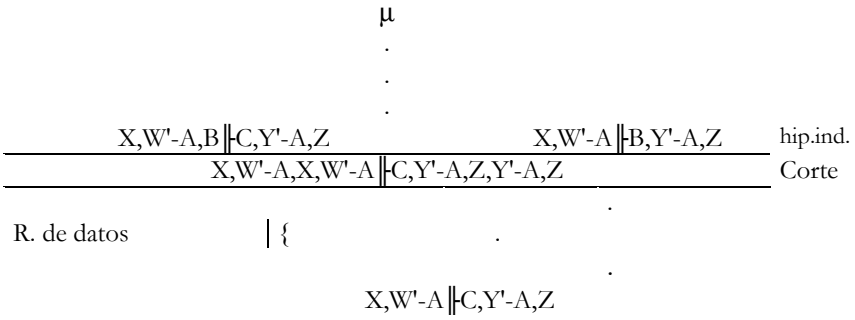
Aplicando la hipótesis de inducción a X,B⊢Y' y W',¬B⊢Z, por una parte, y a X⊢¬B,Y' y W'⊢B,Z, por la otra, y sirviéndose de reglas de datos se obtiene



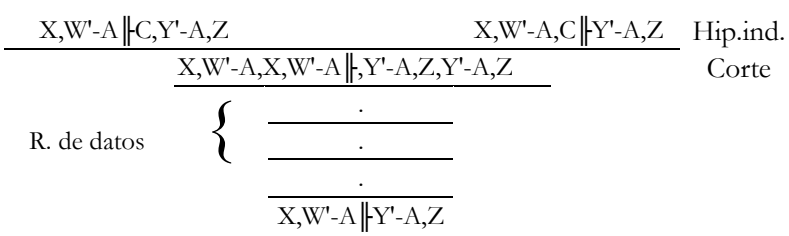
[→]



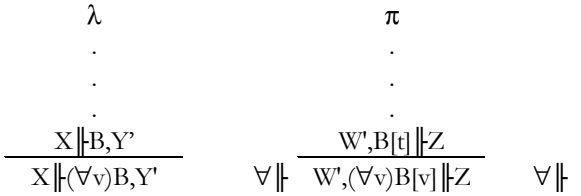
Aplicando la hipótesis de inducción a la premisa de [╟→] en λ y al último secuente de π, por una parte, y a la premisa izquierda de [→╟] en π y a la última fórmula de λ, por la otra, se tiene, no sin el inevitable concurso de reglas de datos,



La demostración prosigue recurriendo ahora a la hipótesis de inducción para la premisa derecha de [→╟] en π y a la última fórmula de λ:



[∀]



Donde, en λ, la variable 'v' no está libre en X, Y. Aplicando la hipótesis de inducción a la premisa de [╟∀] en λ y al último secuente de π, por una parte, y a la premisa de [∀╟] en π y a la última fórmula de λ, por la otra, se obtendrían, utilizando de reglas de datos, senda demostraciones

$$\begin{array}{cc} \mu' & \mu'' \\ \vdots & \\ X,W'\text{-}A \Vdash B[v],Y'\text{-}A,Z & X,W'\text{-}A,B[t] \Vdash Y'\text{-}A,Z \end{array}$$

La dificultad reside en que siendo B[v] y B[t] distintas no puede aplicarse la regla de Corte.

Veamos cómo obtener a partir de λ una demostración de $X \Vdash B[t],Y'$ -o de un secuente equivalente. Las convenciones establecidas en su momento permiten suponer que λ cumple las condiciones:
(1) ningún secuente en λ contiene ocurrencias libres y ligadas de una misma variable,
(2) las variables dependientes de las aplicaciones de las reglas $\Vdash\forall$ y $\exists\Vdash$ en λ son distintas entre sí,
(3) todas las ocurrencias de una variable ligada de una fórmula B en un secuente de λ caen bajo el alcance de una misma ocurrencia de un cuantificador.

Sean $x_1,...,x_j$ las variables de t. Constrúyase una demostración λ' que, además de 1-3, satisfaga el requisito de que las x_i, $1 \leq i \leq j$, no ocurren ligadas en ninguna fórmula de un secuente de λ' ni como variables dependientes en la aplicación de las reglas $\Vdash\forall$ y $\exists\Vdash$. Sustituyendo v por t en λ' se obtiene entonces una demostración λ'' de $X \Vdash B[t],Y'$. Esta demostración permite el usual corte «cruzado»:

$$\begin{array}{cc} \mu' & \mu'' \\ \vdots & \vdots \\ X,W'\text{-}A \Vdash B[t],Y'\text{-}A,Z & X,W'\text{-}A,B[t] \Vdash Y'\text{-}A,Z \end{array}$$
$$\frac{}{X,W'\text{-}A,X,W'\text{-}A \Vdash ,Y'\text{-}A,Z,Y'\text{-}A,Z} \quad \text{Corte}$$
$$\text{R. de datos} \left\{ \begin{array}{c} \vdots \end{array} \right.$$
$$X,W'\text{-}A \Vdash C,Y'\text{-}A,Z$$

[∃]

$$\begin{array}{ccc} \lambda & & \pi \\ X \Vdash B[t],Y' & & W',B[v] \Vdash Z \\ \vdots & & \vdots \\ \Vdash\exists \quad X \Vdash (\exists v)B[v],Y' & & W',(\exists v)B[v] \Vdash Z \quad \Vdash\exists \end{array}$$

Reemplazando $W',B[v] \Vdash Z$ por $W',B[t] \Vdash Z$ como en el caso precedente, y aplicando la hipótesis de inducción, por una parte, a $X \Vdash B[t],Y'$ y $W',(\exists v)B[v] \Vdash Z$, y, por la otra, a $W',B[t] \Vdash Z$ y $X \Vdash (\exists v)B[v],Y'$, se llega a

$$\begin{array}{cc} \mu' & \mu'' \\ \vdots & \vdots \\ X,W'\text{-}A \Vdash B[t],Y'\text{-}A,Z & X,W'\text{-}A,B[t] \Vdash Y'\text{-}A,Z \end{array}$$
$$\frac{}{X,W'\text{-}A,X,W'\text{-}A \Vdash ,Y'\text{-}A,Z,Y'\text{-}A,Z} \quad [\text{Corte}]$$
$$\left. \begin{array}{c} \vdots \end{array} \right\} \quad \text{R. de datos}$$
$$X,W'\text{-}A \Vdash C,Y'\text{-}A,Z$$

⊣

TEOREMA 11. Si hay una demostración λ en SC de X⊩Y, g(λ)>0 entonces hay una demostración π de X⊩Y en SC, g(π)=g(λ)-1.

DEMOSTRACIÓN. Sea pues λ una demostración en SC del secuente X⊩Y, g(λ)=k. Búsquese la primera aplicación de Corte en π de grado k. Por tanto, λ puede representarse como

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mu\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ U\Vdash V\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c}\vdots\\ W\Vdash Z\end{array}\right.\\ \nu\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ U,W\text{-}A\Vdash V\text{-}A,Z\end{array}\right.\end{array}}{X\Vdash Y}\ [\text{Corte}]$$

donde 'A' es la fórmula de corte, c(A)=k, y las subdemostraciones de U⊩V y W⊩Z son de grado menor que k. Por el lema 4, hay una demostración ξ en SC de U,W-A⊩V-A,Z, g(ξ)<k. Reemplácese entonces λ por

$$\begin{array}{c}\xi\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ U,W\text{-}A\Vdash V\text{-}A,Z\end{array}\right.\\ \nu\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ X\Vdash Y\end{array}\right.\end{array}$$

Si no hay ninguna aplicación de Corte de grado k, esta demostración es π. En caso contrario, búsquese la primera aplicación de Corte de grado k en esta demostración y procédase como antes. Iterando el procedimiento tantas veces como sea preciso se obtiene una demostración π, g(π)<k. ⊣

Usando reiteradamente el teorema 11 se demuestra el teorema de eliminación de la regla de Corte:

COROLARIO 5. Si X⊩Y es demostrable en SC entonces existe una demostración π de X⊩Y en SC, g(π)=0.

En lo sucesivo designaremos por medio de la expresión SC⁻ al sistema de cálculo secuencial resultante de omitir en SC la regla de Corte. El corolario 5 establece que los secuentes demostrables en SC y SC⁻ son exactamente los mismos.

No obstante, la eliminación de la regla de Corte -ventajosa a otros respectos -puede tener un coste en términos de complejidad. Dadas dos demostraciones λ de X⊩A,Y y π de W,A⊩Z, la regla de Corte proporciona una demostración de X,W⊩Y,Z cuya altura es máx(alt(λ),alt(π))+1 y su grado n+1≥c(A). Defínase 4[n](k) como sigue: 4[0](k)=k; $4[p+1](k)=4^{4[p]k}$. La demostración de X,W⊩Y,Z obtenida a través de la eliminación de Corte tiene altura ≤4[n](k).

La eliminación de la regla de Corte para los sistemas SM y SI (y así la génesis de los sistemas SM⁻ y SI⁻ se ajusta al patrón que acabamos de ver. Las únicas novedades son que en su demostración habrá que considerar menos reglas de datos y la formulación del lema principal:

LEMA 5. Sean λ una demostración en SM/SI de un secuente X⊩A y π una demostración en SM/SI de un secuente (i) W⊩B o (ii) W⊩, tales que g(λ), g(π)<c(A). Entonces existe una demostración μ en SM/SI de (i) X,W-A⊩B o (ii) X,W-A⊩, g(μ)<c(A).

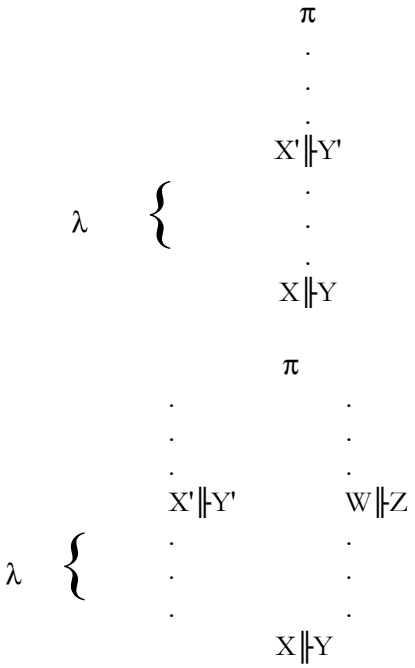
COROLARIO 6. Si X⊩Y es demostrable en SM/SI entonces existe una demostración π de X⊩Y en SM/SI, g(π)=0.

Los teoremas de eliminación (corolarios 5 y 6) pueden verse de dos modos levemente distintos:
[A] con respecto a los SS, establecen que la regla Corte es *eliminable*: si hay una demostración de X⊩Y en SS, hay una demostración sin regla de corte;
[B] con respecto a los SS$^-$, establecen que la regla Corte es *admisible*: si X⊩A,Y y W,A⊩Z son SC$^-$-demostrables, también lo es X,W⊩Y,Z; si si X⊩A y W,A⊩Z son SM$^-$/SI$^-$-demostrables, también lo es X,W⊩Z.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS SS$^-$.

Ya se ha señalado que lo que priva a los sistemas de cálculo de secuentes con regla de Corte de la propiedad de subfórmulas es justamente la presencia de esa regla. Por consiguiente,

TEOREMA 12. Si un secuente X⊩Y domina a un secuente X'⊩Y' en una demostración π en SS$^-$ entonces para toda fórmula A que ocurre en X'⊩Y' hay una fórmula B que ocurre en X⊩Y y A∈SFG(B).
DEMOSTRACIÓN. Si X⊩Y domina a X'⊩Y' en π, ésta es de una de las formas:



La demostración procede entonces por inducción sobre la longitud de la subdemostración π. Como no ofrece dificultad alguna, queda para el lector.

Dos propiedades de los sistemas secuenciales asociadas a la ausencia de una regla de contracción generalizada en el consecuente son:

1] SS tiene la *propiedad de disyunción* syss, para cualesquiera fórmulas A y B de $\mathcal{P}$, si ⊩AvB es demostrable en SS entonces ⊩A o ⊩B es demostrable en SS;

2] SS tiene la *propiedad de existencia* syss, para cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, si ⊩(∃v)A es demostrable en SS entonces para algún término t de $\mathcal{P}$, ⊩A[t] es demostrable en SS.

TEOREMA 13. SM$^-$ y SI$^-$ tienen las propiedades de disyunción y existencia.
DEMOSTRACIÓN. Para la lógica mínima, el resultado es una consecuencia inmediata de la ausencia de reglas de contracción en el consecuente. Para la lógica intuicionista, la presencia de una forma debilitada de contracción en el consecuente obliga establecer la no-derivabilidad del secuente ⊩ (con antecedente y consecuente vacío). Adviértase a este respecto que (1) el secuente vacío ⊩ no es un axioma de SI$^-$, (2) el secuente vacío no puede dominar a ningún secuente no-vacío (es una consecuencia del teorema 12).

El cálculo de secuentes clásico, SC, carece de estas propiedades, debido a la presencia de la regla ⊩D, como ilustran los ejemplos siguientes.

$$\dfrac{p \Vdash p}{\Vdash \neg p, p}\ [\Vdash\neg] \qquad \text{Axioma}$$
$$\dfrac{\Vdash \neg p, p}{\Vdash p \vee \neg p, p}\ [\Vdash\vee]$$
$$\dfrac{\Vdash p \vee \neg p, p}{\Vdash p, p \vee \neg p}\ [\Vdash P]$$
$$\dfrac{\Vdash p \vee \neg p, p \vee \neg p}{\Vdash p \vee \neg p}\ [\Vdash C]$$

$$\dfrac{P^1x \Vdash P^1x}{P^1x, P^1a \Vdash P^1x}\ [D\Vdash] \qquad \text{Axioma}$$
$$\dfrac{P^1x, P^1a \Vdash P^1x}{P^1x, P^1a \Vdash P^1x, (\forall y)P^1y}\ [\Vdash D]$$
$$\dfrac{P^1x, P^1a \Vdash P^1x, (\forall y)P^1y}{P^1a, P^1x \Vdash P^1x, (\forall y)P^1y}\ [P\Vdash]$$
$$\dfrac{P^1a, P^1x \Vdash (\forall y)P^1y, P^1x}{P^1a, P^1x \Vdash (\forall y)P^1y, P^1x}\ [\Vdash P]$$
$$\dfrac{P^1a \Vdash P^1x \rightarrow (\forall y)P^1y, P^1x}{P^1a \Vdash P^1x \rightarrow (\forall y)P^1y, P^1x}\ [\Vdash\rightarrow]$$
$$\dfrac{P^1a \Vdash (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y), P^1x}{P^1a \Vdash (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y), P^1x}\ [\Vdash\exists]$$
$$\dfrac{P^1a \Vdash P^1x, (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y)}{P^1a \Vdash P^1x, (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y)}\ [\Vdash P]$$
$$\dfrac{P^1a \Vdash (\forall x)P^1x, (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y)}{\Vdash P^1a \rightarrow (\forall x)P^1x, (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y)}\ [\Vdash\forall]$$
$$\dfrac{\Vdash P^1a \rightarrow (\forall x)P^1x, (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y)}{\Vdash (\exists y)(P^1y \rightarrow (\forall x)P^1x), (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y)}\ [\Vdash\exists]$$
$$\dfrac{\Vdash (\exists y)(P^1y \rightarrow (\forall x)P^1x), (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y)}{\Vdash (\exists y)(P^1y \rightarrow (\forall x)P^1x)}\ [\Vdash C]$$

Como se advertirá, ambas demostraciones terminan, y no por casualidad, con una aplicación de la regla de contracción en el consecuente.

Lo más parecido a la propiedad de la disyunción que puede demostrarse para SC⁻ es la razonabilidad en el sentido de Hallden. Una relación de consecuencia ⊢ es razonable en el sentido de Hallden syss para cualesquiera fórmulas A y B, si ⊢A∨B y A y B no tienen letras relacionales en común entonces ⊢A o ⊢B.

LEMA 6. Sea X⊩Y un secuente demostrable en SC⁻ y sean X_1 y X_2 sendos conjuntos de fórmulas tales que para toda fórmula A que ocurre en la secuencia X, A∈X_1 o A∈X_2; análogamente, sean Y_1 e Y_2 dos conjuntos de fórmulas tale que para toda fórmula B de la secuencia Y, B∈Y_1 o B∈Y_2 . Si Z es un conjunto de fórmulas, R(*Z*) designa al conjunto de las letras relacionales con ocurrencias en fórmulas de Z. Si $R(X_1 \cup Y_1) \cap R(X_2 \cup Y_2) = \varnothing$ entonces uno de los secuentes $X_1 \Vdash Y_1$ o $X_2 \Vdash Y_2$ es demostrable en SC⁻.

DEMOSTRACIÓN. Adviértase antes de emprender la demostración, que para construir un secuente a partir de los *conjuntos* X_i , Y_i hay que construir sendas secuencias con sus elementos, y por ello que el enunciado del lema no es totalmente preciso. La demostración se realiza por inducción sobre la longitud de la demostración π de X⊩Y. Si l(π)=1 X⊩Y es A⊩A, lo mismo que $X_1 \Vdash Y_1$. Sea pues l(π)=n+1 y asúmase que el lema vale para secuentes con demostraciones de longitud ≤n. Hay que considerar tantos subcasos como reglas. En los casos de las reglas de permutación y contracción, la demostración es inmediata, puesto que al tratar con conjuntos el número de ocurrencias de las fórmulas y el orden dentro del antecedente y del consecuente es irrelevante. Para las reglas de debilitamiento y las reglas operacionales, úsese la hipótesis de inducción y aplíquese entonces la regla correspondiente. A título de ejemplo se desarrollan los casos de las reglas del negador.

$$\Vdash\neg \quad \dfrac{X, A \Vdash Y}{X \Vdash \neg A, Y}$$

Para mayor concrección, supóngase que ¬A∈Y_1. Si $R(X_1 \cup Y_1 \cup \{\neg A\}) \cap R(X_2 \cup Y_2) = \varnothing$ entonces $R(X_1 \cup Y_1 \cup \{A\}) \cap R(X_2 \cup Y_2) = \varnothing$. Por hipótesis de inducción, $X_1, A \Vdash Y_1$ o $X_2 \Vdash Y_2$ es demostrable, y así, por ¬⊩ , $X_1 \Vdash \neg A, Y_1$ o $X_2 \Vdash Y_2$ es demostrable.

$$\neg\vdash \quad \frac{X\vdash A,Y}{X,\neg A\vdash Y}$$

Supóngase, tanto da, que $\neg A\in X_1$. Si $R(X_1\cup Y_1\cup\{\neg A\})\cap R(X_2\cup Y_2)=\varnothing$ entonces $R(X_1\cup Y_1\cup\{A\})\cap R(X_2\cup Y_2)=\varnothing$. Por hipótesis de inducción, uno de los secuentes $X_1\vdash A,Y_1$ o $X_2\vdash Y_2$ es demostrable y entonces por $\neg\vdash$ $X_1,\neg A\vdash,Y_1$ o $X_2\vdash Y_2$ es demostrable.

⊣

COROLARIO 6. Si $\vdash A,B$ es demostrable en SC y $R(A)\cap R(B)=\varnothing$ entonces $\vdash A$ es demostrable en SC o $\vdash B$ es demostrable en SC.

DEMOSTRACIÓN. Empleando las metavariables como en el lema 6, tómese $X_1=X_2=\varnothing$, $Y_1=\{A\}$, $Y_2=\{B\}$.

⊣

Para llegar a la conclusión de que SC^- es razonable en el sentido de Hallden, aún se necesita un lema adicional. Escribiremos $X(A_1,\ldots,A_n)$ para indicar que las fórmulas $A_1,\ldots,A_n$ ocurren en la estructura X, sin precisar su posición dentro de esa estructura.

LEMA 7. $X\vdash Y(A_1\vee B_1,\ldots,A_n\vee B_n)$ es demostrable en SC^- syss $X\vdash Y(A_1,B_1,\ldots,A_n,B_n)$ es demostrable en SC^-.

DEMOSTRACIÓN. De derecha a izquierda basta con iterar las veces que sea preciso el siguiente esquema derivacional:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{X\vdash Y \quad \text{Hipótesis}}{\left.\begin{array}{c}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array}\right\}\ \vdash P}}{X\vdash A,B,Z}}{X\vdash A\vee B,B,Z}\ \vdash\vee}{X\vdash B,A\vee B,Z}\ \vdash P}{X\vdash A\vee B,A\vee B,Z}\ \vdash\vee}{X\vdash A\vee B,Z}\ \vdash C$$

De izquierda a derecha se procede una vez más por inducción sobre la longitud de la demostración π de $X\vdash Y$. Si $l(\pi)=1$, $X\vdash Y$ es $A\vee B\vdash A\vee B$. La demostración correspondiente es:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A\vdash A}{A\vdash B,A}\ \vdash D \qquad \cfrac{B\vdash B}{B\vdash A,B}\ \vdash D}{A\vdash A,B}}{A\vee B\vdash A,B}\ \vee\vdash$$

En el paso de n a n+1, las demostraciones para los casos de reglas que manipulan los antecedentes son inmediatas, y lo mismo sucede con las regla de permutación en el consecuente y las de los operadores distintos de $\vee$. Por tanto, restan por analizar tres casos: $\vdash D$, $\vdash C$ y $\vdash\vee$.

$$\frac{X\vdash Y}{X\vdash A\vee B,Y}\ \vdash D \quad \text{es reemplazada por} \quad \cfrac{\cfrac{X\vdash Y}{X\vdash B,Y}\ \vdash D}{X\vdash A,B,Y}\ \vdash D$$

$$\frac{X\vdash A\vee B,.A\vee B,}{X\vdash A\vee B,Y}\ \vdash C \quad \text{es reemplazada por} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{X\vdash A,B,A,B,Y}{X\vdash A,A,B,B,Y}\ \vdash P}{X\vdash A,B,B,Y}\ \vdash C}{X\vdash B,A,B,Y}\ \vdash P}{X\vdash B,B,A,Y}\ \vdash P}{X\vdash B,A,Y}\ \vdash C}{X\vdash A,B,Y}\ \vdash P \quad \text{hip.ind.}$$

$$\frac{X\vdash B,Y}{X\vdash A\vee B,Y}\ \vdash\vee \quad \text{es reemplazada por} \quad \frac{X\vdash B,Y}{X\vdash A,B,Y}\ \vdash D$$

⊣

COROLARIO 7. Si ⊢A∨B es demostrable en SC⁻ y R(A)∩R(B)=∅ entonces o bien ⊢A es demostrable en SC⁻ o bien ⊢B es demostrable en SC⁻.

DEMOSTRACIÓN. Si ⊢A∨B es demostrable en SC⁻ , por el lema 7 lo es ⊢A,B y dado que A y B no tenen letras relacionales en común, del corolario 6 se sigue que o bien ⊢A es demostrable en SC⁻ o bien ⊢B es demostrable en SC⁻.

⊣

ELIMINACIÓN DE REGLAS ESTRUCTURALES PARA FÓRMULAS COMPLEJAS.

La regla de corte es la única regla cuya conclusión es menos compleja que sus premisas (el rasgo definitorio de las reglas de razonamiento según lo expuesto en el capítulo 1). Por consiguiente, mientras no se use la regla de Corte, una demostración será, en un sentido bastante literal, constructiva: consistirá en la construcción de fórmulas progresivamente más complejas a partir de sus componentes. Este aspecto constructivo de las demostraciones en los cálculos de secuentes sin Corte puede reforzarse en el caso de la lógica clásica eliminando los axiomas en los que c(A)>0 y restringiendo las reglas de debilitamiento a aquellos casos en los que su fórmula principal es atómica.[10]

Sea SC* el cálculo de secuentes cuyos axiomas son todos los secuentes de la forma

$$A \vdash A, \text{ si } c(A)=0$$

y cuyas reglas operacionales y estructurales son las de SS⁻, salvo D⊢ y ⊢D, que son reemplazadas por

$$[d\vdash]^{(*)} \quad \frac{X \vdash Y}{X,A \vdash Y} \qquad\qquad [\vdash d]^{(*)} \quad \frac{X \vdash Y}{X \vdash A,Y}$$

(*) c(A)=0.

La eliminabilidad de los axiomas y debilitamientos complejos puede formularse así:

TEOREMA 14. X⊢Y es demostrable en SC* syss es demostrable en SC⁻.

DEMOSTRACIÓN. Obviamente cualquier secuente SC* demostrable es SC⁻demostrable. Para la conversa basta con demostrar que para cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, (1) A⊢A es SC* demostrable, y (2) que si X⊢Y es SC* demostrable entonces también lo es X,A⊢Y -en ambos casos procédase por inducción sobre c(A).

⊣

La eliminabilidad de los axiomas complejos también vale para las lógicas mínima e intuicionista, pero no sucede lo mismo con debilitamiento. La dificultad en SM⁻ (la situación con SI⁻ no difiere sustancialmente) es que D⊢ permite introducir en el antecedente cualquier fórmula, y por consiguiente una negación o una fórmula condicional. Para demostrar la eliminabilidad de D⊢ en presencia de d⊢ hay que mostrar que una aplicación de la primera regla con una fórmula principal A, puede sustituirse por otra aplicación de esa misma regla cuya fórmula principal es de complejidad <c(A). La sustitución en una demostración de una aplicación de D⊢ como las descritas por otra aplicación con una fórmula principal de complejidad menor requeriría el concurso de la regla ⊢D:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{SM^-}{\vdots}}{\vdots}}{\vdots}}{X \vdash Y}}{X,\neg A \vdash Y}\ [D\vdash]$$

[10] Para una discusión de este punto -y una reflexión sobre la importancia del teorema de eliminación de Corte- véase I. Hacking, 'What is Logic?` en Gabbay [1994].

se convertiría en

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{SM\text{-}D \Vdash +d \Vdash}}{\cdot}}{\cdot}}{\cdot}}{X \Vdash A,Y}}{X,\neg A \Vdash Y}\ [\neg \Vdash] \qquad \Big\} \text{ [hip.ind.?]}$$

y análogamente,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{SM\text{-}}}{\cdot}}{\cdot}}{\cdot}}{X \Vdash Y}}{X,A \to B \Vdash Y}\ [D \Vdash]$$

se convertiría en

$$\dfrac{\dfrac{\cdot}{\cdot}}{\cdot}\ \Big\} \text{ [hip.ind.?]}$$

$$\dfrac{X \Vdash A,Y \qquad X,B \Vdash Y}{X,A \to B \Vdash Y}\ [\to \Vdash]$$

Pero la premisa de [¬⊩], en el primer caso, y la premisa izquierda de [→⊩], en el segundo, pueden no ser secuentes mínimos/intuicionistas (i.e., si Y≠∅).

SISTEMAS DE POST.

Si Σ es un conjunto de secuentes de $\mathcal{P}$ y SS es cualquiera de los sistemas de cálculo de secuentes con regla de Corte descritos, designamos con 'SS ∪ Σ' al sistema resultante de incorporar a SS como axiomas los *secuentes* de Σ (y no los esquemas de secuente correspondientes). Se dice entonces que los elementos de Σ son los *axiomas propios* de SS ∪ Σ. Si

(1) Σ es cerrado bajo sustitución -es decir, se cumple que si X[v]⊩Y[v]∈Σ entonces para cualquier término t, X[t]⊩Y[t]∈Σ), y

(2) si X⊩Y∈Σ entonces c(X⊩Y)=0 -es decir, el secuente contiene únicamente fórmulas atómicas,

se dice que SS ∪ Σ es un *sistema de Post* para SS.

EJEMPLOS.

[1] *Identidad*. Prolenguaje: se añade a $\mathcal{P}$ el símbolo relacional binario '='.

$SC^{=}$ = SC ∪ ...

⊩t=t

t=s, A[t]⊩A[s], si c(A)=0

[2] *Aritmética elemental*[11] . Prolenguaje: *variables individuales*: x,y,z,...; *letras relacionales binarias*: =,<; *letras funcionales*: 0 (0-aria), s^1 (unaria), +,• (binarias).

SC^{AE} = $SC^{=}$ ∪ ...

⊩t+0=t

⊩t+s^1(t')=s^1(t+t')

[11] Es una práctica común identificar la aritmética elemental, AE, con el conjunto de las *fórmulas* demostrables en SC^{AE}.

$\vdash t\bullet 0=0$
$\vdash t\bullet s^1(t')=t\bullet(t'+t)$
$t<0\vdash$
$t<t'\vdash t<s^1(t')$
$t=t'\vdash t<s^1(t')$
$t<s^1(t')\vdash t<t',t=t'$
$\vdash t<t',t=t',t'<t$
$s^1(t)<0\vdash$
$s^1(t)=s^1(t')\vdash t=t'$

En general, hay que esperar que el teorema de eliminación de Corte falle para sistemas con axiomas propios: si $\vdash A\rightarrow B$ y $\vdash A$ son axiomas propios, $\vdash B$ es demostrable,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\quad\dfrac{}{B\vdash B}}{\vdash A\rightarrow B}\quad\dfrac{}{A,A\rightarrow B\vdash B}}{\vdash A}\quad\dfrac{}{A\vdash B}\qquad\dfrac{}{\vdash B}$$

Axiomas; [→⊢]; [Corte]; [Corte]

aunque no sin el concurso de la regla de Corte.

TEOREMA 15. Si SS $\cup$ Σ es un sistema de Post (SS=SM, SI, SC) entonces todo secuente demostrable en SS $\cup$ Σ tiene una demostración de grado ≤ 1.

DEMOSTRACIÓN. Por definición, los axiomas propios de un sistema de Post son atómicos, y por eso lo que hay que establecer es que si un secuente es demostrable entonces hay una demostración de ese secuente en la que todas las fórmulas de Corte aparecen en algún secuente de ρ. Para ello redefínase el grado de una demostración en SS $\cup$ Σ del siguiente modo: el grado de π es el mayor de entre los grados de las aplicaciones de Corte cuya fórmula de Corte no ocurre en ningún axioma propio. Demuéstrese entonces el análogo del lema 4 (cuando A no ocurre en ningún axioma propio).

$\dashv$

TEOREMA DEL SECUENTE MEDIO.

Una *fórmula prenexa* A es una fórmula de $\mathcal{P}$ de la forma $(Q_1v_1),...,(Q_jv_j)B$ donde los Q_i, $1\leq i\leq j$, son cuantificadores y RQ(B)=0. Dos fórmulas A y B de $\mathcal{P}$ son SS-equivalentes syss los secuentes $A\vdash B$ y $B\vdash A$ son demostrables en SS.

TEOREMA 16. Toda fórmula A tiene una fórmula prenexa SC-equivalente.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, se comprueba la equivalencia de los siguientes pares de fórmulas:

$A\bigcirc B$	$B\bigcirc A$
$(\forall v)A\bigcirc B$	$(\forall v)(A\bigcirc B)^*$
$(\exists v)A\bigcirc B$	$(\exists v)(A\bigcirc B)^*$
$\neg\neg A$	A
$\neg(\forall v)A$	$(\exists v)\neg A$
$\neg(\exists v)A$	$(\forall v)\neg A$
$\neg(A\&B)$	$\neg A\vee\neg B$
$\neg(A\vee B)$	$\neg A\&\neg B$
$\neg(A\rightarrow B)$	$A\&\neg B$
$(\forall v)A\rightarrow B$	$(\exists v)(A\rightarrow B)^{**}$
$(\exists v)A\rightarrow B$	$(\forall v)(A\rightarrow B)^{**}$
$A\rightarrow(\exists v)B$	$(\exists v)(A\rightarrow B)^*$
$A\rightarrow(\forall v)B$	$(\forall v)(A\rightarrow B)^*$

donde '$\bigcirc$' ha de reemplazarse (uniformemente) en los tres primeros casos por '&' o por 'v', (*) 'v' no está libre en A, y (**) 'v' no está libre en B.

A continuación se demuestra la siguiente versión de la admisibilidad de [**EQ**] (cfr. Cap.4):

Si A y A' son SC-equivalentes y la fórmula B' resulta de la fórmula B al sustituir algunas ocurrencias de A en B por ocurrencias de A', entonces B y B' son SC-equivalentes.

La demostración, como la de su análogo hilbertiano, se efectúa por inducción sobre c(B), y no ofrece especial dificultad. El paso siguiente es demostrar:: Si A y A' son SC-equivalentes y el secuente $X_1AX_2 \Vdash Y$ $(X \Vdash Y_1AY_2)$ es demostrable en SC entonces $X_1A'X_2 \Vdash Y$ $(X \Vdash Y_1A'Y_2)$ es demostrable en SC, que es una consecuencia más o menos inmediata de la (admisibilidad de la) regla de Corte:

$$\begin{array}{ccc}
 & \vdots \qquad\qquad \vdots & \\
 & X_1AX_2 \Vdash Y \qquad X \Vdash Y_1AY_2 & \\
\text{R.Dat.} \left\{ \right. & \vdots \qquad\qquad \vdots & \left. \right\} \text{R.Dat.} \\
\text{Hip.} & \dfrac{A' \Vdash A \quad X_1X_2,A \Vdash Y \qquad X \Vdash A,Y_1Y_2 \quad A \Vdash A'}{A',X_1X_2 \Vdash Y \quad \text{Corte} \quad X \Vdash Y_1,Y_2,A'} & \text{Hip.} \\
\text{R.Dat.} \left\{ \right. & \vdots \qquad\qquad \vdots & \left. \right\} \text{R.Dat.} \\
 & X_1A'X_2 \Vdash Y \qquad X \Vdash Y_1A'Y_2 &
\end{array}$$

Así las cosas, el uso reiterado de la regla de Corte permite «convertir» cualquier fórmula en una fórmula prenexa equivalente.

COROLARIO 9. Toda fórmula A tiene una fórmula prenexa SC^{*-}-equivalente.

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia inmediata de los teoremas 14 y 16 y del corolario 5. ⊣

En vez de decir que A' es una fórmula prenexa equivalente a A, suele decirse simplemente que A' es una forma prenexa de A.

LEMA 8. Si en $X \Vdash Y$ ocurren únicamente fórmulas prenexas y es demostrable en SC, entonces hay una demostración π de $X \Vdash Y$ en SC tal que

(1) todos los axiomas de π son de complejidad 0,

(2) todas las fórmulas principales de las aplicaciones de las reglas de debilitamiento son atómicas, y

(3) si [R] es una regla aplicada después de una aplicación de una regla operacional cuantificacional, entonces [R] es una regla estructural distinta de $D\Vdash$ y $\Vdash D$ o una regla operacional cuantificacional.

DEMOSTRACIÓN. Del teorema 14 se desprende la existencia de una demostración de $X \Vdash Y$ que cumple las dos primeras condiciones del lema. Además, el corolario 5 permite suponer que esa demostración está libre de aplicaciones de Corte. Sea en lo sucesivo λ una demostración de $X \Vdash Y$ que satisface todas estas exigencias. La demostración procede ahora por inducción sobre long(λ). Si λ es un axioma, $\lambda=\pi$. Para tratar los casos en los que long(λ)>1, convengamos en representar λ como

$$\begin{array}{c} \Theta \\ \vdots \\ W \Vdash Z \\ \hline X \Vdash Y \end{array} \ [R] \quad \text{o} \quad \begin{array}{cc} \Theta' & \Theta'' \\ \vdots & \vdots \\ W' \Vdash Z' & W'' \Vdash Z'' \\ \hline \multicolumn{2}{c}{X \Vdash Y} \end{array} \ [R]$$

según el número de premisas de [R]. *Caso 1*: [R] es una regla estructural distinta de las debilitamiento o una regla operacional cuantificacional y por tanto una regla con una premisa. Por hipótesis de inducción, hay una demostración ξ de la premisa $W \Vdash Z$ de [R] que cumpla las

condiciones 1-3; π resulta de ξ aplicando [R]. *Caso 2*: [R] es una regla de debilitamiento. Así, por ejemplo, para D$\Vdash$, se tendría

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Theta\\ \vdots\\ W \Vdash Z\end{array}}{W,A \Vdash Z}\ [D\Vdash]$$

donde C(A)=0. Por hipótesis de inducción, hay una demostración de W$\Vdash$Z de la forma

$$\begin{array}{l}\xi\ \left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\end{array}\right.\\ \qquad\quad \vdots\\ \qquad\quad U \Vdash V\\ \mu\ \left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\end{array}\right.\\ \qquad\quad \vdots\\ \qquad\quad W \Vdash Z\end{array}$$

donde ξ no contiene aplicaciones de reglas operacionales cuantificacionales y μ no contiene aplicaciones de reglas operacionales no cuantificacionales ni de D$\Vdash$ o $\Vdash$D. π se construye del siguiente modo:

$$\begin{array}{l}\xi\ \left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\end{array}\right.\\ \qquad\quad \vdots\\ \qquad\quad \dfrac{U \Vdash V}{U,A \Vdash V}\ [D\Vdash]\\ \mu\ \left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\end{array}\right.\\ \qquad\quad \vdots\\ \qquad\quad W \Vdash Z\end{array}$$

ya que si se examinan las reglas se constata que si un secuente W$\Vdash$Z domina a un secuente U$\Vdash$V en una demostración ν puede construirse una segunda demostración ν' en la que W,A$\Vdash$Z domina al secuente U,A$\Vdash$V. *Caso 3*: [R] es una regla operacional no cuantificacional. Si A es su fórmula principal, sus subfórmulas inmediatas son de rango cuantificacional 0, puesto que el símbolo lógico principal de A es un operador oracional y A es prenexa. Puesto que todos los casos se tratan de manera similar, se considera únicamente la regla [$\rightarrow\Vdash$] a título de ejemplo. Si λ es de la forma

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Theta' & \Theta''\\ \vdots & \vdots\\ W' \Vdash A,Z' & W'',B \Vdash Z''\end{array}}{W',W'',A\rightarrow B \Vdash Z',Z''}\ [\rightarrow\Vdash]$$

entonces por hipótesis de inducción

$$\begin{array}{lcl}\xi\ \left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\end{array}\right. & \begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ U' \Vdash V' & U'' \Vdash V''\end{array} & \left.\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\end{array}\right\}\ \xi'\\ \mu\ \left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\end{array}\right. & \begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ W' \Vdash A,Z' & W'',B \Vdash Z''\end{array} & \left.\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\end{array}\right\}\ \mu'\end{array}$$

donde ξ y ξ' no contienen aplicaciones de reglas operacionales cuantificacionales y μ y μ' no contienen aplicaciones de reglas operacionales no cuantificacionales ni de D╟ o ╟D. Como A y B no contienen cuantificadores y μ y μ' no contienen aplicaciones de debilitamiento, U'╟V' puede reescribirse como U'╟A,V* y U"╟V" como U*,B╟V" y las posibles aplicaciones de contracción en el antecedente con A como fórmula principal y de contracción en el consecuente con B como fórmula principal situarse en ξ y ξ', respectivamente. π se construye entonces así:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\xi & \xi' \\ \vdots & \vdots \\ U'\vdash A,V^* & U^*,B\vdash V''\end{array}}{\begin{array}{l}U',U^*,A\to B\vdash V^*,V\\ ''\\ \vdots\\ \mu^* \quad \vdots\\ W',U^*,A\to B\vdash Z',V\\ ''\\ \vdots\\ \mu'^* \quad \vdots\\ W',W'',A\to B\vdash Z',\\ Z''\end{array}}$$

donde μ^* y μ'^* son subdemostraciones análogas a μ y μ', respectivamente.

┤

Sea π una demostración en SC, sin aplicaciones de Corte, del secuente X╟Y que cumple las condiciones 1-3 SC del lema 8. Si π no contiene aplicaciones de reglas operacionales cuantificacionale, su *secuente medio* es X╟Y, y en otro caso aquel secuente que siendo la premisa de una aplicación en π de una regla cuantificacional no domina a ningún otro secuente que actúe como premisa de una aplicación de una regla cuantificacional. Lo que garantiza la existencia de *un* secuente medio de π es que, una vez eliminada la regla de Corte, todas las reglas estructurales y cuantificacionales son reglas de una premisa. Por consiguiente, una demostración de este tipo puede representarse como se indica a continuación

$$\begin{array}{ll}\lambda & \left\{\begin{array}{l}\vdots\\ W\vdash Z\end{array}\right.\\ \mu & \left\{\begin{array}{l}\vdots\\ X\vdash Y\end{array}\right.\end{array}$$

donde λ es la «parte proposicional» de la demostración, en la que sólo se usan regla proposicionales, estructurales y axiomas atómicos, W╟Z es el secuente medio (que no contendrá ocurrencias de cuantificadores), y μ es la «parte cuantificacional», en la que las únicas reglas aplicadas son las cuantificacionales, las de contracción y las de permutación.

Un corolario de la existencia del secuente medio es el siguiente trasunto de la propiedad de existencia para SC:

COROLARIO 10. Si una fórmula $A = (\exists v_1),...,(\exists v_n)B$, $RQ(B)=0$ es demostrable en SC entonces pueden encontrarse términos $t_1^1,...,t_1^n,t_m^1,...,t_m^n$ tales que la fórmula $A[t_1^1,...,t_1^n]$ v...v $A[t_m^1,...,t_m^n]$ es demostrable en SC.

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el lema 8 al secuente $\vdash A$, se sigue la existencia de una demostración π del mismo con las propiedades arriba descritas y en la que existe, por tanto, un secuente medio. El secuente medio de π será de la forma $\vdash A[t_1^1,...,t_1^n]$,..., $A[t_m^1,...,t_m^n]$, puesto que $\vdash A$ se sigue de él mediante aplicaciones de $\vdash\exists$ y reglas estructurales (especialmente $\vdash C$). Ahora bien, si $\vdash A[t_1^1,...,t_1^n]$,..., $A[t_m^1,...,t_m^n]$ es demostrable, m^2 aplicaciones de $\vdash v$ permiten obtener una demostración de $\vdash A[t_1^1,...,t_1^n]$ v...v $A[t_m^1,...,t_m^n],...,A[t_1^1,...,t_1^n]$ v...v $A[t_m^1,...,t_m^n]$, y entonces m aplicaciones de $\vdash C$ llevan a una demostración del secuente $\vdash A[t_1^1,...,t_1^n]$ v...v $A[t_m^1,...,t_m^n]$.

⊣

TEOREMA DE HERBRAND.

El teorema que se enuncia y demuestra en esta sección presenta algunas semejanzas con el teorema del secuente medio que acaba de exponerse y que se debe a Gentzen. La importancia del teorema de Herbrand reside en que constituye la base teórica de los modernos métodos de demostración automática de teoremas en el cálculo de predicados.

Si $A=(Q_1v_1)...(Q_n)B$ es una fórmula prenexa y g^i es una letra funcional i-aria que no ocurre en A, para cada $i\in N$, la *forma de Herbrand* de A con respecto a $\{g^i/i\in N\}$, A_H, se define por inducción sobre el número de ocurrencias de $\forall$ en A:

(1) $A_H=(\exists_1v_1)...(\exists_n)B$, si $A=(\exists_1v_1)...(\exists_n)B$;

(2)$A_H=(\exists_1v_1)...(\exists_m)B[-,v,g^m(-,v),-u]_H$, si $A=(\exists_1v_1)...(\exists_m)(\forall w)B[-,v,w,-,u]$, donde $-,v=\langle v_1,...,v_m\rangle$.

En la práctica se omite la referencia a $\{g^i/i\in N\}$ y se habla de una forma de Herbrand de A o de formas de Herbrand de A. Por el teorema 16, toda fórmula tiene una fórmula equivalente en forma prenexa, y en esa medida se habla de formas de Herbrand de una fórmula A sin suponer que ésta es prenexa -en tal caso sus formas de Herbrand serán las de sus fórmulas prenexas equivalentes. Por ejemplo, se dice que la fórmula $(\exists x)(\exists z)(R^2xf^1(x)\rightarrow R^2zg^2(x,z))$ es una forma de Herbrand de $(\forall x)(\exists y)R^2xy\rightarrow(\exists z)(\forall w)R^2zw$.

TEOREMA 17 (T. de Herbrand). Sea $A=(Q_1v_1)...(Q_nv_n)B$ una fórmula prenexa. Si Q_i es una ocurrencia de '$\forall$', sea g_i^k una letra funcional k-aria, $k=\left|\{j/j<i,\ Q_j \text{ es una ocurrencia de } '\exists'\}\right|$, que no ocurre en A. Entonces $\vdash A$ es demostrable en SC^- syss lo es $\vdash B[t_1^1,...t_n^1],...,B[t_1^p,...t_n^p]$, donde cada $B[t_1^p,...t_n^p]$ es la matriz cuantificacional de la forma de Herbrand con respecto al conjunto de los g_i^k de una fórmula $(Q_1u_1)...(Q_nu_n)B$ que difiere de A únicamente por los «nombres» de sus variables ligadas (y es, por tanto, deductivamente equivalente a A).

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$ Si $\vdash A$ es demostrable en SC, por el lema 8 (teorema del secuente medio) hay una demostración de la forma

$$\begin{array}{l}\Theta\ \left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right.\\ \qquad\vdash B[s_1^1,...s_n^1],...,B[s_1^p,...s_n^p]\\ \pi\ \left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right.\\ \qquad\vdash A\end{array}$$

donde Θ consta de aplicaciones de reglas proposicionales y estructurales y π de aplicaciones de reglas cuantificacionales y estructurales distintas de las de debilitamiento. Repárese en que si Q_i es una ocurrencia de '$\forall$' cada s_i^q es la variable dependiente de una aplicación de $\vdash\forall$, de manera que si Q_i y Q_j cumplen esta condición $s_i^q\neq s_j^m$. Además, hay que tener en cuenta a lo largo de toda la demostración que el orden de la secuencia $s_1^q,...s_n^q$ refleja el orden del prefijo cuantificacional de A. Así, en la parte π nos encontraremos con

$$\dfrac{\vdash B[s_1^p,\ldots s_n^p],X}{\vdash (Qv_n)B[s_1^p,\ldots s_{n-1}^p,v_n],X}\ [\vdash Q_n]$$

$$\dfrac{\vdash (Q_{h+1v}h+1)\ldots Qv_n)B[s_1^p,\ldots s_h^p,v_{h+1},\ldots v_n],X}{\vdash (Q_hv_h)\ldots Qv_n)B[s_1^p,\ldots s_{h-1}^p,v_h,\ldots v_n],X}\ [\vdash Q_h]$$

etc.

Considérese ahora la secuencia $(R_1),\ldots,(R_k)$ de aplicaciones de reglas cuantificacionales en π; ordénense los s_i^q según el orden de la secuencia de aplicaciones de reglas cuantificacionales. Por tanto, si (R_m) es una aplicación de $\vdash\forall$, s_m es su variable dependiente, y si (R_m) es una aplicación de $\vdash\exists$, esquemáticamente

$$\dfrac{\vdash C[t],X}{\vdash (\exists v)C[v],X}$$

$s_m=t$. Se sigue que si $i\leq j$ y s_i es la variable dependiente de (R_i), s_i no ocurre en s_j. Tómese a continuación el s_m de mayor subíndice que sea la variable dependiente de una aplicación de $\vdash\forall$ en π; sea éste s_i^q. Reemplázese en el secuente medio $\vdash B[s_1^1,\ldots s_n^1],\ldots,B[s_1^p,\ldots s_n^p]$ *cada* ocurrencia de la variable s_m por $g_i^k(s_h^q,\ldots,s_j^q)$ $-s_h^q,\ldots,s_j^q$ son los k términos de $s_1^p,\ldots s_n^p$ de índices $<i$ asociados con aplicaciones de $\vdash\exists$.[12][13] Procédase del mismo modo con el secuente resultante, usando ahora la variable dependiente de mayor subíndice que ocurra en él (y que obviamente será distinto de s_m) y así sucesivamente. El secuente obtenido tras estas manipulaciones cumple las especificaciones del lema, y en tanto que se trata de sustituciones uniformes, es demostrable sin usar reglas cuantificacionales.

$\Leftarrow$ La demostración de la conversa consiste, esencialmente, en invertir el proceso anterior. Supóngase que $\vdash B[t_1^1,\ldots t_n^1],\ldots,B[t_1^p,\ldots t_n^p]$ fuera demostrable en SC. Reemplazamos primero los términos de la forma $g_i^k(-,s)$ en los que $-s$ no es la secuencia $\langle s_h^q,\ldots,s_j^q\rangle$ de los k términos de $\langle s_1^q,\ldots,s_n^q\rangle$ de índice $<i$ tales que $Q_h,\ldots,Q_j$ es una ocurrencia del cuantificador existencial por un término fijo t de $\mathcal{P}$ que no ocurra en el secuente en cuestión. El conjunto de los términos $g_i^k(s_h^q,\ldots,s_j^q)$ está parcialmente ordenado por la relación $T\leq T'$ syss T' es un subtérmino de T. Extiéndase esa relación a un orden lineal y ordénense los $g_i^k(s_h^q,\ldots,s_j^q)$ en orden creciente y, siguiendo ese mismo orden, reemplácense sucesivamente por las variables $v_1,\ldots,v_k$.

Para obtener una demostración de $\vdash A$ basta con una sucesión de aplicaciones de reglas cuantificacionales y estructurales sobre el secuente resultante. Sea $\vdash B[v_1^1,\ldots v_n^1],\ldots,B[v_1^p,\ldots v_n^p]$ el secuente obtenido tras las manipulaciones descritas, y que evidentemente es demostrable en SC. Se escribe entonces '$\mathbf{s}(v_j^i)$', donde v_j^i es una de las variables de ese secuente, para designar al término correspondiente del secuente original $\vdash B[t_1^1,\ldots t_n^1],\ldots,B[t_1^p,\ldots t_n^p]$. Procédase entonces como sigue. [1.a] Si Q_n es una ocurrencia de $\exists$, aplíquese p veces la regla $\vdash\exists$ para obtener $\vdash(\exists v_n^1)B[v_1^1,\ldots v_n^1],\ldots,(\exists v_n^p)B[v_1^p,\ldots v_n^p]$. [1b] Si por el contrario Q_n es una ocurrencia de $\forall$, habrá un v_n^i que no ocurre fuera de $B[v_1^i,\ldots v_n^i]$ a menos que haya uno o más j, $v_n^j=v_n^i$. En efecto, si $v_n^i=v_m^j$, $m<n$, Q_m es una ocurrencia de $\forall$, de manera que $\mathbf{s}(v_m^j)=g_n^h(-,s)$, $\mathbf{s}(v_n^j)=g_n^k(-,s,-,\mathbf{r})$ y $v_q^i\neq v_n^j$ para todo q, $1\leq q\leq n$. Como el número de fórmulas del secuente es finito, o hay un v_n^i que no ocurre fuera de $B[v_1^i,\ldots v_n^i]$ o hay un $v_n^j=v_n^i$. En el primer caso $\vdash B[v_1^1,\ldots v_n^1],\ldots,(\exists v_n^i)B[v_1^i,\ldots v_n^i],\ldots B[v_1^p,\ldots v_n^p]$ se obtiene aplicando $\vdash\forall$; en el segundo caso $\langle v_1^i,\ldots v_n^i\rangle=\langle v_1^j,\ldots v_n^j\rangle$ y puede aplicarse $\vdash C$ (una o más

[12] Si Q^1 es una ocurrencia de $\forall$, se introducen p letras funcionales 0-arias (constantes) distintas, g_i^0, una para cada fórmula del secuente medio.

[13] Si $s_m=s_i^q$, 's_m' designa a la clase de las ocurrencias de una variable v en la fórmula $B[s_1^q,\ldots,s_n^q]$. La sustitución de s_m por $g_i^k(s_h^q,\ldots,s_j^q)$, sin embargo, se efectúa en todas las ocurrencias de v en el secuente. Así, una vez realizada la sustitución, la variable v no ocurre en el secuente resultante.

veces) y después ⊩∀. [k+1a] Si, en el secuente generado tras el k-ésimo paso, hay una fórmula $(Q_jv_j),...,(Q_nv_n)B[v_1^q,...v_n^q]$, siendo Q_{j-1} una ocurrencia de ∃, aplíquese ⊩∃, reemplazándola por $(\exists_{j-1}v_{j-1})(Q_jv_j),...,(Q_nv_n)B[v_1^q,...v_n^q]$. [k+1b] En caso contrario empléese, *mutatis mutandis*, el mismo razonamiento que en 1b.

⊣

¿Ha entendido la demostración precedente? En cualquier caso es lo suficientemente alambicada, por la profusión de subíndices, superíndices y sustituciones, como para que no estén de más un par de ilustraciones, a modo de *ecthesis*, de las sucesivas transformaciones que conlleva (cfr. Apéndice Teorema de Herbrand. Ejemplos).

TEOREMA DE INTERPOLACIÓN.

Por comodidad se extiende el prolenguaje $\mathcal{P}$ incorporando el operador oracional ceroario ⊥, conocido como «operador de absurdo». Por consiguiente, por lo que hace a la gramática lógica, ⊥ es una fórmula bien formada. En cuanto al sistema deductivo, $SS^{\perp}$ (SS=SI,SC) resulta de añadir a SS el axioma ⊥⊩. En los sistemas mencionados ⊥ y A&¬A, para cualquier fórmula A, son deductivamente equivalentes.

A⊩A	Ax.
A,¬A⊩	[¬⊩]
A&¬A,¬A⊩	[&⊩]
A&¬A,A&¬A⊩	[&⊩]
A&¬A⊩	[C⊩]
A&¬A⊩⊥	[⊩D]

⊥⊩	Ax.
⊥⊩A&¬A	[⊩D]

Asimismo, en SI y SC ¬A y A→⊥ son deductivamente equivalentes, de manera que podría prescindirse de '¬' en beneficio de '⊥'.

A⊩A ⊥⊩	Axs.
A→⊥,A⊩	[→⊩]
A→⊥⊩¬A	[⊩¬]

A⊩A	Ax.
A,¬A⊩	[¬⊩]
A,¬A⊩⊥	[⊩D]
¬A⊩A→⊥	[⊩→]

(Adviértase que, siguiendo la costumbre, en estas demostraciones se no se han consignado las aplicaciones pertinentes de la regla de permutación).

Teniendo en cuenta el uso en estas derivaciones de la regla [⊩D], no sucederá lo mismo con $SM^{\perp}$ = SM + ⊥⊩.

A continuación se define una relación ς entre pares de fórmulas ⟨A,B⟩ tales que A∈SFG(B) y c(A)=0 y {+,-}. Si ⟨A,B,+⟩∈ς se dice que A *ocurre positivamente* en B y si ⟨A,B,-⟩∈ς que A *ocurre negativamente* en B.

DEFINICIÓN. (1) si C(B)=0, en cuyo caso A=B, ⟨A,B,+⟩∈ς; (2) si ⟨A,B,+⟩∈ς entonces ⟨A,B&C,+⟩∈ς, ⟨A,C&B,+⟩∈ς, ⟨A,BvC,+⟩∈ς, ⟨A,CvB,+⟩∈ς, ⟨A,C→B,+⟩∈ς, ⟨A,(Qv)B,+⟩∈ς; (3) si ⟨A,B,+⟩∈ςentonces ⟨A,B→C,-⟩∈ς, ⟨A,¬B,-⟩∈ς; (4) si ⟨A,B,-⟩∈ς entonces ⟨A,B&C,-⟩∈ς, ⟨A,C&B,-⟩∈ς, ⟨A,BvC,-⟩∈ς, ⟨A,CvB,-⟩∈ς, ⟨A,C→B,-⟩∈ς, ⟨A,(Qv)B,-⟩∈ς; (5) si ⟨A,B,-⟩∈ς entonces ⟨A,B→C,+⟩∈ς, ⟨A,¬B,+⟩∈ς.

Esta relación se convierte fácilmente en una segunda relación Σ entre pares ⟨A,X⊩Y⟩ de fórmulas atómicas y secuentes y «polaridades» ('+' o '-'), bajo el supuesto de que para alguna fórmula B de X⊩Y, ⟨A,B,+⟩∈ς o ⟨A,B,-⟩∈ς.

DEFINICIÓN. (1) Si ⟨A,B,+⟩∈ς y B ocurre en el consecuente Y, ⟨A,X⊩Y,+⟩∈Σ; (2) si ⟨A,B,-⟩∈ς y B ocurre en el consecuente Y, ⟨A,X⊩Y,-⟩∈Σ; (3) si ⟨A,B,+⟩∈ς y B ocurre en el antecedente X, ⟨A,X⊩Y,-⟩∈Σ; (4) si ⟨A,B,-⟩∈ς y B ocurre en el antecedente X, ⟨A,X⊩Y,+⟩∈Σ.

Si $\langle A,X\vdash Y,+\rangle\in\Sigma$, A ocurre positivamente en $X\vdash Y$ y si $\langle A,X\vdash Y,-\rangle\in\Sigma$, A ocurre negativamente en $X\vdash Y$.

LEMA 9. Si $X,X'\vdash Y,Y'$ es demostrable en $SS^{\perp}$ ($=SI^{\perp},SC^{\perp}$) hay una fórmula A tal que

1] $X\vdash A,Y$ y $X',A\vdash Y'$ son demostrables en $SS^{\perp}$;

2] para toda fórmula atómica B, si $\langle B,A,+\rangle\in\varsigma$ entonces $\langle B,X'\vdash Y',+\rangle\in\Sigma$ y $\langle B,X\vdash Y,-\rangle\in\Sigma$;

3] para toda fórmula atómica B, si $\langle B,A,-\rangle\in\varsigma$

Entonces $\langle B,X'\vdash Y',-\rangle\in\Sigma$ y $\langle B,X\vdash Y,+\rangle\in\Sigma$.

DEMOSTRACIÓN. Adviértase que la formulación del lema para $SI^{\perp}$ es «si $X,X'\vdash Y'$ es demostrable en $SI^{\perp}$...», donde $Y'=\{B\}$ o $Y'=\varnothing$. En ambos casos el lema se demuestra por inducción sobre la longitud de una demostración π libre de corte de $X,X'\vdash Y,Y'$. Si $long(\pi)=1$, $X,X'\vdash Y,Y'$ es un axioma $B\vdash B$ y hay que considerar cuatro subcasos. *Subcaso 1:* $X=Y=\{B\}$ *y* $X'=Y'=\varnothing$. Sea entonces $A=\perp$; en tal caso $\perp\vdash$ y $B\vdash B$ son axiomas y aplicando $[D\vdash]$ a este último se obtiene $B\vdash B,\perp$. *Subcaso 2:* $X=Y'=\{B\}$ *y* $X'=Y=\varnothing$. Tómese entonces $A=B$, en cuyo caso $B\vdash A$ y $A\vdash B$ son axiomas y se comprueba fácilmente que se cumplen las condiciones 2-3 del lema. *Subcaso 3:* $X'=Y=\{B\}$ *y* $X=Y'=\varnothing$. Tómese ahora $A=\neg B$. Partiendo del axioma $B\vdash B$ y aplicando $[\neg\vdash]$ y $[\vdash\neg]$ se llega, respectivamente, a $B,\neg B\vdash$ y $\vdash B,\neg B$. Si $\langle C,A,+\rangle\in\varsigma$, $\langle C,\vdash A,B,+\rangle\in\Sigma$ y $\langle C,A,B\vdash,-\rangle\in\Sigma$, y $\langle C,A,-\rangle\in\varsigma$, $\langle C,\vdash A,B,-+\rangle\in\Sigma$ y $\langle C,A,B\vdash,+\rangle\in\Sigma$. *Subcaso 4.* $X=Y=\varnothing$ *y* $X'=Y'=\{B\}$. Sea $A=\neg\perp$; aplíquese $[\vdash\neg]$ al axioma $\perp\vdash$ para obtener $\vdash\neg\perp$, y $[D\vdash]$ a $B\vdash B$ para concluir $B,\perp\vdash B$.

Sea pues $long(\pi)=k+1$. *Subcaso 1.* π termina con una aplicación de una regla estructural. El esquema es el mismo para todas las reglas estructurales: aplíquese la hipótesis de inducción sobre la premisa de la regla y la propia regla sobre el secuente resultante. Por ejemplo, si π es de la forma

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ X,X''\vdash Y,Y'\end{array}}{X,X'',B\vdash Y,Y'}\,[D\vdash]}{}$$

la hipótesis de inducción proporciona sendas demostraciones de $X\vdash A,Y$ y $X'',A\vdash Y'$; aplicando sobre esta última $D\vdash$ y $P\vdash$ resulta $X'',B,A\vdash Y'$. Obviamente si las condiciones 2 y 3 se verificaban para $X\vdash A,Y$ y $X'',A\vdash Y'$, también se vericarán para $X\vdash A,Y$ y $X'',B,A\vdash Y'$.

Subcaso 2. π termina con una aplicación de una regla operacional proposicional de una premisa o con una aplicación de $\forall\vdash$ o $\vdash\exists$. Con las modificaciones pertinentes, se procede como en el caso anterior. Si, por ejemplo, π es de la forma

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ X'',B,X'\vdash Y,Y'\end{array}}{X'',B\&C,X'\vdash Y,Y'}\,[\&\vdash]}{}$$

de la hipótesis de inducción resultan sendas demostraciones de $X'',B\vdash A,Y$ y $X',A\vdash Y'$, satisfaciendo estos secuentes las condiciones enunciadas en el lema. Basta entonces con aplicar $\&\vdash$ para obtener a partir de la primera de ellas $X'',B\&C\vdash A,Y$.

Subcaso 3. π es de la forma

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ X,X'\vdash B,Y'',Y'\end{array}\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ X,X'\vdash C,Y'',Y'\end{array}}{}}{X,X'\vdash B\&C,Y'',Y'}\,[\vdash\&]}{}$$

Por hipótesis de inducción los secuentes $X\vdash A',B,Y''$, $X',A'\vdash Y'$, $X\vdash A'',C,Y''$ y $X',A'\vdash Y''$ son demostrables y satisfacen las condiciones del lema. Si $A=A'vA''$, se tiene

$$\dfrac{X',A'\vdash Y'\qquad X',A''\vdash Y'}{X',A'vA''\vdash Y'}\,[v\vdash]$$

y también

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X\Vdash A',B,Y''}}{X\Vdash A'\vee A'',B,Y''}}{X\Vdash B,A'\vee A'',Y''}}{X\Vdash B\&C,A'\vee A'',Y''}}{X\Vdash A'\vee A'',B\&C,Y''}\,[\Vdash\&]}{X\Vdash A'\vee A'',B\&C,Y''}\,[P\Vdash]}{X\Vdash A'\vee A'',B\&C,Y''}\,[\Vdash\vee]}{X\Vdash A'\vee A'',B\&C,Y''}}{X\Vdash A'\vee A'',B\&C,Y''}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X\Vdash A'',C,Y''}}{X\Vdash A'\vee A'',C,Y''}}{X\Vdash C,A'\vee A'',Y''}}{X\Vdash B\&C,A'\vee A'',Y''}}{X\Vdash A'\vee A'',B\&C,Y''}\,[\Vdash\&]}{X\Vdash A'\vee A'',B\&C,Y''}\,[P\Vdash]}{X\Vdash A'\vee A'',B\&C,Y''}\,[\Vdash\vee]}{X\Vdash A'\vee A'',B\&C,Y''}$$

Subcaso 4. π concluye con una aplicación de $\vee\Vdash$, y por consiguiente es de la forma

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X,X',B\Vdash Y'',Y'}}{X,X',B\vee C\Vdash Y'',Y'}}{X,X',B\vee C\Vdash Y'',Y'}}{X,X',B\vee C\Vdash Y'',Y'}}{X,X',B\vee C\Vdash Y'',Y'}}{X,X',B\vee C\Vdash Y'',Y'}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X,X',C\Vdash Y'',Y'}}{X,X',B\vee C\Vdash Y'',Y'}}{X,X',B\vee C\Vdash Y'',Y'}}{X,X',B\vee C\Vdash Y'',Y'}}{X,X',B\vee C\Vdash Y'',Y'}}{X,X',B\vee C\Vdash Y'',Y'}\,[\vee\Vdash]$$

Por hipótesis de inducción los secuentes $X\Vdash A',Y$, $X',B,A'\Vdash Y'$, $X\Vdash A'',Y$ y $X',C,A''\Vdash Y'$ son demostrables y satisfacen las exigencias del lema. Sea entonces $A=A'\&A''$.

$$\dfrac{X\Vdash A',Y\quad X\Vdash A'',Y}{X\Vdash A'\&A'',Y}\,[\&\Vdash]$$

y además,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X',C,A''\Vdash Y'}}{X',C,A'\&A''\Vdash Y'}}{X',A'\&A'',C\Vdash Y'}}{X',A'\&A'',B\vee C\Vdash Y'}}{X',A'\&A'',B\vee C\Vdash Y'}}{X',A'\&A'',B\vee C\Vdash Y'}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X',B,A'\Vdash Y'}}{X',B,A'\&A''\Vdash Y'}}{X',A'\&A'',B\Vdash Y'}}{X',A'\&A'',B\vee C\Vdash Y'}}{X',A'\&A'',B\vee C\Vdash Y'}}{X',A'\&A'',B\vee C\Vdash Y'}\,[\&\Vdash]}{X',A'\&A'',B\vee C\Vdash Y'}\,[P\Vdash]}{X',A'\&A'',B\vee C\Vdash Y'}\,[\vee\Vdash^*]$$

Subcaso 5. La última regla aplicada en π es $\rightarrow\Vdash$. En este caso no hay una representación unívoca porque en las premisas de $\rightarrow\Vdash$ X,X',Y e Y'' pueden repartirse de diversas maneras. Si π puede representarse como

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X\Vdash B,Y}}{}}{}}{}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X'',C\Vdash Y'}}{}}{}}{X,X'',B\rightarrow C\Vdash Y,Y'}}{X,X'',B\rightarrow C\Vdash Y,Y'}}{X,X'',B\rightarrow C\Vdash Y,Y'}\,[\rightarrow\Vdash]$$

Interpretando $X\Vdash B,Y$ como $\varnothing,X\Vdash B,Y$ y $X'',C\Vdash Y'$ como $\varnothing,X'',C\Vdash\varnothing,Y'$, la hipótesis de inducción lleva a concluir la demostrabilidad de $\Vdash A',B$ y $X,A'\Vdash Y$, por una parte, y, por la otra, de $X'',C,A''\Vdash Y'$ y $\Vdash A''$. Tómese $\neg A'\&A''$ por A; entonces

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X,A'\Vdash Y}}{X\Vdash\neg A',Y}\,[\Vdash\neg]\quad X\Vdash A'',Y}{X\Vdash\neg A'\&A'',Y}\,[\Vdash\&]}{X\Vdash\neg A'\&A'',Y}}{X\Vdash\neg A'\&A'',Y}}{X\Vdash\neg A'\&A'',Y}}{X\Vdash\neg A'\&A'',Y}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Vdash A''}}{}}{}}{}}{}}{}}{}\;\Big\}\;\text{Deb., Perm.}$$

Además,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X',C,A''\Vdash Y'}}{X',C,\neg A'\&A''\Vdash Y'}}{X',\neg A'\&A'',C\Vdash Y'}}{X',\neg A'\&A'',\neg A'\&A'',B\rightarrow C\Vdash Y'}}{X',\neg A'\&A'',B\rightarrow C\Vdash Y'}}{X',\neg A'\&A'',B\rightarrow C\Vdash Y'}}{X',\neg A'\&A'',B\rightarrow C\Vdash Y'}}{X',\neg A'\&A'',B\rightarrow C\Vdash Y'}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Vdash A',B}}{\neg A'\Vdash B}}{\neg A'\&A''\Vdash B}}{}}{}}{}}{}$$

$[\&\Vdash]$ $[P\Vdash]$ $[\neg\Vdash]$ $[\&\Vdash]$ $[\rightarrow\Vdash]$ $[C\Vdash]$

Una segunda posibilidad es que el esquema de π sea

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ C \Vdash Y' & X,X' \Vdash B,Y\end{array}}{X,X',B\to C \Vdash Y,Y'}$$

Leyendo la premisa izquierda como $C,\varnothing \Vdash \varnothing,Y'$ y la derecha como $X,X' \Vdash B,Y,\varnothing$ y aplicando la hipótesis de inducción se llega a $C \Vdash A'$, $A' \Vdash Y'$, $X',A'' \Vdash$ y $X \Vdash A'',B,Y$. Aplicando reglas estructurales a $A' \Vdash Y'$ se demuestra $X',A' \Vdash Y'$ y procediendo análogamente sobre $X'A'' \Vdash$ se llega a $X',A'' \Vdash Y'$. Finalmente por $v \Vdash$ se tiene $X',A'vA'' \Vdash Y'$. En cuanto a la parte restante,

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ X \Vdash A'',B,Y & C \Vdash A'\end{array}}{\begin{array}{ll}X \Vdash AvA'',B, & C \Vdash A'vA'' \\ \quad Y & \end{array}}\ [\Vdash v]}{X,B\to C \Vdash A'vA'',Y}\ [\to \Vdash]$$

etc.

Subcaso 6. La última regla aplicada en π es $\Vdash\forall$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ X,X' \Vdash B,Y'',Y'\end{array}}{X,X' \Vdash (\forall v)B,Y'',Y'}\ [\Vdash\forall]$$

donde -recuérdese- 'v' no está libre en X,X',Y'',Y'. La hipótesis de inducción proporciona demostraciones apropiadas de los secuentes $X \Vdash A',B,Y''$ y $X',A' \Vdash Y'$. El problema reside en que para pasar de $X \Vdash A',B,Y''$ a $X \Vdash A',(\forall v)B,Y''$ aplicando $\Vdash\forall$ 'v' no tendría que estar libre en A y no hay garantías de que así sea. Para remediarlo tómese por A la fórmula $(\exists v)A'$, en la que obviamente 'v' no está libre. Es decir, procédase como sigue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ X \Vdash A',B,Y''\end{array}}{X \Vdash (\exists v)A',B,Y''}\ [\Vdash\exists] \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ X',A' \Vdash Y'\end{array}}{X',(\exists v)A' \Vdash Y'}\ [\exists \Vdash]}{X \Vdash (\forall v)A',(\forall v)B,Y''}\ [\Vdash\forall]}$$

Adviértase que, en la derivación de la derecha, las restricciones inherentes a la regla $\exists \Vdash$ se cumplen, ya que por hipótesis 'v' no está libre en X',Y' (ni en X,Y'').

Subcaso 7. La regla $\exists \Vdash$ plantea problemas similares a los de $\Vdash\forall$. Si π es

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ X,X'',B \Vdash Y,Y'\end{array}}{X,X'',(\exists v)B \Vdash Y,Y'}\ [\exists \Vdash]$$

donde 'v' no está libre en X,X'',Y,Y', la hipótesis de inducción permite contar con demostraciones de los secuentes $X \Vdash A',Y$ y $X'',B,A' \Vdash Y'$, pudiendo darse el caso de que 'v' esté libre en A'. Para solucionarlo sea $A=(\forall v)A'$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ X \Vdash A',Y\end{array}}{X \Vdash (\forall v)A',Y''}\ [\Vdash\forall] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ X'',B,A' \Vdash Y'\end{array}}{X'',B,(\forall v)A' \Vdash Y'}\ [\forall \Vdash]}{X'',(\forall v)A',B \Vdash Y'}\ [P \Vdash]}{X'',(\forall v)A',(\exists v)B \Vdash Y'}\ [\exists \Vdash]}$$

$\dashv$

TEOREMA 18 (T. DE CRAIG-LYNDON). Si $\vdash_{SS^{\perp}} A\rightarrow B$ ($SS^{\perp}=SI^{\perp}=SC^{\perp}$) entonces existe una fórmula C tal que (1) $\vdash_{SS^{\perp}} A\rightarrow C$ y $\vdash_{SS^{\perp}} C\rightarrow B$, (2) si $\langle D,C,+\rangle\in\varsigma$ entonces $\langle D,A,+\rangle\in\varsigma$ y $\langle D,B,+\rangle\in\varsigma$, y (3) si $\langle D,C,-\rangle\in\varsigma$ entonces $\langle D,A,-\rangle\in\varsigma$ y $\langle D,B,-\rangle\in\varsigma$. Se dice entonces que la fórmula C es un *interpolante* entre A y B en $SS^{\perp}$.

DEMOSTRACIÓN. Asúmase que $\vdash_{SS^{\perp}} A\rightarrow B$. Por definición, el secuente $\Vdash A\rightarrow B$ es demostrable en $SS^{\perp}$ y entonces por lema 3 lo es igualmente $A\Vdash B$. Léase este secuente de modo que $X=\{A\}$, $Y'=\{B\}$ y $X'=Y=\varnothing$. Por el lema 9 existe una fórmula C tal que $A\Vdash C$ y $C\Vdash B$ son demostrables en $SS^{\perp}$. Además, para toda fórmula atómica D se cumple: si $\langle D,C,+\rangle\in\varsigma$ entonces $\langle D,\Vdash B,+\rangle\in\Sigma$ y $\langle D,A\Vdash,-\rangle\in\Sigma$, y si $\langle D,C,-\rangle\in\varsigma$ entonces $\langle D,\Vdash B,-\rangle\in\Sigma$ y $\langle D,A\Vdash,+\rangle\in\Sigma$. De la definición que precede al lema 9 se sigue que si $\langle D,\Vdash B,+\rangle\in\Sigma$ entonces $\langle D,B,+\rangle\in\varsigma$, si $\langle D,A\Vdash,-\rangle\in\Sigma$ entonces $\langle D,A,+\rangle\in\varsigma$, si $\langle D,\Vdash B,-\rangle\in\Sigma$ entonces $\langle D,B,-\rangle\in\varsigma$ y si $\langle D,A\Vdash,+\rangle\in\Sigma$ entonces $\langle D,A,-\rangle\in\varsigma$.

⊣

Está claro que el teorema de interpolación o de Craig-Lyndon es una consecuencia de la eliminación de la regla de Corte. Para constatarlo basta con darse cuenta de que si π es como en la demostración del lema 9 y si su último paso consistiera en una aplicación de Corte, de manera que pudiéramos representar esa demostración como

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ X\Vdash A,Y & X',A\Vdash Y'\end{array}}{X,X'\Vdash Y,Y'}$$

y si la fórmula de Corte coincidiera con la fórmula interpolante, podría suceder que $\langle B,A,+\rangle\in\varsigma$ y $\langle B,X'\Vdash Y',+\rangle\notin\Sigma$.

APÉNDICE: TEOREMA DE HERBRAND, EJEMPLOS.

EJEMPLO 1. $(\exists v)(\forall x)(\exists u)(\forall y)(R^2xy\rightarrow R^2uv)$.

$\Rightarrow$ 1.1 Demostración (se omiten las aplicaciones de $\Vdash$P).

$R^2xy\Vdash R^2xy$		[Axioma]
$R^2xy,R^2zw\Vdash R^2xy$		[D$\Vdash$]
$R^2xy,R^2zw\Vdash R^2uv,R^2xy$		[D$\Vdash$]
$R^2xy\Vdash R^2uv,R^2zw\rightarrow R^2xy$		[$\Vdash\rightarrow$]
$\Vdash R^2xy\rightarrow R^2uv,R^2zw\rightarrow R^2xy$	sec. medio	[$\Vdash\rightarrow$]
$\Vdash R^2xy\rightarrow R^2uv,(\forall w)(R^2zw\rightarrow R^2xy)$		[$\Vdash\forall$]
$\Vdash R^2xy\rightarrow R^2uv,(\exists t)(\forall w)(R^2zw\rightarrow R^2ty)$		[$\Vdash\exists$]
$\Vdash R^2xy\rightarrow R^2uv,(\forall z)(\exists t)(\forall w)(R^2zw\rightarrow R^2ty)$		[$\Vdash\forall$]
$\Vdash R^2xy\rightarrow R^2uv,(\exists s)(\forall z)(\exists t)(\forall w)(R^2zw\rightarrow R^2ts)$		[$\Vdash\exists$]
$\Vdash(\forall y)(R^2xy\rightarrow R^2uv),(\exists s)(\forall z)(\exists t)(\forall w)(R^2zw\rightarrow R^2ts)$		[$\Vdash\forall$]
$\Vdash(\exists u)(\forall y)(R^2xy\rightarrow R^2uv),(\exists s)(\forall z)(\exists t)(\forall w)(R^2zw\rightarrow R^2ts)$		[$\Vdash\exists$]
$\Vdash(\forall x)(\exists u)(\forall y)(R^2xy\rightarrow R^2uv),(\exists s)(\forall z)(\exists t)(\forall w)(R^2zw\rightarrow R^2ts$		[$\Vdash\forall$]
$\Vdash(\exists v)(\forall x)(\exists u)(\forall y)(R^2xy\rightarrow R^2uv),(\exists s)(\forall z)(\exists t)(\forall w)(R^2zw\rightarrow R^2ts\ )$		[$\Vdash\exists$]
$\Vdash(\exists v)(\forall x)(\exists u)(\forall y)(R^2xy\rightarrow R^2uv)$		[$\Vdash$C]

1.2 Secuencia $\langle s_1,...,s_k\rangle$: $\langle$**w**,x,**z**,y,**y**,u,**x**,v$\rangle$ (en negrita las variables dependientes).

1.3 Sustituciones $s_i/g_j^k(-,s)$.

1. $\Vdash R^2xy\rightarrow R^2uv[v,x,u,y],R^2zw\rightarrow R^2xy[y,z,x,w]$

2. $\|\!\vdash R^2g^1(v)y\rightarrow R^2uv[v,g^1(v),u,y],R^2zw\rightarrow R^2g^1(v)y[y,z,g^1(v),w]$
3. $\|\!\vdash R^2g^1(v)g^2(v,u)\rightarrow R^2uv[v,g^1(v),u,g^2(v,u)],R^2zw\rightarrow R^2g^1(v)g^2(v,u)[g^2(v,u),z,g^1(v),w]$
4. $\|\!\vdash R^2g^1(v)g^2(v,u)\rightarrow R^2uv[v,g^1(v),u,g^2(v,u)],R^2g^1(g^2(v,u))w\rightarrow R^2g^1(v)g^2(v,u)[g^2(v,u),g^1(g^2(v,u)),g^1(v),w]$
5. $\|\!\vdash R^2g^1(v)g^2(v,u)\rightarrow R^2uv[v,g^1(v),u,g^2(v,u)],R^2g^1(g^2(v,u))g^2(g^2(v,u),g^1(v))\rightarrow R^2g^1(v)g^2(v,u)[g^2(v,u),g^1(g^2(v,u)),g^1(v),g^2(g^2(v,u),g^1(v)]$

$\Leftarrow$ Se parte de
$\|\!\vdash R^2g^1(v)g^2(v,u)\rightarrow R^2uv,R^2g^1(g^2(v,u))g^2(g^2(v,u),g^1(v))\rightarrow R^2g^1(v)g^2(v,u)$.

1.4 Ordenación de los términos $g_i^k(s_h^q,...,s_j^q)$.

$g^1(v)\geq g^2(g^2(v,u),g^1(v))$
$g^2(v,u)\geq g^2(g^2(v,u),g^1(v))$ } orden parcial
$g^2(v,u)\geq g^1(g^2(v,u)$
$g^1(v)\geq g^2(v,u)\geq g^1(g^2(v,u))\geq g^2(g^2(v,u),g^1(v))$ orden lineal

1.5 Sustitución $g_i^k(s_h^q,...,s_j^q)/v_j$ (v_j=x,y,z,w).
$\|\!\vdash R^2xg^2(v,u)\rightarrow R^2uv,R^2g^1(g^2(v,u))g^2(g^2(v,u),x)\rightarrow R^2xg^2(v,u)$.
$\|\!\vdash R^2xy\rightarrow R^2uv,R^2g^1(y)g^2(y,x)\rightarrow R^2xy$.
$\|\!\vdash R^2xy\rightarrow R^2uv,R^2zg^2(y,x)\rightarrow R^2xy$.
$\|\!\vdash R^2xy\rightarrow R^2uv,R^2zw\rightarrow R^2xy$

Para la derivación de $\|\!\vdash(\exists v)(\forall x)(\exists u)(\forall y)(R^2xy\rightarrow R^2uv$ a partir de este secuente se procede como en 1.1.

EJEMPLO 2. $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\forall v)(R^2yv\rightarrow R^2xz)$.
$\Rightarrow$ 2.1 Demostración (se omiten las aplicaciones de $\|\!\vdash$P).

$R^2yz\|\!\vdash R^2yz$		[Axioma]
$R^2yz,R^2xw\|\!\vdash R^2yz$		[D$\|\!\vdash$]
$R^2yz,R^2xw\|\!\vdash R^2uv,R^2yz$		[D$\|\!\vdash$]
$R^2yz\|\!\vdash R^2uv,R^2xw\rightarrow R^2yz$		[$\|\!\vdash\rightarrow$]
$\|\!\vdash R^2yz\rightarrow R^2uv,R^2xw\rightarrow R^2yz$	secuente medio	[$\|\!\vdash\rightarrow$]
$\|\!\vdash R^2yz\rightarrow R^2uv,(\forall w)(R^2xw\rightarrow R^2yz)$		[$\|\!\vdash\forall$]
$\|\!\vdash R^2yz\rightarrow R^2uv,(\exists z)(\forall w)(R^2xw\rightarrow R^2yz)$		[$\|\!\vdash\exists$]
$\|\!\vdash(\forall z)(R^2yz\rightarrow R^2uv),(\exists z)(\forall w)(R^2xw\rightarrow R^2yz)$		[$\|\!\vdash\forall$]
$\|\!\vdash(\exists v)(\forall z)(R^2yz\rightarrow R^2uv),(\exists z)(\forall w)(R^2xw\rightarrow R^2yz)$		[$\|\!\vdash\exists$]
$\|\!\vdash(\exists y)(\exists v)(\forall z)(R^2yz\rightarrow R^2uv),(\exists z)(\forall w)(R^2xw\rightarrow R^2yz)$		[$\|\!\vdash\exists$]
$\|\!\vdash(\forall u)(\exists y)(\exists v)(\forall z)(R^2yz\rightarrow R^2uv),(\exists z)(\forall w)(R^2xw\rightarrow R^2yz)$		[$\|\!\vdash\forall$]
$\|\!\vdash(\forall u)(\exists y)(\exists v)(\forall z)(R^2yz\rightarrow R^2uv),(\exists x)(\exists z)(\forall w)(R^2xw\rightarrow R^2yz)$		[$\|\!\vdash\exists$]
$\|\!\vdash(\forall u)(\exists y)(\exists v)(\forall z)(R^2yz\rightarrow R^2uv),(\forall y)(\exists x)(\exists z)(\forall w)(R^2xw\rightarrow R^2yz)$		[$\|\!\vdash\forall$]
$\|\!\vdash(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\forall v)(R^2yv\rightarrow R^2xz)$		[$\|\!\vdash$C]

2.2 Secuencia $\langle s_1,...,s_k\rangle$: $\langle$**w**,z,**z**,v,y,**u**,x,**y**$\rangle$ (en negrita las variables dependientes).

2.3 Sustituciones $s_i/g_j^k(-,s)$.
1. $\|\!\vdash(R^2yz\rightarrow R^2uv)[u,y,v,z],(R^2xw\rightarrow R^2yz)[y,x,z,w]$
2. $\|\!\vdash(R^2g^0z\rightarrow R^2uv)[u,g^0,v,z],(R^2xw\rightarrow R^2g^0z)[g^0,x,z,w]$
3. $\|\!\vdash(R^2g^0z\rightarrow R^2f^0v)[f^0,g^0,v,z],(R^2xw\rightarrow R^2g^0z)[g^0,x,z,w]$
4. $\|\!\vdash(R^2g^0g^2(g^0,v)\rightarrow R^2f^0v)[f^0,g^0,v,g^2(g^0,v)],(R^2xw\rightarrow R^2g^0g^2(g^0,v)[g^0,x,g^2(g^0,v),w]$

5. $\Vdash(R^2g^0g^2(g^0,v)\rightarrow R^2f^0v)[f^0,g^0,v,g^2(g^0,v)],(R^2xg^2(x,g^2(g^0,v))\rightarrow R^2g^0g^2(g^0,v)[g^0,x,g^2(g^0,v),g^2(x,g^2(g^0,v))]$

$\Leftarrow$ Se parte de
$\Vdash(R^2g^0g^2(g^0,v)\rightarrow R^2f^0v),(R^2xg^2(x,g^2(g^0,v))\rightarrow R^2g^0g^2(g^0,v)$

2.4 Ordenación de los términos $g_i^k(s_h^q,...,s_j^q)$.
$f^0 \geq g^0 \geq g^2(g^0,v) \geq g^2(x,g^2(g^0,v)$

2.5 Sustitución $g_i^k(s_h^q,...,s_j^q)/v_j$ (v_j=u,y,z,w).
$\Vdash(R^2g^0g^2(g^0,v)\rightarrow R^2uv),(R^2xg^2(x,g^2(g^0,v))\rightarrow R^2g^0g^2(g^0,v)$
$\Vdash(R^2yg^2(y,v)\rightarrow R^2uv),(R^2xg^2(x,g^2(y,v))\rightarrow R^2yg^2(y,v)$
$\Vdash(R^2yz\rightarrow R^2uv),(R^2xg^2(x,z)\rightarrow R^2yz$
$\Vdash(R^2yz\rightarrow R^2uv),(R^2xw\rightarrow R^2yz)$

Para la derivación de $\Vdash(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\forall v)(R^2yv\rightarrow R^2xz)$ a partir de este secuente procédase como en 1.1.

EJERCICIOS.

(1) Demostrar que los SS^- son consistentes en el siguiente sentido: para ninguna fórmula A sucede que $\Vdash$A y A$\Vdash$ sean SS-demostrables. (Pista: recurrir a la admisibilidad de la regla de corte y la propiedad de subfórmulas).
(2) Si t es la función de traducción de fórmulas clásicas en fórmulas intuicionistas del capítulo 4, demuéstrese que para cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, A es demostrable en SC^- syss t(A) es demostrable en SI^-.
(3) Formular y dar una demostración del teorema de Craig-Lyndon para SI^- y SC^- -es decir, sin usar el operador $\perp$. (Pista: extiéndase el prolenguaje $\mathcal{P}$ introduciendo una nueva letra relacional 0-aria **p**; sin embargo A y B seguirán siendo fórmulas de $\mathcal{P}$ (i.e., sin ocurrencias de **p**), a diferencia de C. Finalmente, reformúlense las condiciones 2 y 3 para fórmulas atómicas B$\neq$**p** y úsese **p**&$\neg$**p** en lugar de $\perp$).

CAPÍTULO 5. LÓGICAS SUBESTRUCTURALES

> Al principio el arte del puzzle parece un arte breve, un arte de poca entidad, contenido todo él en una elemental enseñanza de la Gestalttheorie.
>
> G. Perec, *La vida instrucciones de uso.*

¿CAMBIO DE LÓGICA ES CAMBIO DE TEMA?

Aunque la derivabilidad mínima, intuicionista y clásica pueden presentarse hilbertiana o secuencialmente, las diferencias en los estilos de presentación no son desdeñables. .[14] Las axiomatizaciones hilbertianas expresan una concepción de la lógica en la que el concepto de tesis o teorema prima sobre el concepto de deducción. Desde esa concepción, las diferencias entre lógicas se explican como diferencias acercade sus operadores lógicos; expresado en forma de slogan, "cambio de lógica es cambio de tema". Por el contrario, los cálculos de secuentes gentzenianos expresan una concepción de la lógica como ciencia de la deducción formal. Frente a la tesis de que lo esencial son los principios operacionales, este segundo enfoque afirmaría que son las reglas estructurales, que se enuncian sin mencionar ningún operador, las que determinan las características básicas de un sistema lógico.

¿En qué difieren las lógicas clásica e intuicionista? Desde una caracterización hilbertiana, la derivabilidad intuicionista queda caracterizada añadiendo a la correspondiente definición de la derivabilidad mínima el axioma A13 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$, y la derivabilidad clásica incorporando además bien el axioma A14 $\neg\neg A \rightarrow A$. bien el axioma A14' $A \vee \neg A$. Esos axiomas son, al menos aparentemente, principios que determinan el comportamiento derivacional del negador, de manera que viendo así las cosas, lo que parece distinguir a estas lógicas es su concepto de negación. Sin embargo, lo demostrado en el epígrafe *Teoremas del fragmento positivo* del capítulo 4 pone de manifiesto lo superficial de esa impresión.

Un enfoque secuencial, por el contrario, parece situar las peculiaridades de cada una de esas nociones de derivabilidad en las reglas de datos, y por tanto no en la interpretación de los símbolos lógicos sino en el tipo de estructuras sintácticas manipuladas por cada uno de los sistemas deductivos.

Considérese los sistemas SM, SI y SC de los capítulos 5 y 6. Cuando se comparan SM y SI se advierte que difieren únicamente porque el segundo incorpora la regla de datos adicional

$$\frac{X \Vdash}{X \Vdash A}$$

Como las reglas estructurales introducen características de la relación de derivabilidad independientes de la presencia de cualesquiera constantes lógicas, ahora las diferencias entre la lógica mínima y la intuicionista parecen girar en torno a la noción general de argumento demostrativo.

Al comparar SI y SC se advierte, por el contrario, que además de diferir por sus reglas de datos, incorporan reglas operacionales diferentes para el negador. La clave es que las únicas reglas de SC que partiendo de secuentes con a lo sumo una fórmula en el consecuente permiten

[14] La importancia de tales diferencias «estilísticas» es enfatizada por autores como Gabbay ('General theory of structured consequence relations' en Schroeder-Heister y Došen [1993], 'What is a Logical System?' en Gabbay [1994]). Así, escribe: «El papel central que desempeñan las metodologías de la teoría de la demostración en la génesis de lógicas nos lleva a proponer la tesis de que un sistema lógico es un par $\langle \vdash, S\vdash \rangle$, donde $S\vdash$ es una teoría de la demostración para $\vdash$. Con otras palabras, estamos diciendo que no basta con conocer $\vdash$ para "entender" la lógica, sino que también hay que saber cómo se presenta (i.e. $S\vdash$).» [1994, pág.181].

obtener secuentes con más de una fórmula en el consecuente son ⊩D y ¬⊩. Esta última porque lleva una fórmula del antecedente al consecuente.

Para formular cálculos de secuentes para esas dos nociones de derivabilidad con un único conjunto de reglas operacionales, hay que evitar cualquier regla de datos que lleve de secuentes-premisa con a lo sumo una fórmula en el consecuente a un secuente conclusión con múltiples fórmulas en el consecuente. Hay al menos dos modos de hacerlo. La primera es prescindir del negador; reemplazándalo por ⊥, el operador ceroario de absurdo descrito en el epígrafe *Teorema de interpolación* del capítulo 6. La segunda es formular reglas para el negador sin ese rasgo poco deseable, introduciendo nuevas conectivas estructurales.

LOS CÁLCULOS DE SECUENTES $SI^{\perp}$ y $SC^{\perp}$.

Comencemos por la solución consistente en prescindir del negador. Sea $\mathcal{P}^{\perp}$ el prolenguaje con los símbolos lógicos {⊥,&,v,→,∀,∃}. Puede decirse por tanto que $\mathcal{P}^{\perp}$ es el resultado de reemplazar '¬' por '⊥' en $\mathcal{P}$. Los cálculos de secuentes $SI^{\perp}$ y $SC^{\perp}$ operan con el prolenguaje $\mathcal{P}^{\perp}$.

$SI^{\perp}$		
Reglas de razonamiento	Axiomas	A⊩A
	Corte	
Reglas de datos	P⊩, D⊩,C⊩	
	⊩D	X⊩
		X⊩A
Reglas operacionales	⊩&	&⊩
	⊩v	v⊩
	⊩→	→⊩
	⊩∀	∀⊩
	⊩∃	∃⊩
	Axioma de ⊥	⊥⊩

$SC^{\perp}$		
Reglas de razonamiento	Axiomas	A⊩A
	Corte	
Reglas de datos	P⊩, D⊩,C⊩, ⊩P, ⊩C	
	⊩D	X⊩Y
		X⊩A,Y
Reglas operacionales	⊩&	&⊩
	⊩v	v⊩
	⊩→	→⊩
	⊩∀	∀⊩
	⊩∃	∃⊩
	Axioma de ⊥	⊥⊩
	⊩D	X⊩
		X⊩A

La ausencia del negador no supone una pérdida de capacidad expresiva, ya que puede comprobarse sin demasiada dificultad

1) Si un secuente X$\Vdash$Y de $\mathcal{P}$ es SS-derivable entonces el secuente X'$\Vdash$Y' de $\mathcal{P}^{\perp}$ resultante de reemplazar cada ocurrencia de la forma ¬A en una fórmula de X$\Vdash$Y por $A\rightarrow\perp$ es $SS^{\perp}$ demostrable.
2) Si un secuente X$\Vdash$Y de $\mathcal{P}^{\perp}$ es $SS^{\perp}$ demostrable entonces el secuente X'$\Vdash$Y' de $\mathcal{P}$ resultante de reemplazar cada ocurrencia de $\perp$ en una fórmula de X$\Vdash$Y por A&¬A es SS-demostrable.
3) $B\rightarrow A\&\neg A \Vdash \neg B$ y $\neg B \Vdash B\rightarrow A\&\neg A$ son SS-demostrables.

LA NOCIÓN DE LÓGICA SUBESTRUCTURAL.

Introduciendo una terminología que ha hecho fortuna en los últimos tiempos, se dice que un *cálculo de secuentes* SS1 es *subestructural* con respecto a un cálculo de secuentes SS2 si y sólo si

(1) SS1 y SS2 comparten las mismas reglas operacionales;
(2) toda regla estructural de SS1 es admisible en SS2.

Por tanto, SM es subestructural con respecto a SI, y $SI^{\perp}$ lo es con respecto a $SC^{\perp}$, pero SI no lo es con respecto a SC.

El concepto de subestructuralidad puede extrapolarse a lógicas. La definición correspondiente reza:
una lógica L_1 es subestructural con respecto a una lógica L_2 si y sólo si existen una formulación secuencial SS1 de L_1 y una formulación secuencial SS2 de L_2 tales que SS1 L_1 es subestructural con respecto a SS2. De acuerdo con esta definición la *lógica* mínima es subestructural con respecto a la intuicionista y esta lo es con respecto a la lógica clásica.

Cabe esperar que si L_1 es subestructural con respecto a L_2 , las diferencias entre sus respectivos cálculos secuenciales SS1 y SS2 estarán localizadas en las reglas de datos, ya que –como se ha dicho en múltiples ocasiones- las reglas de razonamiento expresan características fundamentales de la propia relación de consecuencia.

Teniendo en cuenta lo que se acaba de señalar, si L es subsestructural con respecto a L' puede considerarse que L y L' comparten *sensu propio* los mismos operadores y el mismo concepto general de consecuencia, y difieren únicamente por su concepto de argumento demostrativo. Esto confiere un potencial unificador no desdeñable a los sistemas de cálculo secuencial.

LA ESTRUCTURA DE LOS CÁLCULOS DE SECUENTES

Ha llegado el momento de recapitular lo dicho a lo largo de los últimos capítulos acerca de los cálculos de secuentes. Un cálculo de secuentes consta de tres tipos de reglas: de razonamiento, de datos y operacionales.

Las reglas de razonamiento expresan propiedades generales de la propia relación de consecuencia o, expresado con otras palabras, de los sistemas lógicos. Si comparamos los cálculos de secuentes descritos con el listado de propiedades de los sistemas lógicos del capítulo 1, encontramos reglas que expresan dos de esas cinco propiedades: la reflexividad y la transitividad. ¿Dónde han ido a parar las propiedades restantes? En el capítulo 5 se indicó que el enfoque secuencial de la consecuencia consta de una primera definición recursiva del conjunto de los secuentes demostrables (el propio cálculo de secuentes) y de una segunda definición de argumento válido en términos de secuentes demostrables. Esta segunda definición estipula que A es consecuencia de X syss para algún subconjunto finito Y de X, el secuente Y$\Vdash$A es demostrable. De esta definición se siguen inmediatamente la monotonía y la finitariedad de la relación de consecuencia. La propiedad restante de la relación de consecuencia, la estructuralidad, se desprende del uso sistemático de metavariables en el enunciado de las reglas del cálculo.

Las reglas de datos son reglas que definen la estructura básica de los objetos que manipula el cálculo. También puede decirse que estas reglas determinan características generales de $\Vdash$, a condición de no confundir $\Vdash$ con $\vdash$., derivabilidad con consecuencia. Se incurre en una confusión de este tipo cuando se piensa que la regla de debilitamiento expresa la monotonía de la operación de consecuencia. Lo que realmente expresa es la monotonía de $\Vdash$, no la de $\vdash$. La mejor prueba de ello es que si de SC se eliminan las reglas D$\Vdash$ y $\Vdash$D de

debilitamiento, manteniendo la estipulación que A es consecuencia de X syss para algún subconjunto finito Y de X, el secuente Y ⊩A es demostrable, se obtiene una lógica subestructural con respecto a la clásica, cuya relación de consecuencia es estándar.

El papel de las reglas operacionales es determinar el significado de los símbolos lógicos. En concreto, el significado de un símbolo lógico queda completamente determinado por dos conjuntos de reglas. El primer conjunto da condiciones suficientes para la introducción de ese símbolo en el consecuente, y el otro para su introducción en el antecedente. De este principio, bautizado por Belnap como *principio de suficiencia de Gentzen*, se desprenden algunas exigencias relativas al formato de las reglas operacionales.

(1) El único símbolo lógico que puede aparecer en el enunciado de una regla operacional para ○, es ○.
(2) Al enunciar las reglas de un operador lógico no han de presuponerse propiedades estructurales de ⊩, propiedades que corresponden a reglas de datos.

Está claro que los cálculos SM, SI y SC cumplen la primera exigencia. ¿Sucede lo mismo con la segunda? En presencia de las reglas D⊩, P⊩ y C⊩, las reglas de introducción del conjuntor en el antecedente pueden enunciarse indistintamente como en el capítulo 5,

$$\frac{X,A \Vdash Y}{X,A\&B \Vdash Y} \qquad \frac{X,B \Vdash Y}{X,A\&B \Vdash Y}$$

o como sigue

$$\frac{X,A,B \Vdash Y}{X,A\&B \Vdash Y}$$

Análogamente, y en presencia de esas mismas regla de datos, hay dos reglas equivalentes de introducción del conjuntor en el consecuente; la ya conocida

$$\frac{X \Vdash A,Y \qquad X \Vdash B,Y}{X \Vdash A\&B,Y}$$

Y además

$$\frac{X \Vdash A,Y \qquad X' \Vdash B,Y'}{X,X' \Vdash A\&B,Y,Y'}$$

Sin embargo, en ausencia de D⊩ o C⊩ esas reglas permiten distinguir dos operadores distintos. Por un lado, el producto tensorial o conjunción cumulativa, con las reglas

$$\otimes\Vdash \ \frac{X,A,B \Vdash Y}{X,A\otimes B \Vdash Y}$$

$$\Vdash\otimes \ \frac{X \Vdash A,Y \qquad X' \Vdash B,Y'}{X,X' \Vdash A\otimes B,Y,Y'}$$

y por otro el producto directo o conjunción alternativa, correspondiente al símbolo '&' tal y como viene usándose en este libro. Del mismo modo, pueden distinguirse una suma tensorial o disyunción acumulativa, +, con las reglas,

$$\frac{X,A \Vdash Y \quad W,B \Vdash Z}{X,W,A+B \Vdash Y,Z} \qquad \frac{X \Vdash A,B,Y}{X \Vdash A+B,Y}$$

y una suma directa o disyunción alternativa, ⊕, con las reglas para ∨ de SC.

Adviértase que si la caracterización de los operadores lógicos es independiente de las reglas estructurales que se postulen, lo específico de un sistema de cálculo secuencial (y por ende de una lógica) habrá que buscarlo en las derivaciones que pueden escribirse con independencia de esos operadores o derivaciones estructurales.

ALGUNAS LÓGICAS SUBESTRUCTURALES.

El cuadro que viene a continuación recoge de forma esquemática algunas de las principales lógicas subestructurales con respecto a la lógica clásica.

Reglas de datos suprimidas	Lógica
D ⊢, ⊢D	relevantes
C ⊢, ⊢C	BCK
D ⊢, ⊢D, C ⊢, ⊢C	lineal
todas	cálculo Lambek

Las lógicas relevantes surgen con el propósito de formalizar una implicación no veritativo-funcional, basada en una conexión entre los significados del antecedente y el consecuente. El sistema de lógica relevante resultante de omitir las reglas de debilitamiento difiere de las lógicas relevantes más comunes (como R) por no contar entre sus tesis con la distribución de la conjunción sobre la disyunción; es decir, el principio

$$(C \,\&\, (A \vee B)) \rightarrow ((C \,\&\, A) \vee (C \,\&\, B)).$$[15]

Las obras de consulta obligadas sobre las lógicas relevantes son Anderson y Belnap 1975 y 1992.

La motivación para la construcción de la lógica BCK, que resulta de suprimir de SC las reglas de contracción, es eludir las paradojas conjuntistas sin restringir el principio de comprensión. Para esta lógica puede consultarse el artículo de Ono y Komori recogido en la bibliografía.

El cálculo Lambek es primariamente subestructural con respecto a SM en tanto que únicamente manipula secuentes con a lo sumo una fórmula en el consecuente. Hablando con propiedad, lo que resulta de eliminar todas las reglas de datos de SM es la variante asociativa del cálculo Lambek. Si en la lógica clásica los argumentos demostrativos están formados por conjuntos del fórmulas y en la lógica lineal por multiconjuntos de fórmulas, en el cálculo Lambek lo están por secuencias de fórmulas, *strictu senso*. Al hablar de «argumentos», hay que advertir, sin embargo, que Lambek propuso este cálculo no como una lógica alternativa sino como un instrumento para la construcción de gramáticas categoriales. La versión no asociativa del cálculo Lambek emplea secuentes constituidos no por fórmulas sino por *términos-premisa*. Esta noción se define inductivamente: (1) toda fórmula es un término-premisa; (2) si X e Y son términos-premisa también lo es (X,Y). La regla de Corte se formula entonces así:

$$\frac{Y \vdash A \qquad X[A] \vdash C}{X[Y] \vdash C,}$$

donde 'X[A]' indica que A es un subtérmino del término X y X[Y] es el término resultante de reemplazar en aquél una ocurrencia de A por una ocurrencia del término Y. Esta es la única regla estructural de la variante no-asociativa. La variante asociativa incorpora además -como su nombre indica- las reglas de datos de asociatividad:

$$\frac{X[((YY')Y'')] \vdash C}{X[(Y(Y'Y''))] \vdash C}$$

$$\frac{X[(Y(Y'Y''))] \vdash C}{X[((YY')Y'')] \vdash C}$$

Quien desee saber más del cálculo Lambek puede leer Moortgat 1988.

El interés por la lógica lineal proviene del campo de la computación porque permite nuevos enfoques de cuestiones de distribución de memoria, efectos colaterales, etc. La idea que encierra la ausencia de reglas de debilitamiento y contracción es que los argumentos demostrativos no están constituidos por conjuntos de fórmulas, sino por multiconjuntos de fórmulas.

La lógica lineal, lo mismo que las lógicas relevantes y el cálculo Lambek, distingue los dos tipos de disyunción y los dos tipos de conjunción del epígrafe precedente.. Otros operadores lineales son los operadores ceroarios (o unidades) 1, ⊥, ⊤ y 0, que son respectivamente los elementos neutros de ⊗, +, & y ⊕. Las reglas correspondientes a las unidades son:

$$\frac{X \vdash Y \qquad\qquad X \vdash Y}{}$$

[15]]Para una formulación secuencial de R y otras lógicas relevantes, con un uso interesante de conectivas estructurales suplementarias en la construcción de los secuentes, puede consultarse R.T.Brady, 'Gentzenization and decidability of some contractionless relevant logics`, *Journal of Philosophical Logic*, 20 (1991), 97-117, además de Anderson y Belnap [1992].

$$\frac{X,1 \Vdash Y}{X \Vdash \bot,Y} \qquad \frac{}{\Vdash 1} \qquad \frac{\bot \Vdash}{} \qquad \frac{0 \Vdash X}{} \qquad \frac{}{\Vdash \top}$$

Las conectivas {⊗,+,1, ⊥} reciben el nombre de 'multiplicativos' y las conectivas {&, ⊕,⊥, 0} el de 'aditivos`. Además de los multiplicativos y aditvos, la lógica lineal cuenta con los exponenciales ! (ciertamente) y ? (¿por qué no?),que permiten "recuperar" los efectos de las reglas ausentes de debilitamiento y contracción, cuyas reglas son:

$$\frac{?X \Vdash ?Y}{?X \Vdash ?Y, !A} \textit{ ciertamente } \frac{?X \Vdash ?Y}{?X, !A \Vdash ?Y}$$

$$\frac{X \Vdash Y}{X,?A \Vdash Y} \textit{ debilitamiento } \frac{X \Vdash Y}{X \Vdash ?A,Y}$$

$$\frac{X,A \Vdash Y}{X,?A \Vdash Y} \textit{ evacuación } \frac{X \Vdash A,Y}{X \Vdash ?A,Y}$$

$$\frac{X,?A,?A \Vdash Y}{X,?A \Vdash Y} \textit{ contracción } \frac{X \Vdash ?A,?A,Y}{X \Vdash ?A,Y}$$

Para introducirse en la lógica lineal se puede leer el ensayo de Girard, titulado 'Linear logic: its syntax and semantics', en Girard, Lafont y Regnier , comps., 1995, para seguir con Girard, Lafont y Taylor, 1989.

CONECTIVAS ESTRUCTURALES

Según la definición del capítulo 5, el antecedente y el consecuente de un secuente son secuencias. Existe sin embargo una descripción alternativa,16 para la que antecedente y consecuente son estructuras con arreglo a la siguiente definición:

(1) Ø es una estructura de SS.
(2) Toda fórmula de $\mathcal{P}$ es una estructura de SS.
(3) Si X e Y son estructuras de SS distintas de Ø entonces (X,Y) es una estructura de SS.

Una primera diferencia es que cuando antecedente y consecuente son vistos como secuencias de fórmulas, la coma no tiene una ariedad definida, mientras que cuando se ven como estructuras es binaria. Así, para reformular los SS reemplazando la coma polivalente original por la coma binaria, habría que añadir reglas que expresaran su carácter asociativo, como

$$\frac{X,(Y,Z) \Vdash W}{(X,Y),Z \Vdash W} \qquad \frac{X \Vdash Y,(Z,W)}{X \Vdash (Y,Z),W}$$

El carácter binario de la coma hace emerger una analogía con los operadores oracionales del prolenguaje. Si un operador oracional combina fórmulas con fórmulas para construir fórmulas, la coma combina dos estructuras dando como resultado una nueva estructura.

Si se profundiza en la comparación de la coma con los operadores sentenciales binarios se advierte su carácter polivalente, ambiguo: en el antecedente puede "traducirse" al lenguaje objeto por la conjunción y en el consecuente por la disyunción. Lo que se quiere decir aquí por "traducción" queda aclarado por la siguiente proposición: $A_1,...,A_i \Vdash B_1,...,B_j$ *es SS-demostrable si y sólo si lo es* $A_1 \& ... \& A_i \Vdash B_1 \vee ... \vee B_j$.

Otro nombre para los operadores oracionales es "conectivas sentenciales". Basándose en consideraciones como las anteriores; se dice que la coma es una *conectiva estructural*. Un

16 El origen de esta concepción se remonta a J.M. Dunn. Cfr. Anderson y Belnap (1992), §.61.1.

cálculo de secuentes puede incorporar múltiples conectivas estructurales (en el epígrafe siguiente puede encontrarse un ejemplo). Esta posibilidad parece haber dado pie a cierta confusión terminológica y conceptual en algunos autores. Así, hay quienes entienden por "lógica subestructual" lo que propiamente sería un cálculo de secuentes con un (meta)lenguaje estructural generalizado.

LOS CÁLCULOS DE SECUENTES SM*, SI* Y SI*.

Para formular un cálculo de secuentes con negador para las lógica mínima, intuicionista y clásica, que muestre que la primera y la segunda son subestructurales con respecto a la tercera, se emplea un lenguaje estructural generalizado, con las conectivas estructurales coma, binaria, y asterisco, unaria. Por consiguiente, en esos cálculos la definición de estructura es la siguiente:
1) Ø es una estructura; no obstante se escribe X$\Vdash$ o $\Vdash$Y en vez de X$\Vdash$ Ø y Ø $\Vdash$Y.[17]
2) Toda fórmula de $\mathcal{P}$ es una estructura.
3) Si X e Y son estructuras no vacías, (X,Y) es una estructura.
Si X es una estructura también lo es *X.
La función del asterisco, como se comprobará dentro de un momento, es permitir el desplazamiento de una estructura del antecedente al consecuente y viceversa. La presencia del asterisco permite formular reglas operacionales *visibles*, reglas en las que las fórmulas activas están aisladas en uno de los lados del secuente mientras los elementos pasivos o contextuales aparecen en el otro lado y se representan en bloque (es decir, sin asignarles ninguna estructura específica) en el enunciado de la regla.[18]

Se describe en primer lugar SM*, el cálculo de secuentes correspondiente a la lógica mínima.

SM*

Reglas de razonamiento

Axiomas $A\Vdash A$

Regkas de datos

$$D\Vdash\ \frac{X\Vdash Y}{X,A\Vdash Y} \qquad C\Vdash\ \frac{X,X\Vdash Y}{X\Vdash Y} \qquad P\Vdash\ \frac{X,Y\Vdash Z}{Y,X\Vdash Z}$$

$$A\Vdash\ \frac{X,(Y,Z)\Vdash W}{(X,Y),Z\Vdash W} \qquad \Vdash *\ \frac{X,Y\Vdash Z}{X\Vdash *Y,Z} \qquad \Vdash - *\ \frac{X\Vdash *Y,Z}{X,Y\Vdash Z}$$

donde X y Z pueden ser vacías

$$*\Vdash\ \frac{X\Vdash A}{X,*A\Vdash}$$

Reglas operacionales

$$\Vdash\&\ \frac{X\Vdash A \quad X\Vdash B}{X\Vdash A\&B} \qquad \&\Vdash\ \frac{A\Vdash Y}{A\&B\Vdash Y} \qquad \&\Vdash\ \frac{B\Vdash Y}{A\&B\Vdash Y}$$

$$\vee\Vdash\ \frac{A\Vdash Y \quad B\Vdash Y}{A\vee B\Vdash Y} \qquad \Vdash\vee\ \frac{X\Vdash A}{X\Vdash A\vee B} \qquad \Vdash\vee\ \frac{X\Vdash B}{X\Vdash A\vee B}$$

$$\neg\Vdash\ \frac{X\Vdash *A}{X\Vdash \neg A} \qquad \Vdash\neg\ \frac{*A\Vdash Y}{\neg A\Vdash Y} \qquad \Vdash\rightarrow\ \frac{X,A\Vdash B}{X\Vdash A\rightarrow B}$$

$$\rightarrow\Vdash\ \frac{X\Vdash A \quad B\Vdash Y}{} \qquad \Vdash\forall^{(*)}\ \frac{X\Vdash A}{} \qquad \forall\Vdash^{(**)}\ \frac{A[t]\Vdash Y}{}$$

17 Para evitar algunas complicaciones en la formulación de las reglas, en lógica perspicua es común el uso de la conectiva estructural 0-aria I, en sustitución del símbolo vacío de Gentzen.
18 Para la noción de regla visible, vid. Sambin, Battilotti y Faggian (2000).

$$\frac{}{A\rightarrow B \Vdash {*}X, Y} \qquad \frac{}{X \Vdash (\forall v)A} \qquad \frac{}{(\forall v)A[v] \Vdash Y}$$

$$\Vdash \exists^{(**)} \ \frac{X \Vdash A[t]}{X \Vdash (\exists v)A[v]} \qquad \exists \Vdash^{(*)} \ \frac{A \Vdash Y}{(\exists v)A \Vdash Y}$$

(*) v no está libre en X, Y; se dice que v es la variable dependiente de la regla
(**) t es un término arbitrario de $\mathcal{P}$.

OBSERVACIONES.-
[1] Las diferencias con respecto a SM son la incorporación de nuevas reglas de datos (la regla A⊩ de asociatividad y las tres reglas para el asterisco), la generalización de fórmulas a estructuras de algunas de las reglas de datos restantes (P⊩ y C⊩) y la visibilidad, de las reglas operacionales.
[2] De manera aproximada, la función de la conectiva estructural * es pasar una fórmula del antecedente al consecuente marcándola con el signo '*'. Las dos primeras, en tanto que establecen la equivalencia de dos secuentes, son reglas de reescritura.
[3] Teniendo en cuenta la función que desempeña el asterisco, si *X es un constituyente del antecendente (consecuente) de un secuente, X será un constituyente consecuente (antecedente) de ese secuente. Por eso a veces resulta útil pensar en términos de ocurrencias positivas y negativas, y no sólo de ocurrencias antecedentes y consecuentes.
[4] La presencia de las reglas ⊩*, y $\rightarrow\Vdash$, que llevan de secuentes premisas con una única fórmula en el consecuente a un secuente conclusión con más de una fórmula en el consecuente puede causar cierta perplejidad, puesto que la asimetría entre el antecedente y el consecuente parece, en SM, un rasgo definitorio de la lógica mínima. Tratemos de disipar esa perplejidad.
[6] La simple inspección de las reglas de SM* permite constatar que cualquier secuente demostrable con más de una fórmula en el consecuente es de la forma X⊩*Y,Z. Partiendo de un secuente de la forma X⊩*A,Y, sólo puede reemplazarse '*A' por '¬A' cuando aquella estructura puede "despejarse" como único constituyente del consecuente, por ejemplo, como se indica a continuación:

X⊩*A,Y	
X,A⊩Y	⊩- *
(X,A),*Y⊩	*⊩
*Y,(X,A)⊩	P⊩
(*Y,X),A⊩	A⊩
*Y,X⊩*A	⊩*

.Una vez que Y pasa al antecedente marcada con *, la ausencia de una conversa para * ⊩ impide devolverla al consecuente, y por ello el único modo de hacer desaparecer el asterisco es reemplazarlo por un negador (siempre, claro está, que Y sea una fórmula). Al hacerlo, desaparece del secuente la parte consecuente Y en beneficio de la parte antecedente ¬Y, con lo que el secuente ¬Y,X⊩*A tiene como única parte consecuente *B. La conclusión es que en SM* sólo se manipulan secuentes con más de una parte consecuente para pasar de secuentes con a lo sumo una parte consecuente con secuentes con esa misma característica.
[7] Obsérvese para terminar que la nueva versión de la regla ⊩¬ hace que en SP*, a diferencia de lo que sucedía en SM, no haya ninguna regla operacional que lleve de premisas con consecuentes con a lo sumo una fórmula a una conclusión con más de una fórmula en el consecuente. Como se recordará, es la clave para mostrar que la lógica mínima es subestructural con respecto a la lógica clásica.

TEOREMA 19. Todo secuente demostrable en SM es demostrable en SM*.
DEMOSTRACIÓN. Antes de proceder por inducción sobre la longitud de la demostración en SM del secuente, hay que salvar las diferencias de formato entre los secuentes de SM, que se construyen con la coma polivalente de Gentzen, y los secuentes de SM*, que usan la coma binaria de Belnap. Una estructura de SM del tipo $X_1,\ldots,X_n$ es ambigua vista desde SM* ; al

escribir X,Y,Z con la coma de Gentzen, no se están distinguiendo '(X,Y),Z', 'X,(Y,Z)', 'Y,(X,Z)', etc., ahora con la coma de Belnap. Sin embargo, es una diferencia inocua, puesto que la presencia en SM* de las reglas P⊩, A⊩, ⊩* y ⊩-* hace equivalentes entre sí a todos esos secuentes.

La base de la demostración es inmediata, puesto que SM y SM* comparten los mismos axiomas. Para el paso de inducción, hay que considerar tantos subcasos como regla de SM. El esquema común a todos esos casos es el siguiente. Sea π una demostración en SM de un secuente S que termina con una aplicación de una regla R. Por hipótesis de inducción, para cada premisa de R existe una demostración en SM*; aplicando a esas premisas la regla de SM* homónima a R, y posiblemente una combinación de reglas de datos, se tiene una demostración en SM* del secuente S. A título de ejemplo, se describe el caso de la regla →⊩. Si hay una demosración π en SM de la forma

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ X \Vdash A & Y,B \Vdash C\end{array}}{X,Y,A\rightarrow B \Vdash C}$$

que termina con una aplicación de esa regla, hay por hipótesis de inducción sendas demostraciones en SM* de X⊩A y de Y,B⊩C. Procédase entonces así:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Y,B \Vdash C}\,\text{Hip.}}{B,Y \Vdash C}\,\mathrm{P}\Vdash}}{X \Vdash A \qquad B \Vdash {}^{*}Y,C}\,\Vdash^{*}}\,\text{Hip.}}{A\rightarrow B \Vdash {}^{*}X,({}^{*}Y,C)}\,\rightarrow\Vdash}}{A\rightarrow B,X \Vdash {}^{*}Y,C}\,\Vdash\text{-}^{*}}}{(A\rightarrow B,X),Y \Vdash C}\,\Vdash\text{-}^{*}}}{Y,(A\rightarrow B,X) \Vdash C}\,\mathrm{P}\Vdash}}{(Y,A\rightarrow B),X \Vdash C}\,\mathrm{A}\Vdash}}{X,(Y,A\rightarrow B) \Vdash C}\,\mathrm{P}\Vdash}}{(X,Y),A\rightarrow B \Vdash C}\,\mathrm{A}\Vdash$$

⊣

Más delicada es la demostración de la conversa del teorema 19, puesto que exige, en el paso de SM* a SM, deshacerse primero de las ocurrencias del asterisco. Para ello se demuestra primero el lema 10.

LEMA 10. Si π es una demostración en SM* de un secuente S sin ocurrencias de '*', entonces en ningún secuente S' de π hay partes antecedentes de la forma *X a menos que X sea una fórmula.

DEMOSTRACIÓN. Por inspección de las reglas; adviértase que la única regla que introduce un asterisco en el antecedente es *⊩ y que lo hace prefijándolo a una fórmula.

⊣

Este lema pone de manifiesto una asimetría antecedente/consecuente peculiar de SM* , puesto que hay partes consecuentes en las que el asterisco está prefijado a estructuras complejas. Esto permite "reformatear" los secuentes. Se empieza por escribir a(X),c(Y) por X⊩Y. Se definen entonces a y s para estructuras complejas (es decir, las que no son fórmulas) :

1. a(X,Y)=a(X),a(Y)
2. c(X,Y)=c(X),c(Y)
3. a(*X)= a(¬X), puesto que por el lema 10 X es una fórmula.
4. c(*X)=a(X).

Cuando se aplican estas transformaciones hasta el final, se obtiene una secuencia de expresiones de las formas a(A) y c(A), y por consiguiente sin ocurrencias de '*'. Finalmente se construye

un secuente, colocando A en el antecedente cuando a(A) aparece en la secuencia anterior y haciéndolo en el consecuente cuando aparece c(A). Naturalmente, aquí la conectiva estructural es la coma polivalente de Gentzen. Diremos que este secuente es la SM-transformación del secuente original de SM*. Veamos qué sucede cuando se aplica el procedimiento descrito a un secuente de la forma (A,B),*C ╟*D,E.

a((A,B),*C),c(*D,E)
a(A,B),a(*C),c(*D),c(E)
a(A),a(B),a(¬C),a(D),c(E)
A,B,¬C,D ╟E

LEMA 11. Si un secuente es demostrable en SM* entonces su SM-transformación es demostrable en SM.

DEMOSTRACIÓN. Para empezar, repárese en que el procedimiento de traducción garantiza en el consecuente de la SM-transformación de un secuente X ╟Y sólo pueden aparecer fórmulas de Y, nunca fórmulas de X. En concreto, la SM-transformación de un secuente de la forma X ╟*A es de la forma Y,A ╟, lo que permite dar cuenta de la regla ╟¬ de SM*. Una sutileza es que las transformaciones de la premisa y la conclusión de la regla ¬╟ son idénticas, puesto que en el antecedente *A se traduce por ¬A. El análogo en SM* de la regla de SM de introducción del negador en el antecedente es, en este contexto, la regla *╟. Por lo demás, la demostración es trivial y queda encomendada al lector meticuloso.

┤

Teniendo en cuenta el modo en que se define la consecuencia a partir de la noción de secuente demostrable, el teorema 19 y el lema 11 permiten concluir:

TEOREMA 20. Para todo conjunto de fórmulas X de $\mathcal{P}$ y toda fórmula A de $\mathcal{P}$, $X \vdash_{SM} A$ syss $X \vdash_{SM^*} A$.

Para extender SM* a un cálculo de secuentes para la lógica intuicionista basta, como cabía prever, con añadir una versión apropiada de la regla de debilitamiento por la derecha. Así pues, el cálculo **SI*** resulta de incorporar a SM* la regla

$$\frac{X \Vdash Y}{X \Vdash Y,A}\ \Vdash D^I$$

Si Y=Ø o Y=*Z

El sistema deductivo resultante posee las características que permiten demostrar los (análogos de los) lemas 10 y 11, permitiendo establcer entonces la equivalencia de SI y SI*.

TEOREMA 21. Para todo conjunto de fórmulas X de $\mathcal{P}$ y toda fórmula A de $\mathcal{P}$, $X \vdash_{SI} A$ syss $X \vdash_{SI^*} A$.

Más novedades presenta el cálculo de secuentes para la lógica clásica **SC***. En primer lugar, hay que reemplazar la regla ╟D^I por la más general:

$$\frac{X \Vdash Y}{X \Vdash Y,Z}\ \Vdash D$$

En segundo lugar, hay que añadir las simétricas por la derecha de las reglas de datos.

$$\Vdash C\quad \frac{X \Vdash Y,Y}{X \Vdash Y} \qquad \Vdash P\quad \frac{X \Vdash Y,Z}{X \Vdash Z,Y}$$

$$A \Vdash\quad \frac{X \Vdash Y,(Z,W)}{X \Vdash (Y,Z),W}$$

Finalmente, hay que generalizar *╟ al modo de ╟* y añadir su inversa:

$$*\Vdash \quad \frac{X \Vdash Y,Z}{X,*Y \Vdash Z} \qquad -*\Vdash \quad \frac{X,*Y \Vdash Z}{X \Vdash Y,Z}$$

Donde X y Z pueden ser vacías

La equivalencia de SC* y SC se demuestra de forma más directa que en los dos casos anteriores. Al no haber limitación alguna del número de fórmulas consecuentes, al transformar los secuentes de SM* en secuentes de SM, el asterisco puede tratarse uniformemente. La transformación de un secuente de SM* en un secuente de SM se realiza a través de las equivalencias siguientes:

1. a(X,Y)=a(X),a(Y).
2. c(X,Y)=c(X),c(Y).
3. a(*X)= c(X).
4. c(*X)=a(X).

Así, la SC-transformación del secuente (A,B),*C ⊩ *D,E se obtiene como sigue.

a((A,B),*C),c(*D,E)
a(A,B),a(*C),c(*D),c(E)
a(A),a(B),c(C),a(D),c(E)
A,B,D ⊩ C,E

La demostración de los lemas 12 y 13 es entonces bastante directa.

LEMA 12. Todo secuente demostrable en SC es demostrable en SC*.

LEMA 13. La SC-transformación de todo secuente demostrable en SC* es demostrable en SC. Se llega entonces al

TEOREMA 22. Para todo conjunto de fórmulas X de $\mathcal{P}$ y toda fórmula A de $\mathcal{P}$, $X \vdash_{SC} A$ syss $X \vdash_{SC*} A$.

LÓGICAS PERSPICUAS[19]

Convengamos en escribir X(Y) para indicar que la estructura Y es una subestructura de X. Es una caracterización imprecisa mientras no se especifique con qué conectivas estructurales se cuenta, pero bastará por el momento. Asimismo, se dirá que dos secuentes X ⊩ Y y Z ⊩ W son equivalentes en un cálculo de secuentes SS cuando existan sendas derivacion libres de corte en SS de X ⊩ Y a partir de Z ⊩ W y de Z ⊩ W a partir de X ⊩ Y. Por ejemplo, los secuentes A,A,B ⊩ C y B,A ⊩ C son equivalentes en SC, como se muestra a continuación.

A,A,B ⊩ C	Hipótesis
A,B,A ⊩ C	P ⊩
B,A,A ⊩ C	P ⊩
B,A ⊩ C	C ⊩

B,A ⊩ C	Hipótesis
A,B ⊩ C	P ⊩
A,B,A ⊩ C	D ⊩
A,A,B ⊩ C	P ⊩

Por el contrario los secuentes X ⊩ Y y X,A ⊩ Y no son equivalentes en SC: aunque la regla de debilitamiento en el antecedente permite pasar del primero al segundo, ese paso no es reversible.

19 'Lógica perspicua' es una traducción de *Display logic*; hasta donde sé, no hay una traducción establecida al español.

La lógica perspicua estudia los sistemas perspicuos de cálculo de secuentes. Un cálculo secuencial SS es *perspicuo* syss para todo secuente X(Z)⊩Y(W) existen dos secuentes de las formas Z⊩U y V⊩W equivalentes en SS al primero. Es obvio que los sistemas SM, SI y SC no son perspicuos, lo que no quiere decir que no haya formulaciones perspicuas de esas lógicas.

El atractivo de la lógica perspicua se apoya en cuestiones técnicas y filosóficas. Técnicamente, la perspicuidad permite dar una demostración muy general del teorema de eliminación de la regla de corte, que apela únicamente a propiedades comunes de las reglas estructurales y operacionales.[20] Así, la lógica perspicua proporciona las únicas formulaciones libres de corte de varias lógicas relevantes y de la lógica modal brouweriana (conocida como **KTB** en la nomenclatura de Lemmon-Scott). Filosóficamente, podría objetarse que una regla operacional no visible como

$$\rightarrow\Vdash \quad \frac{X\Vdash A,Y \qquad Z,B\Vdash W}{X,Z,A\rightarrow B\Vdash Y,W}$$

no se limita a explicar el significado derivacional de → puesto que lo que muestra es cómo se comporta A→B en el contexto y por ello la explicación involucra también a la coma en el *explanandum*.. Si un sistema es perspicuo, una regla como →⊩ puede reformularse "despejando" A, B y A→B en los lugares correspondientes:

$$\rightarrow\Vdash \quad \frac{X'\Vdash A \qquad B\Vdash Y'}{A\rightarrow B\Vdash Z'}$$

Belnap considera que de este modo se separan la explicación de las propiedades de los símbolos lógicos de las propiedades del contexto. Primero se explicarían el funcionamiento de los elementos contextuales (regla estructurales) y después, en un acto separado, el papel de, por ejemplo, A→B como único elemento del antecedente/consecuente. Sin embargo, los sistemas SM* y SI* nos enseñan que la perspicuidad no es imprescindible para discriminar las propiedades operacionales y contextuales. La cuestión es más bien la visibilidad de las reglas operacionales.

PERSPICUIDAD DE SC*.

Especificadas las conectivas estructurales de SC*, se puede precisar la definición anterior de perspicuidad. La introducción de la conectiva estructural * lleva a redefinir las nociones de parte antecedente y parte consecuente de un secuente (y así a precisar la vaga noción de subestructuras antecedentes y consecuentes) en el espíritu de la tercera observación. Una subestructura de una estructura en un secuente es *positiva* si no cae bajo el alcance de ningún * o si cae bajo el alcance de un número par de *. Si por el contrario cae bajo el alcance de un número impar de ocurrencias de *, se dice que la subestructura es *negativa*. Lo mismo que antes, en X⊩Y, X es el antecedente e Y el consecuente. Una *parte antecedente* de un secuente es una subestructura positiva de su antecedente o una subestructura negativa de su consecuente. Una *parte consecuente* es una subestructura negativa de su antecedente o una subestructura positiva de su consecuente.

La definición habitual de la perspicuidad es la siguiente:

DEFINICIÓN 1.Un cálculo de secuentes SS es perspicuo syss para cualquier secuente S y cualquier parte antecedente X (consecuente) de ese secuente, existe un secuente S' equivalente en SS a S de la forma X⊩Y (Y⊩X).

Sin embargo a todos los efectos sería suficiente con una noción más débil (y quizá más cuidadosa) de la perspicuidad.

20 Para la demostración del teorema de eliminación de la regla de corte en los sistemas perspicuos puede consultarse Belnap(1982) o Restall (2000), cap.6.

DEFINICIÓN 2.Un cálculo de secuentes SS es perspicuo syss para cualquier secuente S *demostrable en SS* y cualquier parte antecedente X (consecuente) de ese secuente, existe un secuente S' equivalente en SS a S de la forma X ╟ Y (Y ╟ X).

Los cálculos SM* y SI*, en cualquier caso, no son perspicuos en ninguna de las dos acepciones. La ausencia de la regla -* ╟ hace que no haya ningún secuente equivalente a, por ejemplo, A,*(AvB) ╟ cuyo consecuente sea AvB. Por el contrario, SC* es perspicuo en ambos sentidos.

En la literatura sobre el tema pueden encontrarse dos conjuntos de postulados de equivalencia para asegurar la perspicuidad (en el sentido de nuestra primera definición) de los cálculos que los contengan. El primero, debido a Belnap, es el esquema P (por Pittsburgh), que define la equivalencia perspicua como la menor relación de equivalencia que hace equivalentes entre sí todos los secuentes que aparecen en el cuadro siguiente en la misma columna:

X,Y ╟ Z	X ╟ Y,Z	X ╟ Y
X ╟ *Y,Z	X,*Y ╟ Z	*Y ╟ *X
	X ╟ Z,Y	**X ╟ Y

El segundo, debido a Wansing, es el esquema A (por Amsterdam) y define la equivalencia perspicua como la menor relación de equivalencia que hace mutuamente equivalentes a los secuentes de la misma columna del cuadro que viene a continuación:

X,Y ╟ Z	X ╟ Y,Z	X ╟ Y
X ╟ Z,*Y	X,*Z ╟ Y	*Y ╟ *X
Y ╟ *X,Z	*Y,X ╟ Z	X ╟ **Y

Aunque el esquema A y el esquema P no establecen las mismas relaciones entre secuentes, cada uno de ellos por separado asegura la perspicuidad del sistema que los incorpore.[21] No obstante, es fácil comprobar que las reglas P ╟ y ╟P hacen equivalentes entre sí a los esquemas A y P.

Atendiendo a la configuración de su antecedente, hay dos tipos de secuentes, representados por los esquemas X,Y ╟ Z y *X ╟ Y. Análogamente y atendiendo ahora a la configuración de su conecuente, se distinguen dos tipos de secuentes, X ╟ Y,Z y X ╟ *Y. Para mostrar que los esquemas A y P aseguran la perspicuidad basta con mostrar que permiten reescribir de forma equivalente cada uno de esos secuentes como se muestra en el cuadro siguiente:

X,Y ╟ Z	X ╟ W
X,Y ╟ Z	Y ╟ W
*X ╟ Y	W ╟ X
X ╟ Y,Z	W ╟ Y
X ╟ Y,Z	Z ╟ W
X ╟ *Y	Y ╟ W

A continuación se muestra cómo los esquemas A y P aseguran la perspicuidad. El trazo doble entre secuentes indica que el secuente de arriba y el secuente de abajo son equivalentes en el esquema considerado; el número entre paréntesis a la derecha remite a la columna correspondiente del esquema de equivalencias del que se trate.

:

PERSPICUIDAD EN EL ESQUEMA P.

X,Y ╟ Z		X,Y ╟ Z		*X ╟ Y	
X ╟ *Y,Z	(1)	X ╟ *Y,Z	(1)	*Y ╟ **X	(3)
		X ╟ Z,*Y	(2)	***X ╟ **Y	(3)
		X,*Z ╟ *Y	(2)	*X ╟ **Y	(3)
		**Y ╟ *(X,*Z)	(3)	*Y ╟ X	(3)
		Y ╟ *(X,*Z)	(3)		

21 Para una comparación de los dos esquemas puede consultarse N. Belnap (1996).

X ⊢ Y,Z		X ⊢ Y,Z		X ⊢ *Y	
X,*Y ⊢ Z	(2)	X ⊢ Z,Y	(2)	**Y ⊢ *X	(3)
		X,*Z ⊢ Y	(2)	Y ⊢ *X	(3)

PERSPICUIDAD EN EL ESQUEMA A.

X,Y ⊢ Z		X,Y ⊢ Z		*X ⊢ Y	
X ⊢ Z,*Y	(1)	Y ⊢ *X,Z	(1)	*Y ⊢ **X	(3)
				*Y ⊢ Y	(3)

X ⊢ Y,Z		X ⊢ Y,Z		X ⊢ *Y	
X,*Z ⊢ Y	(2)	*Y,X ⊢ Z	(2)	**Y ⊢ *X	(3)
				**X ⊢ ***Y	(3)
				**X ⊢ *Y	(3)

Para establecer entonces la perspicuidad de SC* todo lo que hay que hacer es mostrar que contiene uno de esos dos esquemas.

LEMA 14. SC* contiene el esquema P.
DEMOSTRACIÓN. Las equivalencias de la primera columna del esquema P son establecidas por las reglas ⊢* y ⊢ -*. Para la equivalencia de los dos primeros secuentes de la segunda columna basta con invocar las reglas * ⊢ y -* ⊢; para la equivalencia de esos dos secuentes con el tercero de la misma columna hay que usar la regla ⊢P. Finalmente, para las de la tercera columna, hay que usar P ⊢ , además de todas las reglas mencionadas anteriormente.

⊣

COROLARIO 11. Para cualquier secuente S y cualquier parte antecedente/consecuente X de S, existe un secuente S´ de la forma X ⊢ Y o Y ⊢ X, respectivamente, que es equivalente en SPC a S.

EJERCICIOS.

(1) Demostrar las aserciones 1-3 del epígrafe Los cálculos de secuentes SI$^{\perp}$ y SC$^{\perp}$.
(2) Una lógica es paraconsistente cuando en ella no vale la regla de Escoto A,¬A ⊢B ¿Qué reglas estructurales de SC habría que eliminar para tener una lógica paraconsistente subestructural con respecto a la clásica?
(3) Demostrar el lema 10 (Pista: mostrar que una parte antecedente de la forma *X no puede ser eliminada en una demostración a menos que X sea un fórmula).
(4) Explicitar la demostración del lema 9.
(5) Demostrar los lemas 12 y 13.
(6) Demostrar en SM* y SI* los axiomas A10 y A13 del capítulo 4, respectivamente. Demostrar en SC* los axiomas A14 y A14'.
(7) Establecer la equivalencia de los esquemas de Amsterdam y Pittsburgh dadas las reglas P ⊢ y ⊢P.
(8) Mostrar que SC* contiene el esquema A.
(9) Formular un cálculo de secuentes para la lógica de Rasiowa con seminegación (descrita en el ejercicio 5 del capítulo 2) usando como conectivas estructurales la coma y el asterisco.

CAPÍTULO 6. SISTEMAS DE TABLAS ANALÍTICAS

> En la figura que se llama *oximoron*, se aplica a una palabra un epíteto que parece contradecirla; así los gnósticos hablaron de luz oscura; los alquimistas, de un sol negro.
>
> J.L. BORGES, *El zahir* .

DEL CÁLCULO DE SECUENTES A LAS TABLAS ANALÍTICAS.

En la tipología de los sistemas deductivos del capítulo 1, los sistemas gentzenianos se oponen a los sistemas hilbertianos porque éstos constan de reglas de nivel 0 de la forma

$$X \Rightarrow Y$$

(e.g. la regla de *modus ponens* $A \rightarrow B, A \Rightarrow B$) y aquellos de reglas de nivel 1 de la forma

$$\frac{X_1 \Rightarrow Y_1, \ldots, X_1 \Rightarrow Y_1}{X \Rightarrow Y}$$

(como la regla $[\Vdash\!\rightarrow]$ $X, A \Rightarrow B, Y \;/\; X \Rightarrow A \rightarrow B, Y$). A su vez, las reglas de nivel 1 se subdividen en reglas estructurales y operacionales, y éstas en reglas de eliminación y reglas de introducción. Según lo expuesto en el capítulo 1, las reglas de introducción se caracterizan porque para cualquier aplicación de esa regla $c(X_1 \Rightarrow Y_1, \ldots, X_1 \Rightarrow Y_1) = c(X \Rightarrow Y) - 1$ y las de eliminación porque en todas sus aplicaciones se comple $c(X_1 \Rightarrow Y_1, \ldots, X_1 \Rightarrow Y_1) = c(X \Rightarrow Y) + 1$. La distinción entre reglas de introducción y de eliminación permite clasificar los sistemas gentzenianos en tres grupos:

(a) *sistemas de cálculo secuencial*: aquellos cuyas reglas operacionales son reglas de introducción;
(b) *sistemas de tablas analíticas*: aquellos cuyas reglas operacionales son reglas de eliminación;
(c) *sistemas de deducción natural*: aquellos que constan tanto de reglas de eliminación como de reglas de introducción.[22]

Los tres capítulos precedentes están dedicados precisamente al estudio de sistemas gentzenianos del primer grupo. En este capítulo se consideran sistemas del segundo y en el próximo capítulo los del tercero.

La manera más sencilla de obtener un sistema de tablas analíticas a partir de un sistema de cálculo de secuentes es invertir sus reglas,transformando así reglas de introducción en reglas de eliminación. Partiendo de los sistemas SS resultan los sistemas de tablas analíticas TSS que se describen a continuación.

Lógica mínima (TSM)

Secuentes de cierre $A \Vdash A$

Reglas estructurales

$$D\Vdash \frac{X, A \Vdash Y}{X \Vdash Y} \qquad R\Vdash \frac{X, A \Vdash Y}{X, A, A \Vdash Y}$$

$$P\Vdash \frac{X, B, A, X' \Vdash Y}{X, A, B, X' \Vdash Y}$$

Reglas operacionales

$$\&\Vdash \frac{X, A\&B \Vdash C}{X, A \Vdash C} \qquad \frac{X, A\&B \Vdash C}{X, B \Vdash C}$$

[22] Hay que reconocer que la nomenclatura no es particularmente afortunada y puede inducir a confusión. Sistemas bidireccionales (deducción natural) y unidireccionales, distinguiendo dentro de éstos ascendentes (cálculo de secuentes) y descendentes (tablas analíticas), sería preferible si no fuera por el peso de la historia.

$$\Vdash\& \quad \frac{X \Vdash A\&B}{X \Vdash A \qquad X \Vdash B}$$

$$\Vdash\vee \quad \frac{X \Vdash A\vee B}{X \Vdash A} \qquad\qquad \frac{X \Vdash A\vee B}{X \Vdash B}$$

$$\vee\Vdash \quad \frac{X,A\vee B \Vdash C}{X,A \Vdash C \qquad X,B \Vdash C}$$

$$\rightarrow\Vdash \quad \frac{X,Y,A\rightarrow B \Vdash C}{X \Vdash A \qquad Y,B \Vdash C} \qquad \Vdash\rightarrow \quad \frac{X \Vdash A\rightarrow B}{X,A \Vdash B}$$

$$\neg\Vdash \quad \frac{X \Vdash A}{X,\neg A \Vdash} \qquad \Vdash\neg \quad \frac{X,A \Vdash}{X \Vdash \neg A}$$

$$\Vdash\forall \quad \frac{X \Vdash (\forall v)A}{X \Vdash A} \qquad \forall\Vdash \quad \frac{X,(\forall v)A[v] \Vdash B}{X,A[t] \Vdash B}$$

$$\Vdash\exists \quad \frac{X \Vdash (\exists v)A[v]}{X \Vdash A[t]} \qquad \exists\Vdash \quad \frac{X,(\exists v)A \Vdash B}{X,A \Vdash B}$$

Donde las reglas $\Vdash\forall$ y $\exists\Vdash$ están sujetas a la restricción:de que v no esté libre en X, B.

Lógica intuicionista (TSI)

Añádase a TSM la regla estructural

$$\Vdash D \quad \frac{X \Vdash A}{X \Vdash}$$

Lógica clásica (TSC)

Secuentes de cierre $A \Vdash A$

Reglas estructurales

$$D\Vdash \quad \frac{X,A \Vdash Y}{X \Vdash Y} \qquad R\Vdash \quad \frac{X,A \Vdash Y}{X,A,A \Vdash Y}$$

$$P\Vdash \quad \frac{X,B,A,X' \Vdash Y}{X,A,B,X' \Vdash Y} \qquad \Vdash D \quad \frac{X \Vdash A,Y}{X \Vdash Y}$$

$$\Vdash R \quad \frac{X \Vdash A,Y}{X \Vdash A,A,Y} \qquad \Vdash P \quad \frac{X \Vdash Y,B,A,Y'}{X \Vdash Y,A,B,Y'}$$

Reglas operacionales

$$\&\Vdash \quad \frac{X,A\&B \Vdash Y}{X,A \Vdash Y} \qquad \frac{X,A\&B \Vdash Y}{X,B \Vdash Y}$$

$$\Vdash\& \quad \frac{X \Vdash A\&B,Y}{X \Vdash A,Y \qquad X \Vdash B,Y}$$

$$\Vdash\vee \quad \frac{X \Vdash A\vee B,Y}{X \Vdash A,Y} \qquad \frac{X \Vdash A\vee B,Y}{X \Vdash B,Y}$$

$$\vee\Vdash \quad \frac{X,A\vee B \Vdash Y}{X,A \Vdash Y \qquad X,B \Vdash Y}$$

$$\rightarrow\Vdash \quad \frac{X,Y,A\rightarrow B \Vdash Z,W}{X \Vdash A,Z \qquad Y,B \Vdash W} \qquad \Vdash\rightarrow \quad \frac{X \Vdash A\rightarrow B,Y}{X,A \Vdash B,Y}$$

$$\neg\Vdash \quad \frac{X\Vdash A,Y}{X,\neg A\Vdash Y} \qquad \Vdash\neg \quad \frac{X,A\Vdash Y}{X\Vdash\neg A,Y}$$

$$\Vdash\forall \quad \frac{X\Vdash(\forall v)A,Y}{X\Vdash A,Y} \qquad \forall\Vdash \quad \frac{X,(\forall v)A[v]\Vdash Y}{X,A[t]\Vdash Y}$$

$$\Vdash\exists \quad \frac{X\Vdash(\exists v)A[v],Y}{X\Vdash A[t],Y} \qquad \exists\Vdash \quad \frac{X,(\exists v)A\Vdash Y}{X,A\Vdash Y}$$

Donde las reglas $\Vdash\forall$ y $\exists\Vdash$ están sujetas a la restricción:de que v no esté libre en X, Y.

Adviértase que la inversión afecta también a las reglas estructurales, y no sólo a las operacionales. Se ha reemplazado la letra 'C' de la designación de las reglas de contracción por la letra'R', de «reiteración», por considerar que ésta es ahora una denominación más adecuada.

Una *demostración de un secuente* $X\Vdash Y$ *en TSS* (=TSM,TSI,TSC) es un árbol finito cuyos nodos son secuentes de $\mathcal{P}$ tal que

(1) su origen es $X\Vdash Y$,

(2) sus nodos terminales son secuentes de cierre,

(3) cualquier nodo distinto del origen resulta de su predecesor al aplicar una regla de TSS.

De un árbol finito que satisfaga las condiciones enunciadas excepto 2 se dice que es *una tabla analítica para* $X\Vdash Y$. En consonancia, una tabla para $X\Vdash Y$ cuyos nodos terminales sean secuentes de cierre es una *tabla analítica cerrada para* $X\Vdash Y$, y así un secuente es demostrable syss hay una tabla analítica cerrada para él. Por consiguiente, una fórmula A es *derivable en TSS* de un conjunto de fórmulas X syss para algún subconjunto finito Y de X, el secuente $Y\Vdash A$ es demostrable en TSS.

Es obvio que TSM es equivalente a SM^- (es decir, ambos definen la misma relación de derivabilidad), TSI a SI^- y TSC a SI^-: al invertir una demostración de $X\Vdash A$ en TSS se tiene una demostración de $X\Vdash Y$ en SS y viceversa.

Desde luego todo esto no es particularmente excitante. Más adelante se aclarará algo de lo que se gana invirtiendo las demostraciones del cálculo secuencial. Pero antes hagamos un par de observaciones. Hay quien mantiene que las reglas de introducción son, en el orden de la justificación, anteriores a las reglas de eliminación. Por consiguiente, el cálculo de secuentes sería anterior a ese respecto al cálculo de tablas analíticas (de hecho lo es cronológicamente: el origen de éste hay que buscarlo en las demostraciones de completitud de aquél).

La segunda observación trata de prevenir un error de concepto relativamente extendido en nuestro país (y proviniente de la obra de E.W.Beth)[23]. Aunque la apostilla final del párrafo anterior sugiere que las tablas analíticas exhiben una afinidad mayor con los lenguajes formales que los cálculos secuenciales, está claro que las tablas analíticas no son en ningún sentido un procedimiento semántico. Son un sistema deductivo, exactamente igual que los cálculos de secuentes. Después de todo si al leer al revés las reglas y demostraciones de un sistema deductivo, de naturaleza sintáctica, resultase un lenguaje formal, de naturaleza semántica, habría que admitir la existencia de la magia. Es cierto que las reglas de tablas analíticas admiten, exactamente igual que las de cálculo secuencial, una lectura semántica (en términos de preservación de propiedades semánticas), pero eso no las convierte en reglas semánticas.

REESCRIBIENDO LOS SECUENTES.

Las convenciones vigentes para la transcripción de demostraciones en TAS hacen la tarea innecesariamente engorrosa por la cantidad de redundancia tolerada. Un ejemplo sencillo ayudará a entenderlo.

[23] Al describir un mecanismo deductivo similar al de estas páginas, Beth emplea la denominación «tablas semánticas» -la introducción de terminologías desafortunadas no es en lógica tan rara como debiera.

⊩(∃x)(Px→(∀y)Py)	
⊩(∃x)(Px→(∀y)Py),(∃x)(Px→(∀y)Py)	⊩R
⊩Pc→(∀y)Py,(∃x)(Px→(∀y)Py)	⊩∃
Pc⊩(∀y)Py,(∃x)(Px→(∀y)Py)	⊩→
Pc⊩Py,(∃x)(Px→(∀y)Py)	⊩∀
Pc⊩(∃x)(Px→(∀y)Py),Py	⊩P
Pc⊩Py→(∀y)Py,Py	⊩∃
Pc,Py⊩(∀y)Py,Py	⊩→
Py,Pc⊩(∀y)Py,Py	P⊩
Py⊩Py,(∀y)Py	D⊩
Py⊩(∀y)Py,Py	⊩P
Py⊩Py	⊩D

La información relevante para la construcción de la tabla es, en última instancia, de la forma «A en el antecedente» y «A en el consecuente». Desde este punto de vista, una misma información como «(∃x)(Px→(∀y)Py) en el consecuente» aparece registrada siete veces: una en cada uno de los nodos 1, 3-6 y dos veces en el nodo 2. Dicho de un modo más gráfico, la información se registra horizontalmente (en cada secuente) y verticalmente (pasando de un secuente a otro).

Estas consideraciones sugieren que la transcripción podría simplificarse utilizando el separador de secuente '⊩' como prefijo y sufijo de fórmulas, y registrando la información únicamente en el eje vertical. La idea es leer '⊩A' como «A en el consecuente» y 'A⊩' como «A en el antecedente». Las demostraciones se representarían entonces como árboles con nodos de las formas '⊩A' y 'A⊩', siendo A una fórmula de $\mathcal{P}$, en los que el enésimo nodo α de una rama Θ iría asociado con el secuente $A_1,...,A_i⊩B_1,...,B_j$ cuyo antecedente estaría formado por las fórmulas C tales que C⊩ es un nodo de Θ que precede o es igual a α, y cuyo consecuente por las fórmulas D tales que ⊩D precede o es igual a α en Θ. Así, la demostración anterior se convertiría en

1. ⊩(∃x)(Px→(∀y)Py)
2. ⊩Pc→(∀y)Py
3. Pc⊩
4. ⊩(∀y)Py
5. ⊩Py
6. ⊩Py→(∀y)Py
7. Py⊩

Adviértase que todo apunta a que esta transformación permitirá prescindir de reglas estructurales, lo que por cierto es menos ventajoso de lo que podría parecer. Así, la fórmula con prefijo del nodo 1 es usada dos veces, dando lugar a 2 y 6, en tanto que la aplicación de la regla no la «cancela» reemplazándola por otra fórmula. Esto permite pasarse sin la regla de reiteración. Si la profundidad de los nodos no determina el orden de aplicación de las reglas, puede prescindirse asimismo de la regla de permutación. Finalmente, si una rama cerrada es simplemente una rama con dos nodos ⊩A y A⊩ (sin requerir, por ejemplo, que uno de ellos sea el predecesor del otro), también cabe omitir la regla de permutación.

La desaparición de las reglas estructurales, si bien puede ser vista como una simplificación, plantea un problema, puesto que desde una perspectiva secuencial las diferencias entre las lógicas mínima, intuicionista y clásica vienen expresadas precisamente por medio de reglas estructurales.

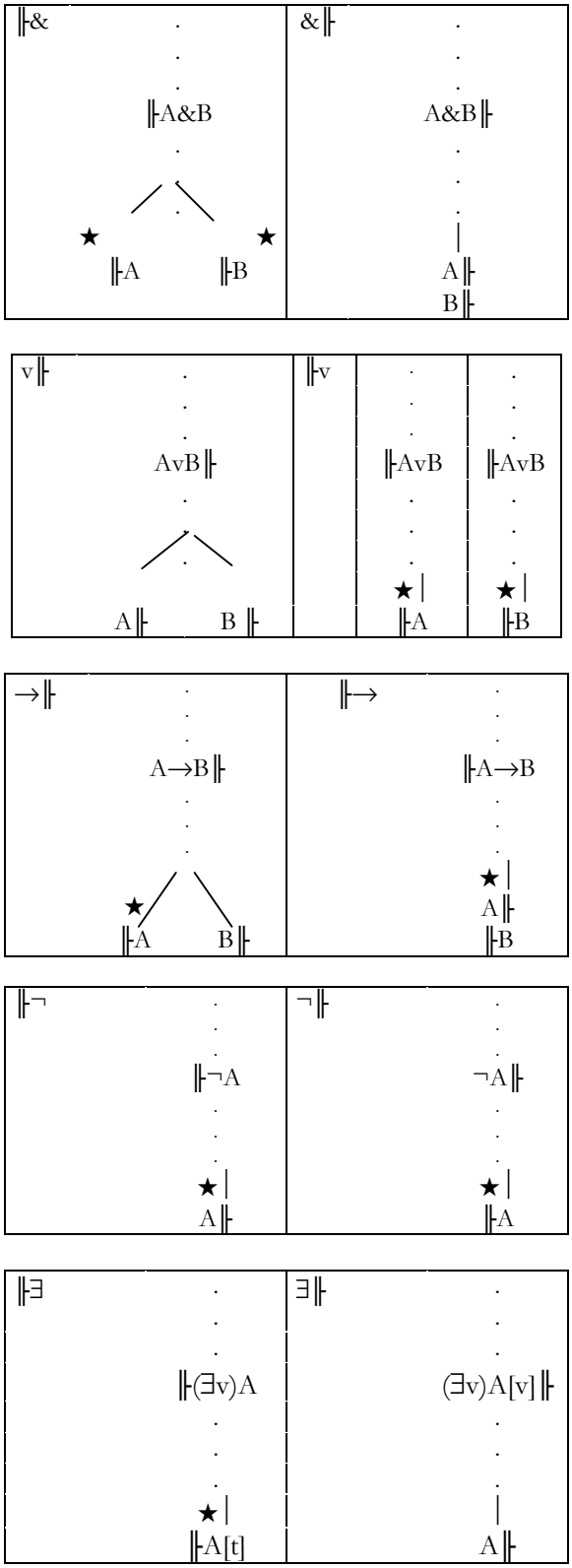
En el epígrafe siguiente se abordan ésta y otras cuestiones, formulándose todas estas sugerencias con la precisión debida.

TABLAS ANALÍTICAS PARA LAS LÓGICAS MÍNIMA, INTUICIONISTA Y CLÁSICA.

Se hará uso de los signos auxiliares '⊩' y '★'. El primero se usará como en el epígrafe precedente. El segundo no ha de ser confundido con el asterisco del capítulo 7, que representa una

conectiva estructural. Llamaremos «fórmulas signadas» a las expresiones de las formas '⊩A' y 'A⊩', donde 'A' es una fórmula de $\mathcal{P}$. La función de la estrella es marcar determinados puntos de una rama para capturar las diferencias entre las lógicas que se vienen considerando mediante las restricciones oportunas.

Lógica mínima (TM)



$\Vdash\forall$	$\forall\Vdash$
.	.
.	.
.	.
$\Vdash(\forall v)A[v]$	$(\forall v)A\Vdash$
.	.
.	.
.	.
$\bigstar$ |	|
$\Vdash A$	$A[t]\Vdash$

Restricciones.- (1) Las reglas $\exists\Vdash$ y $\Vdash\forall$ están sujetas a la restricción: v no está libre en ninguno de los nodos que preceden a la conclusión. (2) Las reglas $\Vdash\&$, $\Vdash v$, $\Vdash\rightarrow$, $\Vdash\neg$, $\Vdash\exists$ y $\Vdash\forall$ únicamente pueden aplicarse cuando entre la premisa correspondiente y el nodo terminal de la rama no hay ninguna estrella. (3) La aplicación de la regla $\neg\Vdash$ presupone que el nodo terminal de la rama que se está extendiendo no es de la forma $\Vdash B$ y entre cualquier nodo de la forma $\Vdash B$ y el nodo terminal hay un asterisco.

Lógica intuicionista (TI)

Como TM eliminando la restricción (3) de la regla $\neg\Vdash$.

Lógica clásica (TC)

Como TI eliminando de las reglas los asteriscos.

Definiciones

Una *tabla analítica en TS (=TM,TI,TC)* para un conjunto finito de fórmulas signadas $\{A_1\Vdash,...,A_n\Vdash,\Vdash B\}$ es un árbol cuyos nodos son fórmulas signadas y tal que

(1) su origen es $A_1\Vdash$,

(2) si n>i el único sucesor de $A_i\Vdash$ es A_{i+1} y en caso contrario es $\Vdash B$,

(3) cualquier nodo distinto de los n+1 primeros resulta de un nodo que le domina al aplicar una regla de TSS.

Una *rama* de una tabla analítica para TS (=TM,TI,TC) es *cerrada* syss 1) contiene dos nodos $A\Vdash$ y $\Vdash A$, y 2) entre $\Vdash A$ y el nodo terminal no hay ningún asterisco. Una *tabla analítica* en TS es *cerrada* syss todas sus ramas lo son.

$X\vdash_{TS}B$ (la fórmula B se sigue en TS del conjunto de fórmulas X) syss para algún $\{A_1,...,A_n\}\subseteq X$, hay una tabla analítica cerrada para $\{A_1\Vdash,...,A_n\Vdash,\Vdash B\}$ en TS.

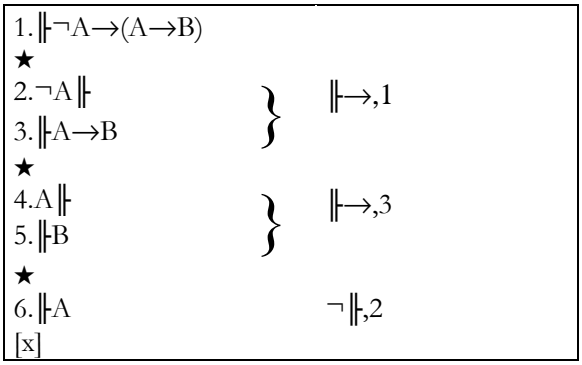
Con respecto a TC hay que señalar que, alternativamente, podrían conservarse los asteriscos, de manera que las reglas para TI y TC serían exactamente iguales, eliminando de la definición de rama cerrada para TC la segunda claúsula.

EJEMPLOS

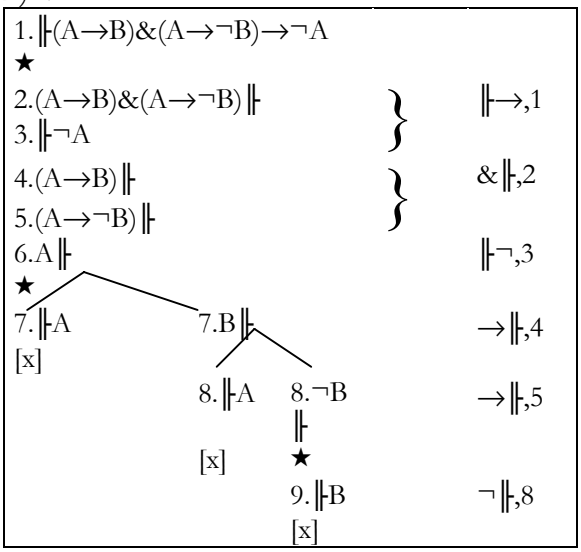
1. $\vdash_{TC}(A\rightarrow B)v(B\rightarrow A)$

1. $\Vdash(A\rightarrow B)v(B\rightarrow A)$		
2. $\Vdash A\rightarrow B$	}	$\Vdash v$,1
3. $\Vdash B\rightarrow A$	}	
4. $A\Vdash$	}	$\Vdash\rightarrow$,2
5. $\Vdash B$	}	
6. $B\Vdash$	}	$\Vdash\rightarrow$,3
7. $\Vdash A$	}	
[x]		

2. $\vdash_{TI} \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

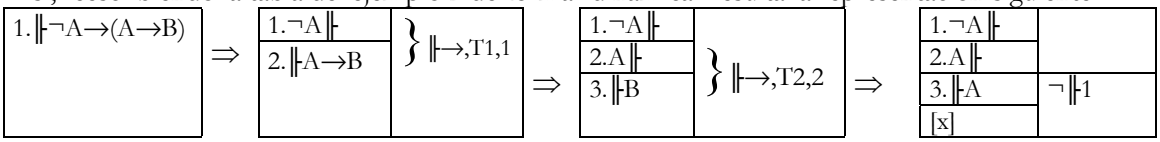


2. $\vdash_{TM} (A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$



EQUIVALENCIA DE LOS TSS Y LOS TS.

Ya se ha indicado que la función del signo auxiliar '★' es diferenciar a las lógicas mínima, intuicionista y clásica entre sí en ausencia de reglas estructurales. Las dos primeras se distinguen de la tercera desde el punto de vista del cálculo de secuentes porque sólo manipulan secuentes de las formas X⊩A y X⊩. El efecto de insertar una estrella entre dos nodos de una rama es borrar cualquier nodo anterior consistente en una fórmula con prefijo '⊩', como puede comprobarse examinando la restricción de las reglas para fórmulas con prefijo y la definición de rama cerrada. Así, reescribiendo la tabla del ejemplo 2 de forma «dinámica» resulta la representación siguiente:



Por ello, la inserción de una estrella puede verse como una regla para «reescribir» una rama, omitiendo algunos de sus nodos, y no para extenderla. Habría, por tanto, algo así como un trasunto de reglas estructurales (i.e., de reescritura) frente a las reglas puramente operacionales (i.e., de extensión).

En este sentido está claro que en cualquier rama de una tabla analítica en TM o TI hay a lo sumo una fórmula con prefijo. Esto corresponde a las restricciones sobre la cardinalidad del consecuente de los correspondientes cálculos secuenciales. En cuanto a las diferencias entre TM y TI, en el cálculo secuencial se reflejan en la ausencia en el primer caso y la presencia en el segundo de la regla ⊩D, bajo la forma

$$\frac{X \Vdash}{\quad}$$

$$\frac{}{X \Vdash A.}$$

Traducido al formato tablas, correspondería a la «cancelación» de un nodo de la forma $\Vdash A$ sin reemplazarlo por otro. Adviértase a este respecto que en la representación dinámica de la tabla intuicionista para $\Vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$, al pasar de la tercera a la cuarta columna aplicando $\neg \Vdash$, se elimina $\Vdash B$ sin reemplazarlo por otro nodo. Es justamente en este paso en donde quedaría bloqueada la construcción empleando reglas mínimas, puesto que el nodo 3 de la tercera columna es $\Vdash B$ y por ello no podría aplicarse $\neg$.

TEOREMA 23. $X \vdash_{TM} A$ syss $X \vdash_{TSM} A$.

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$ Según se ha indicado, la construcción de una tabla analítica para $A_1 \Vdash,...,A_n \Vdash, \Vdash B$ en TI puede verse como un proceso de construcción sucesiva de árboles. Además, en cada uno de las ramas de esos árboles ocurre a lo sumo una fórmula con prefijo $\Vdash$, y las restricciones para aplicar $\Vdash \neg$ aseguran que cuando se aplica esta regla en la rama correspondiente no hay fórmulas con prefijo. Por tanto, con cada rama y segmento inicial de rama de esos árboles puede asociarse el secuente cuyo antecedente está formado por las fórmulas con sufijo $\Vdash$ y cuyo consecuente está formado por la fórmula (si la hay) con prefijo $\Vdash$. La tabla que viene a continuación especifica el mecanismo de asociación.

	secuente asociado al segmento-premisa	secuentes asociados a los segmentos-conclusión
Origen		$A_1,...,A_n \Vdash B$
$\& \Vdash$	$X,A\&B,Y \Vdash C$	$X,A\&B,A,B,Y \Vdash B$
$\Vdash \&$	$X \Vdash A\&B$	$X \Vdash A$
		$X \Vdash B$
$\vee \Vdash$	$X,A\vee B,Y \Vdash C$	$X,A\vee B,A,Y \Vdash C$
		$X,A\vee B,B,Y \Vdash C$
$\Vdash \vee$	$X \Vdash A\vee B$	$X \Vdash A$
$\Vdash \vee$	$X \Vdash A\vee B$	$X \Vdash B$
$\rightarrow \Vdash$	$X,A\rightarrow B,Y \Vdash C$	$X,A\rightarrow B,Y \Vdash A$
		$X,A\rightarrow B,B,Y \Vdash C$
$\Vdash \rightarrow$	$X \Vdash A\rightarrow B$	$X,A \Vdash B$
$\Vdash \neg$	$X \Vdash \neg A$	$X,A \Vdash$
$\neg \Vdash$	$X,\neg A \Vdash$	$X,\neg A \Vdash A$
$\Vdash \exists$	$X \Vdash (\exists v)A$	$X \Vdash A$
$\exists \Vdash$	$X,(\exists v)A[v],Y \Vdash B$	$X,(\exists v)A[v],A[t],Y \Vdash B$
$\Vdash \forall$	$X \Vdash (\forall v)A[v]$	$X \Vdash A[t]$
$\forall \Vdash$	$X,(\forall v)A,Y \Vdash B$	$X,(\forall v)A,A,Y \Vdash B$

Dada una tabla analítica T en TM, el cuadro especifica un árbol de secuentes T'. No hace falta pensar mucho para percatarse de que, en general, T" no será una tabla analítica en TSM. Sin embargo puede demostrarse:

(1) hay una tabla analítica T" en TSM que preserva las relaciones de dominación en T";

(2) si T es cerrada, T" puede extenderse aplicando reglas de TSM a una tabla cerrada.

Para demostrar la primera afirmación basta con mostrar que para cualquier secuente de la segunda columna del cuadro hay una sucesión de aplicaciones de reglas de TSM que da como resultado el o los secuentes de la tercera columna. En algunos casos es inmediato, por ejemplo, $\Vdash \&$:

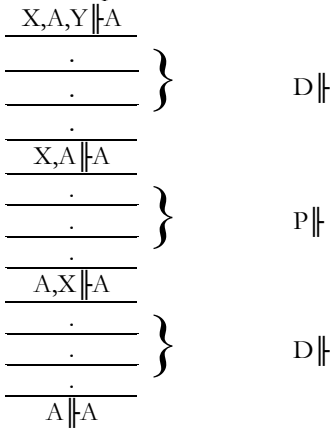
$$\frac{X \Vdash A\&B}{X \Vdash B} \Vdash \&$$

y en otros casos requiere un poco más de ingenio (tampoco demasiado), por ejemplo, $\& \Vdash$:

$X,A\&B \Vdash Y$	hipótesis
$X,A\&B,A\&B \Vdash Y$	$R \Vdash$
$X,A\&B,A\&B,A\&B \Vdash Y$	$R \Vdash$
$X,A\&B,A\&B,A \Vdash Y$	$\& \Vdash$
$X,A\&B,A,A\&B \Vdash Y$	$P \Vdash$
$X,A\&B,A,B \Vdash Y$	$\& \Vdash$

En cuanto a la segunda afirmación, si T es cerrada en cada rama Θ de T hay dos nodos $A \Vdash$ y $\Vdash A$ sin que entre este último y el nodo terminal de Θ haya ningún asterisco. En tal caso el secuente terminal de la rama correspondiente Θ' de T" es de la forma $X,A,Y \Vdash A$. En efecto, según la construcción de T' y T" si un nodo $A \Vdash$ domina o es igual al nodo terminal de Θ entonces A ocurre

en el antecedente del secuente asociado a ese nodo terminal. Por otra parte si el nodo ╟A domina al nodo terminal y entre ambos no hay asteriscos, tampoco hay entre ambos nodos de la forma ╟B y por consiguiente A ocurre en el consecuente del secuenteen cuestión. Así, el secuente terminal de Θ es de la forma X,A,Y╟A y para obtener a partir de él un secuente de cierre se procede como sigue:



⇐ Si T es una tabla analítica cerrada para $A_1,...,A_n$╟B en TSM le asociamos una colección de árboles (según la representación dinámica de las tablas de TM) conforme a lo estipulado en el cuadro siguiente, en el que Θ es la rama asociada al secuente premisa.

	ramas asociadas a los secuentes-conclusión
Origen	A_1╟,...,A_n╟,╟B
R.estructural	Θ
&╟ (1ª forma)	Θ^A╟
╟&	Θ-{╟C/C∈Θ}^╟A/Θ-{╟C/C∈Θ}^╟A
v╟	Θ^A╟/Θ^B
╟v (1ª forma)	Θ-{╟C/C∈Θ}^╟A
╟v (2ª forma)	Θ-{╟C/C∈Θ}^╟B
→╟	Θ-{╟C/C∈Θ}^╟A/Θ^B╟
╟→	Θ-{╟C/C∈Θ}^A╟^╟B
╟¬	Θ-{╟C/C∈Θ}^A╟
¬╟	Θ-{╟C/C∈Θ}^╟A
╟∃	Θ^╟A
∃╟	Θ^A[t]╟
╟∀	Θ^╟A[t]
∀╟	Θ^A╟

Lo primero que hay que mostrar es que el resultado de estas transformaciones es una representación dinámica de una tabla en TM. Para ello hay que mostrar que si a un nodo de la rama Θ se le aplica la regla homóloga de TM, el resultado es la rama o ramas que aparecen en la columna de la derecha del cuadro anterior en la fila correspondiente. El único caso que presenta algún interés es el de ¬╟, puesto para poder aplicar esta regla no puede haber nodos de la forma ╟C en Θ (ésta es la traducción «dinámica» de la restricción 3 de las reglas de TM). Si ╟C fuese el último nodo de Θ consistente en una fórmula con prefijo, es fácil comprobar que el secuente correspondiente sería de la forma X╟C y por tanto el paso siguiente en la construcción de la tabla para TSM no puede ser una aplicación de ¬╟.

En segundo lugar, si T es cerrada la última tabla de TM también lo es. En efecto, sea Θ una rama de T cuyo secuente terminal es un secuente de cierre, digamos A╟A. Una inspección del cuadro muestra que si ξ es la rama asociada a un secuente X,A╟Y de T entonces A╟ ocurre en ξ (la instrucción «borrar» aparece siempre bajo la forma 'Θ-{╟C/C∈Θ}'). Por otra parte, si A╟A es el

nodo terminal de Θ, ╟A ocurre en la rama asociada ξ a ese secuente (aún más, es la única fórmula con prefijo de ξ).

┤

Con ligeras modificaciones, la misma línea de razonamiento lleva a los dos siguientes teoremas (cuya demostración queda, pues, para el lector):

TEOREMA 24. $X \vdash_{TI} A$ syss $X \vdash_{TSI} A$.

TEOREMA 25. $X \vdash_{TC} A$ syss $X \vdash_{TSC} A$.

UNA SEMÁNTICA PARA LA LÓGICA CLÁSICA DE PRIMER-ORDEN

Hasta el momento se dispone de tres sistemas deductivos para cada una de las lógicas consideradas, de los que sabemos que son equivalentes entre sí. Así, por lo que se refiere a la lógica clásica los teoremas 7 y 9 establecen la equivalencia de HC y SC (o lo que es lo mismo, que $\vdash_{HC}$ y $\vdash_{SC}$ es la misma relación) y el teorema 21 junto con el hecho de que al invertir una demostración de un secuente X╟Y en SC resulta una demostración de ese secuente en TSC y viceversa establece la equivalencia de SC y TC. Por tanto, HC, SC y TC son definiciones distintas de una misma relación de consecuencia en el prolenguaje $\mathcal{P}$.

Se ha apuntado anteriormente que el interés de los sistemas de tablas analíticas proviene de que es relativamente fácil mostrar que definen la misma relación de consecuencia que un lenguaje formal determinado. Para comprobarlo, comencemos por construir un lenguaje formal LFC para $\mathcal{P}$.

Un *modelo de* $\mathcal{P}$ es un par M=<U,I>, donde U≠∅ es un conjunto llamado «universo de M» e I es una función cuyo dominio está formado por las letras relacionales y funcionales de $\mathcal{P}$ y tal que si $\mathbf{R}^n$ es una letra relacional enearia, $I(\mathbf{R}^n) \subseteq U^n$, y si $\mathbf{f}^n$ es una letra funcional enearia, $I(\mathbf{f}^n): U^n \rightarrow U$.

Dado un conjunto U, una *asignación de valores a las variables de* $\mathcal{P}$ *sobre U* es una función g del conjunto de variables de $\mathcal{P}$ en U. Por tanto, si v es una variable, g(v)∈ U.

El *valor semántico* de un término t de $\mathcal{P}$ con respecto a un modelo M=<U,I> y una asignación g sobre su universo U, $[t]^{M,g}$, se define recursivamente:

1. Si t es una variable, $[t]^{M,g}=g(t)$,
2. si t es de la forma $\mathbf{f}^n(t_1,...,t_n)$ entonces $[t]^{M,g}=I(\mathbf{f}^n)<[t_1]^{M,g},...,[t_n]^{M,g}>$.

El *valor de verdad* de una fórmula A con respecto a un modelo M=<U,I> y una asignación g sobre su universo U, $[A]^{M,g}$, también se define por recurrencia:

1. si c(A)=0, A es de la forma $\mathbf{R}^n t_1,...,t_n$ y en tal caso $[A]^{M,g}=1$ syss $\langle [t_1]^{M,g},...,[t_n]^{M,g}\rangle \in I(\mathbf{R}^n)$.
2. $[\neg A]^{M,g}=1$ syss $[A]^{M,g}=0$.
3. $[A\&B]^{M,g}=1$ syss $[A]^{M,g}=[B]^{M,g}=1$.
4. $[A \vee B]^{M,g}=1$ syss $[A]^{M,g}=1$ o $[B]^{M,g}=1$.
5. $[A \rightarrow B]^{M,g}=1$ syss $[A]^{M,g}=0$ o $[B]^{M,g}=1$.
6. $[(\exists v)A]^{M,g}=1$ syss para alguna asignación g' sobre U que difiere de g a lo sumo por el valor que asigna a v, $[A]^{M,g'}=1$.
7. $[(\forall v)A]^{M,g}=1$ syss para toda asignación g' sobre U que difiera de g a lo sumo por el valor que asigna a v, $[A]^{M,g'}=1$.

Las dos estipulaciones que vienen a continuación introducen a partir de esta definición el valor de verdad de una fórmula A con respecto a un modelo M=<U,I>, para el que se emplea la notación $[A]^M$:

- $[A]^M=1$ syss para toda asignación g sobre U, $[A]^{M,g}=1$.
- $[A]^M=0$ syss para toda asignación g sobre U, $[A]^{M,g}=0$.

Obsérvese que mientras $[A]^{M,g}$ es una función total (toda fórmula es verdadera o falsa con respecto a M y g), $[A]^M$ es una función parcial (algunas fórmulas son verdaderas en un modelo, otras falsas, y otras no son ni verdaderas ni falsas).

Si X es un conjunto de fórmulas y M un modelo y sucede que para toda fórmula A∈B, $[A]^M=1$, se dice que M es *un modelo de* X. Asímismo, si X tiene al menos un modelo, se dice que X es *satisfacible* en LFC.

La noción de *consecuencia semántica*, o entrañamiento semántico, en LFC se define entonces así:

X $\models_{LFC}$A syss para todo modelo M=<U,I> y toda asignación g sobre U, si $[B]^{M,g}=1$ para toda fórmula B∈X entonces $[A]^{M,g}=1$.

Esta no es, sin embargo, la definición más común de entrañamiento semántico para la lógica clásica de primer orden, que reza: X $\models_{LFC'}$A syss todo modelo de X es un modelo de {A}. Adviértase que (1) si las fórmulas de X y A no tienen variables libres, las dos definiciones son equivalentes, y (2) $\models_{LFC'} \subseteq \models_{LFC}$.

Una segunda definición equivalente es X $\models_{LFC}$A syss X ∪ {¬A} es insatisfacible.

La noción de entrañamiento es el homólogo semántico de la noción sintáctica de derivabilidad. También la noción de teorema tiene un homólogo semántico: una fórmula A es *válida* en LFC syss ∅ $\models_{LFC}$A, o, lo que es lo mismo, syss todo modelo de $\mathcal{P}$ es un modelo de A.

Aún cuando se trate de una misma relación de consecuencia, su definición como derivabilidad y su definición como entrañamiento tienen características muy distintas. La primera es una definición recursiva y la segunda no; de la primera se sigue trivialmente que es finitaria, pero no de la segunda, etc. de ahí el interés que tiene demostrar la equivalencia de derivabilidad y entrañamiento.

ADECUACIÓN, CORRECCIÓN Y COMPLETITUD.

Sea SD=<F, $\vdash$> un sistema deductivo y LF=<F, $\models$> un lenguaje formal que comparten un mismo prolenguaje.

SD es *correcto* con respecto a LF syss para cualesquiera X⊆F y A∈F, si X $\vdash$A entonces X $\models$A;

SD es *completo* con respecto a LF syss para cualesquiera X⊆F y A∈F, si X $\models$A entonces X $\vdash$A;

SD es *adecuado* con respecto a LF syss SD es correcto y completo con respecto a LF; es decir, syss para cualesquiera X⊆F y A∈F, X $\vdash$A syss X $\models$A.

En ocasiones se distingue entre adecuación (corrección, completitud) fuerte y débil. En tal caso las nociones definidas en las líneas anteriores son las de corrección, completitud y adecuación fuertes. Si en ellas se reemplaza «es consecuencia de» por «es una tesis» se obtienen las definiciones de corrección, completitud y adecuación débiles; así:

SD es *débilmente correcto* con respecto a LF syss para cualquier A∈F, si $\vdash$A entonces $\models$A;

SD es *débilmente completo* con respecto a LF syss para cualquier A∈F, si $\models$A entonces $\vdash$A;

SD es *débilmente adecuado* con respecto a LF syss SD es débilmente correcto y completo con respecto a LF.

En las páginas siguientes, pues, se demuestra la adecuación (fuerte) de TC con respecto a LFC. De la adecuación de TC se sigue, teniendo en cuenta la equivalencia de TC con HC y SC, que HC y SC son igualmente adecuados con respecto a LFC.

TEOREMA DE CORRECCIÓN PARA TC.

Si M=<U,I> es un modelo de LFC y g es una asignación sobre U, el *valor de verdad de una fórmula signada* con respecto a M y g viene definido por las ecuaciones $[A\|\!\vdash]^{M,g}=[A]^{M,g}$, $[\|\!\vdash A]^{M,g}\neq[A]^{M,g}$. Diremos que un conjunto de fórmulas signadas X es verdadero para M y g cuando para cualquier fórmula *signada* α de X, $[\alpha]^{M,g}=1$, y que una rama Θ de una tabla analítica en TC es verdadera para M y g cuando lo sea el conjunto de sus nodos. Finalmente, una tabla analítica en TC es verdadera para M y g syss lo es una de sus ramas.

Sean **T** y **T'** dos tablas analíticas en TC tales que **T'** resulta de T al aplicar sobre un nodo de una rama de **T** una de las reglas de TC. Diremos entonces que **T'** es una *extensión inmediata* de **T** y escribiremos $\mathbf{T}<_i\mathbf{T'}$ para indicarlo. Además, si hay $\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_n$ tales que $\mathbf{T}<_i\mathbf{T}_1<_i...<_i\mathbf{T}_n<_i\mathbf{T'}$, diremos que **T'** es una *extensión* de **T**, y lo indicaremos con $\mathbf{T}<\mathbf{T'}$.

LEMA 15. Si **T** es verdadera para un modelo M=<U,I> y una asignación g sobre U, y $\mathbf{T}<\mathbf{T'}$ entonces **T'**es verdadera para M y g.

DEMOSTRACIÓN.- Demostramos que se cumple para el caso en el que $\mathbf{T}<_i\mathbf{T'}$; el lema se sigue entonces por inducción sobre la longitud de la secuencia $\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_n$ entre **T** y **T'**.

Si **T** es verdadera para M y g, hay una rama Θ de **T** verdadera para M y g. Si la aplicación de una regla a un nodo de **T** que da lugar a **T'** se efectúa sobre una rama distinta de Θ, se sigue trivialmente que **T'** es verdadera para M y g. Así pues, supóngase que el nodo en cuestión es un nodo de Θ. Si la regla aplicada es &⊩, A&B⊩ es un nodo de Θ y la rama correspondiente de **T'** resulta de añadir tras el nodo terminal de Θ las fórmulas signadas A⊩ y B⊩. Como quiera que $[A\&B\Vdash]^{M,g}=[A\&B]^{M,g}=1$ syss $[A]^{M,g}=[A\Vdash]^{M,g}=1$ y $[B]^{M,g}=[B\Vdash]^{M,g}=1$, y por consiguiente Θ^<A⊩,B⊩> es verdadera para M y g y lo mismo sucede con **T'**. Si, en segundo lugar, la regla aplicada fuera ⊩&, se extendería la rama Θ, uno de cuyos nodos sería ⊩A&B, a dos ramas Θ^<⊩A> y Θ^<⊩B>. $[\Vdash A\&B]^{M,g}=1$ syss $[A\&B]^{M,g}=0$, y por tanto syss o bien $[A]^{M,g}=0$ o bien $[B]^{M,g}=0$. Así se sigue que $[\Vdash A]^{M,g}=1$ o $[\Vdash B]^{M,g}=1$. Así Θ^<⊩A> o Θ^<⊩B> es verdadera para M y g, y puesto que ambas son ramas de **T'**, **T'** es verdadera para M y g. Los casos de las reglas de los demás operadores sentenciales se tratan de forma similar. Pasemos pues a ocuparnos de las reglas cuantificacionales. Si ⊩(∃v)A ocurre en Θ y en el paso a **T'** esta rama se extiende, aplicando ⊩∃, a Θ^<A[t]>, $[\Vdash(\exists v)A]^{M,g}=1$ syss $[(\exists v)A]^{M,g}=0$. A su vez, ésto último se cumple syss para toda asignación g' sobre U que difiera de g a lo sumo por el valor asignado a v, $[A]^{M,g'}=0$; de aquí se sigue que para todo término t de $\mathcal{P}$, $[A[t]]^{M,g}=0$, ya que $[t]^{M,g}\in U$ y así para algún g´, $g'(v)=[t]^{M,g}$. Por consiguiente, Θ^<A[t]> es verdadera para M y g, y por ende **T'**. Si la regla aplicada es ∃⊩, $[(\exists v)A\Vdash]^{M,g}=[(\exists v)A]^{M,g}$ y $[(\exists v)A]^{M,g}=1$ syss para toda asignación g' que difiera de g a lo sumo por el valor asignado a v, $[A]^{M,g'}=1$. Así, $[A]^{M,g}=1$ y Θ^<A⊩> es verdadera para M y g, y por ende Θ. Los casos correspondientes a ∀ se tratan de manera análoga.

┤

TEOREMA 26 (DE CORRECCIÓN). Para todo conjunto de fórmulas X y toda fórmula B de $\wp$, si $X\vdash_{TSC}B$ entonces $X\models_{LFC}B$.

DEMOSTRACIÓN. Según la definición correspondiente, $X\vdash_{TSC}A$ syss hay $\{A_1,...,A_n\}\subseteq X$ tal que hay una tabla analítica cerrada en TS para $\{A_1\Vdash,...,A_n\Vdash,\Vdash B\}$. Sea **T** esa tabla analítica y supóngase que no $X\models_{LFC}B$. Habría entonces un modelo M=<U,I> y una asignación g sobre U tales que para todo i, 1≤i≤n, $[Ai]^{M,g}=1$ y $[B]^{M,g}=0$. Por tanto, para todo i, 1≤i≤n, $[Ai\Vdash]^{M,g}=1$ y $[\Vdash B]^{M,g}=0$. Obviamente **T** es una extensión de la tabla

$$\mathbf{T_0}\quad\left\{\begin{array}{c} A_1\Vdash \\ \hline . \\ \hline . \\ \hline . \\ \hline A_n\Vdash \\ \hline \Vdash B \end{array}\right.$$

y supuesto que $\mathbf{T_0}$ es verdadera para M y g, por el lema 10 **T** lo sería igualmente; es decir, habría al menos una rama Θ de **T** verdadera para M y g. Pero todas las ramas de **T** son cerradas, y por tanto Θ contiene dos nodos ⊩C y C⊩. En tal caso, $[C\Vdash]^{M,g}=[\Vdash C]^{M,g}=1$. Esto lleva a una contradicción, puesto que se sigue que $[C]^{M,g}=1$ y $[C]^{M,g}=0$ aunque $[\ ]^{M,g}$ es una función (total) del conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$ en {0,1}.

┤

TEOREMA DE COMPLETITUD PARA TC.

Un conjunto de fórmulas signadas de $\mathcal{P}$, X, es un *conjunto saturado descedente (o de Hintikka)* syss para cualesquiera fórmulas A y B de $\mathcal{P}$ se cumple:

H_0. si c(A)=0 y $A\Vdash\in X$ entonces $\Vdash A\notin X$.
H_1. si $A\&B\Vdash\in X$ entonces $A\Vdash, B\Vdash\in X$.
H_2. si $\Vdash A\&B\in X$ entonces $\Vdash A\in X$ o $\Vdash B\in X$.
H_3. si $AvB\Vdash\in X$ entonces $A\Vdash\in X$ o $B\Vdash\in X$.
H_4. si $\Vdash AvB\in X$ entonces $\Vdash A, \Vdash B\in X$.
H_5. si $\Vdash A\rightarrow B\in X$ entonces $A\Vdash, \Vdash B\in X$
H_6. si $A\rightarrow B\Vdash\in X$ entonces $\Vdash A\in X$ o $B\Vdash\in X$.
H_7. si $\neg A\Vdash\in X$ entonces $\Vdash A\in X$.
H_8. si $\Vdash\neg A\in X$ entonces $A\Vdash\in X$.
H_9. si $(\exists v)A\Vdash\in X$ entonces para algún término t de $\mathcal{P}$, $A[t]\Vdash\in X$
H_{10}. si $\Vdash(\exists v)A\in X$ entonces para todo término t de $\mathcal{P}$ $\Vdash A[t]\in X$
H_{11}. si $(\forall v)A\Vdash\in X$ entonces para todo término t de $\mathcal{P}$, $A[t]\Vdash\in X$
H_{12}. si $\Vdash(\forall v)A\in X$ entonces para algún término t de $\mathcal{P}$ $\Vdash A[t]\in X$.

LEMA 16 (DE HINTIKKA). Para todo conjunto saturado descendente X hay un modelo $M=<U,I>$ de $\mathcal{P}$ y una asignación g sobre U tales que para cualquier $A\in X$, $[A]^{M,g}=1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea U un conjunto cualquiera con el mismo cardinal que el conjunto de términos de $\mathcal{P}$, y sea entonces h una función 1-1 del conjunto de términos de $\mathcal{P}$ en U. La función de interpretación I del modelo y la asignación g se definen de manera que se cumpla, para cualquier término t, $[t]^{M,g}=h(t)$. Es decir, (i) I(c)=h(c) para cualquier letra funcional 0-aria c, (ii) g(v)=h(v) para cualquier variable v, y (iii) para cualquier letra funcional i-aria f^i_j , $I(f^i_j)<[t_1]^{M,g},...,[t_i]^{M,g}>=h(f^i_j t_1,...,t_i)$.. En cuanto a la interpretación de las letras relacionales, $<h(t_1),...,h(t_i)>\in I(R^i_j)$ syss $(R^i_j t_1,...,t_i\Vdash)\in X$.

El siguiente paso es comprobar que el modelo y la asignación especificadas verifican todas las fórmulas (signadas) de X. Para ello se procede por inducción sobre la complejidad de la fórmula signada. Para c(A)=0 es inmediato:

- $(R^i_j t_1,...,t_i\Vdash)\in X \Leftrightarrow <h(t_1),...,h(t_i)>\in I(R^i_j) \Leftrightarrow [R^i_j t_1,...,t_i]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [R^i_j t_1,...,t_i\Vdash]^{M,g}=1$.
- $(\Vdash R^i_j t_1,...,t_i)\in X \Rightarrow(H_0)$ $(R^i_j t_1,...,t_i\Vdash)\notin X \Leftrightarrow <h(t_1),...,h(t_i)>\notin I(R^i_j) \Leftrightarrow [R^i_j t_1,...,t_i]^{M,g}=0 \Leftrightarrow [\Vdash R^i_j t_1,...,t_i]^{M,g}=1$.

Para c(A)=k+1, los casos de los operadores sentenciales no presentan dificultad alguna.

- $\neg A\Vdash\in X \Rightarrow(H_7)$ $\Vdash A\in X \Rightarrow$(hip.ind.) $[\Vdash A]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [A]^{M,g}=0 \Leftrightarrow [\neg A]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [\neg A\Vdash]^{M,g}=1$.
- $\Vdash\neg A\in X \Rightarrow(H_8)$ $A\Vdash\in X \Rightarrow$(hip.ind.) $[A\Vdash]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [A]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [\neg A]^{M,g}=0 \Leftrightarrow [\Vdash\neg A]^{M,g}=1$.

- $(A\&B)\Vdash\in X \Rightarrow(H_1)$ $A\Vdash\in X$ y $B\Vdash\in X \Rightarrow$(hip.ind.) $[A\Vdash]^{M,g}=[B\Vdash]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [A]^{M,g}=[B]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [A\&B]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [(A\&B)\Vdash]^{M,g}=1$.
- $\Vdash(A\&B)\in X \Rightarrow(H_2)$ $\Vdash A\in X$ o $\Vdash B\in X \Rightarrow$(hip.ind.) $[\Vdash A]^{M,g}=1$ o $[\Vdash B]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [A]^{M,g}=0$ o $[B]^{M,g}=0 \Leftrightarrow [A\&B]^{M,g}=0 \Leftrightarrow [\Vdash(A\&B)]^{M,g}=1$.

etc.

El tratamiento de los cuantificadores ofrece mayor interés. Si g' es una asignación sobre U que difiere de g a lo sumo por el valor asignado a la variable v, para toda fórmula A de $\mathcal{P}$ se verifica $[A[v]]^{M,g'}=1$ syss $[A[h^{-1}(g'v)]]^{M,g}=1$ ya que trivialmente $g(h^{-1}(g'v))=g'(v)$. Esto permite reformular las claúsulas de los cuantores como se indica a continuación:

6'. $[(\exists v)A[v]]^{M,g}=1$ syss para algún término t,$[A[t]]^{M,g}=1$.
7'. $[(\forall v)A[v]]^{M,g}=1$ syss para todo término t, $[A[t]]^{M,g}=1$.

El tratamiento del cuantor existencial (el del universal es análogo) es entonces:

➢ $(\exists v)A\Vdash\in X \Rightarrow (H_9)$ $A[t]\Vdash\in X$ para algún término t de _ $\Rightarrow$(hip.ind.) $[A[t]\Vdash]^{M,g}=1$ $\Leftrightarrow [A[t]]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [(\exists v)A[v]]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [(\exists v)A[v]\Vdash]^{M,g}=1$.

➢ $\Vdash(\exists v)A\in X \Rightarrow (H_{10})$ $\Vdash A[t]\in X$ para todo término t de _ $\Rightarrow$(hip.ind.) $[\Vdash A[t]]^{M,g}=1$ para todo término t de _ $\Leftrightarrow [A[t]]^{M,g}=0$ para todo término t $\Leftrightarrow [(\exists v)A[v]]^{M,g}=0 \Leftrightarrow$ $[\Vdash(\exists v)A[v]]^{M,g}=1$.

┤

Las ramas abiertas de una tabla analítica pueden no ser conjuntos de Hintikka (la clave está en H_{10} y H_{11}). Sí lo son si la tabla se construye con arreglo al procedimiento que se detalla a continuación. Dada una enumeración $t_1,t_2,...$ de los términos de $\mathcal{P}$, una *tabla analítica sistemática* **T** para un conjunto de fórmulas signadas $A_1,...,A_n$ se identifica con el límite de la cadena $\mathbf{T}_0<_i\mathbf{T}_1<...<_i\mathbf{T}_n<_i...$ tal que

(1) $\mathbf{T}_0=$ $\left\{\begin{array}{l} A_1\Vdash \\ . \\ . \\ . \\ A_1 \end{array}\right.$

(2) Si $\mathbf{T}_k$ es cerrada, $\mathbf{T}_k=\mathbf{T}_{k+1}$, en cuyo caso, además, $\mathbf{T}=\mathbf{T}_k$. Lo mismo sucede cuando todo no-atómico de cada rama abierta de $\mathbf{T}_k$ ya ha sido usado. Si no es así, tómese de entre los nodos no atómicos no usados de las ramas abiertas de $\mathbf{T}_k$ el de menor nivel situado más a la izquierda. Si ese nodo no es de una de las formas $\Vdash(\exists v)A$, $\Vdash(\forall v)A$, $(\exists v)\Vdash$, $(\forall v)A\Vdash$, extiéndase cada rama abierta de $\mathbf{T}_k$ que pase por ese nodo aplicando la regla correspondiente y declárese usado el nodo-premisa. Si el nodo es de la forma $(\exists v)A\Vdash$ o de la forma $\Vdash(\forall v)A$, tómese el primer término de la enumeración que no ocurra en $\mathbf{T}_k$, t_j, y añádase a cada rama abierta que pase por ese nodo $A[t_j]\Vdash$ o $\Vdash A[t_j]$, según el caso, y declárese usado el nodo-premisa. Finalmente, si el nodo es de la forma $(\forall v)A\Vdash$ o de la forma $\Vdash(\exists v)A$, extiéndase cada rama abierta Θ que pase por ese nodo añadiendo sucesivamente $A[t_i]\Vdash$ y $(\forall v)A\Vdash$, en el primer caso, o, en el segundo, $\Vdash A[t_i]$ y $\Vdash(\exists v)A$, donde t_i es el primer término de la enumeración tal que $A[t_i]\Vdash$, o $\Vdash A[t_i]$, no ocurre en Θ, y declárese usada la fórmula-premisa. El resultado de estas manipulaciones es $\mathbf{T}_{k+1}$.

Una tabla analítica sistemática no es, propiamente, una tabla analítica, debido a la iteración de las fórmulas de los tipos $(\forall v)A\Vdash$ y $\Vdash(\exists v)A$ descrita hace un momento. No obstante, si se omiten esas repeticiones el resultado es una tabla analítica *sensu propio*. En lo que sigue hablaremos en ocasiones de una «tabla analítica sistemática» para referirnos, de hecho, a la tabla analítica obtenible del modo indicado.

Una *tabla analítica sistemática* está *acabada* si todos sus nodos no atómicos han sido usados. De la descripción del proceso de construcción de tablas analíticas sistemáticas se desprende:

LEMA 17. Toda rama abierta de una tabla sistemática acabada es un conjunto saturado descendente.

Este lema y el lema 16 llevan a su vez a:

LEMA 18. Para toda rama abierta Θ de una tabla sistemática acabada hay un modelo $M=<U,I>$ de $\wp$ y una asignación g sobre U tales que para cualquier $A\in\Theta$, $[A]^{M,g}=1$.

Para obtener un teorema de completitud para TC hay que introducir una ligera modificación en las definiciones precedentes de «tabla analítica para X» y «tabla analítica sistemática para X», motivada por la necesidad de disponer de definiciones apropiadas cuando X no es finito.

Una *tabla analítica en TC* para un conjunto de fórmulas signadas X es un árbol cuyos nodos son o bien fórmulas signadas de X o bien resultan de aplicar a nodos que les dominan reglas de TC.

Una *tabla analítica sistemática* **T** para un conjunto de fórmulas signadas X, dada una enumeración $t_0,t_1,...$ de los términos de $\wp$ y una enumeración $A_0,A_1,...$ de las fórmulas de

X, se identifica con el límite de la cadena $\mathbf{T}_0<_i\mathbf{T}_1<...<i\mathbf{T}_n<_i...$ tal que (1) $\mathbf{T}_0=\{A_0\}$ y (2) $\mathbf{T}_{k+1}$ se define como antes si $\mathbf{T}_k$ es cerrada y en otro caso como el resultado de añadir como nodo terminal de cada rama abierta de $\mathbf{T}_k$ la fórmula A_{k+1} (si existe) y proceder entonces como se indicó antes.

Estas alteraciones no afectan a la definición de derivabilidad en TC, ya que, por el lema de König, toda tabla analítica cerrada para X, sea cual sea el cardinal de X, es finita.

LEMA 19 (DE KÖNIG). Todo árbol finitamente ramificado con infinitos nodos contiene al menos una rama infinita.

DEMOSTRACIÓN. Llamemos «fecundos» (y hasta qué punto) a aquellos nodos que dominan a una infinidad de nodos. Por hipótesis el árbol que se está considerando tiene infinitos nodos y todos ellos son dominados por su origen; por tanto el origen del árbol es fecundo. Como el árbol es finitamente ramificado, todo nodo tiene finitos sucesores y por tanto si todos los sucesores de un nodo son infecundos, el propio nodo es infecundo. Así pues, un nodo fecundo siempre tiene un sucesor fecundo. Tomando consecutivamente el origen del árbol, un sucesor fecundo del origen, un sucesor fecundo del nodo anterior, etc. se genera una rama infinita.

⊣

TEOREMA 27 (DE COMPLETITUD). Si $X\models_{LFC}A$ entonces $X\vdash_{TC}A$.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $X\models_{LFC}A$ pero no $X\vdash_{TC}A$. En tal caso toda tabla analítica para $X\Vdash \cup \{\Vdash A\}$ es abierta y *a fortiori* lo es cualquier tabla analítica sistemática para ese conjunto. Sea $\mathbf{T}$ una tabla semejante y Θ una rama abierta de $\mathbf{T}$. Por el lema 18 hay un modelo $M=<U,I>$ y una asignación g sobre U tales que para toda fórmula $B\in X$, $[B]^{M,g}=1$ y $[A]^{M,g}=0$. *Ergo* no $X\models_{LFC}A$, contra la hipótesis de partida.

⊣

CORTE EN TABLAS ANALÍTICAS: TEOREMA DE ELIMINACIÓN.

Una diferencia llamativa entre los sistemas TSS y los sistemas TS es que éstos carecen de reglas estructurales. Como ya se ha señalado, no es necesariamente una ventaja, como se advierte cuando se intenta demostrar directamente la equivalencia de los TS y los HS.

Sabemos que los TS son equivalentes a los SS, los SS^- y los HS: por T7-T9, SS≅HS; por Corolario 5, SS≅SS^-; por T19-21 TSS≅TS; y por las observaciones de páginas anteriores, TSS≅SS. Pero esta demostración de la equivalencia deductiva de los TS y los HS a través de los TSS explota la presencia de la regla de Corte y su ulterior eliminabilidad en los sistemas de cálculo secuencial.

¿Qué sucedería si quisiéramos establecer la equivalencia de los sistemas de tablas analíticas TS y los sistemas hilbertianos HS sin pasar por los sistemas de cálculo secuencial? Para demostrar que si $X\vdash_{HS}A$ entonces $X\vdash_{TS}A$ tendríamos que demostrar, entre otras cosas, que la regla de *modus ponens* preserva la derivabilidad en tablas analíticas. Es decir, que si hay sendas tablas cerradas para $X \cup \{\Vdash A\}$ y para $X \cup \{A\Vdash\}$, donde X es un conjunto de fórmulas signadas, entonces hay una tabla cerrada para X. Cuando hay una tabla cerrada para X si hay una tabla cerrada para $X \cup \{\Vdash A\}$ y otra para $X \cup \{A\Vdash\}$, se dice que A es *eliminable*. El análogo del teorema fundamental de Gentzen puede formularse entonces así: toda fórmula (no signada) es eliminable.

Para demostrar esa proposición hay que introducir alguna terminología adicional. Un conjunto de fórmulas cerradas X es *cerrado* si hay una tabla analítica cerrada para X. Asímismo se dice que X *cierra con peso* $n\in N$ si hay una tabla analítica cerrada para X, **T**, y card(**T**)-card(X)=n.[24] X *cierra via A con peso n* si hay una tabla cerrada para X con peso n y A es la primera fórmula de X usada en su construcción. Finalmente, A es *n-eliminable* comporta que para todo conjunto finito X, si $X \cup \{A\Vdash\}$ cierra con peso i y $X \cup \{\Vdash A\}$ cierra con peso j, i+j=n, X cierra.

El lema siguiente es el análogo para tablas analíticas del lema 4.

[24] Por card(**T**) se entiende el cardinal del conjunto de sus nodos.

LEMA 20. Sean n,k∈N tales que para toda fórmula A, (1) si c(A)<n, A es eliminable, y (2) si c(A)=n, para todo j<k, A es j-eliminable. Entonces toda fórmula B, c(B)=n, es eliminable.

DEMOSTRACIÓN. Sea B una fórmula cualquiera de complejidad n y supóngase que X ∪ {B⊩} cierra con peso i y X ∪ {⊩B} cierra con peso j. Para demostrar que X cierra procedemos por inducción sobre n=i+j. En primer lugar, si i=0 o j=0, X cierra. Si, por ejemplo, j=0, o hay una fórmula C, ⊩C,C⊩∈X, en cuyo caso X cierra con peso 0, o B⊩∈X, en cuyo caso X ∪ {⊩B}=X, que por hipótesis cierra con peso i. Así pues, asúmase que i,j>0. Si X ∪ {B⊩} cierra via C con peso i y X ∪ {⊩B} cierra via D con peso j, hay que considerar dos grupos de casos:

[a] B⊩≠C o ⊩B≠D,
[b] B⊩=C y B⊩=D.

[a] Considérese para simplificar que B⊩≠C (el otro subcaso se trata de manera análoga). Aunque habría que considerar tantos casos como reglas de TC, aquí se considerarán explícitamente los cuatro siguientes: (a.1) C=C'&C"⊩, (a.2) C=⊩C'&C", (a.3) C=(∀v)C'⊩, y (a.4) C=⊩(∀v)C', encomendándose al lector los casos restantes.

[a.1] Si X ∪ {B⊩} cierra via C'&C"⊩ con peso i entonces X ∪ {B⊩,C'⊩} o X ∪ {B⊩,C"⊩} cierra con peso <i. Por otra parte, X ∪ {⊩B,C'&C"⊩} cierra con peso j, puesto que C'&C"⊩∈X, y lo mismo vale para X ∪ {⊩B,C'⊩} y X ∪ {⊩B,C"⊩}. Así, o bien X ∪ {B⊩,C'⊩} y X ∪ {⊩B,C'⊩} cierran con peso combinado <i+j o bien X ∪ {B⊩,C"⊩} y X ∪ {⊩B,C"⊩} cierran con peso combinado <i+j, y como c(B)=n, por la segunda condición del enunciado del lema, B es eliminable. Por tanto, X ∪ {C'⊩} o X ∪ {C"⊩} cierra. Evidentemente en cualquiera de los dos casos X ∪ {C'&C"⊩} cierra.

[a.2] Si X ∪ {B⊩} cierra via ⊩C'&C" con peso i entonces X ∪ {B⊩,⊩C'} y X ∪ {B⊩,⊩C"} cierran con peso <i. Además, X ∪ {⊩B,⊩C'&C"} cierra con peso j, puesto que ⊩C'&C"∈X, y lo mismo vale para X ∪ {⊩B,⊩C'} y X ∪ {⊩B,⊩C"}. Por tanto, X ∪ {B⊩,⊩C'} y X ∪ {⊩B,⊩C'} cierran con peso combinado <i+j al igual que X ∪ {B⊩,⊩C"} y X ∪ {⊩B,⊩C"}. Por la segunda condición del enunciado del lema, se sigue que X ∪ {⊩C'} y X ∪ {⊩C"} cierran, y ulteriormente que X ∪ {⊩C'&C"}=X cierra. [a.3] Si X ∪ {B⊩} cierra via (∀v)C'⊩ con peso i entonces X ∪ {B⊩,C´[t]⊩} cierra con peso <i para algún término t. X ∪ {⊩B,(∀v)C'⊩} cierra con peso j ya que (∀v)C'⊩∈X, lo mismo que X ∪ {⊩B,C´[t]⊩}. Así X ∪ {B⊩,C´[t]⊩} y X ∪ {⊩B,C'[t]⊩} cierran con peso combinado <i+j, y como c(B)=n, de nuevo por la segunda condición, B es eliminable y X ∪ {C'[t]⊩} cierra y entonces también lo hace X ∪ {(∀v)C'⊩}=X.

[a.4] Si X ∪ {B⊩} cierra via ⊩(∀v)C' con peso i, X ∪ {B⊩,⊩C´[w]} cierra con peso <i para alguna variable «nueva» w (cfr. página 44) y X ∪ {⊩B,⊩C'[w]} cierra con peso j. Como X ∪ {B⊩,⊩C´[w]} y X ∪ {⊩B,⊩C'[w]} cierran con peso combinado <i+j, y como c(B)=n, B es eliminable y X ∪ {⊩C'[w]} cierra. Pero si es así, también lo hace X ∪ {⊩(∀v)C'}=X.

b] X ∪ {B⊩} cierra via B⊩ con peso i y X ∪ {⊩B} cierra via ⊩B con peso j. Seleccionando como casos representativos los mismos que en a, se tiene que o bien B⊩=C'&C"⊩ y ⊩B=⊩C'&C" o bien B⊩=(∀v)C'⊩ y ⊩B=⊩(∀v)C'.

[b.1] Empleando el mismo razonamiento que en a.1 se concluye que X ∪ {C'&C"⊩,C'⊩} o X ∪ {C'&C"⊩,C"⊩} cierra con peso m<i. Supongamos por comodidad que X ∪ {C'&C"⊩,C'⊩} cierra conm peso <i. Si X ∪ {⊩C'&C"} cierra con peso j, lo mismo sucede con su superconjunto X ∪ {⊩C'&C",C'⊩}. Como m+j<i+j y c(C'&C")=n, X ∪ {C´⊩} cierra. Razonando ahora como en a.2 se concluye que X ∪ {⊩C'&C",⊩C'} cierra con peso k<j y X ∪ {C'&C"⊩,⊩C'} con peso j. p+j<i+j y así X ∪ {⊩C'} cierra. Finalmente, c(C´)<n, de manera que por la primera condición del lema C´ es eliminable, de donde se desprende que X cierra.

[b.2] Aplicando el razonamiento de a.3 se llega a X ∪ {(∀v)C'⊩,C'[t]⊩} cierra con peso <i para algún término t, y como por lo demás X ∪ {⊩(∀v)C',C'[t]⊩} cierra con peso j, X ∪ {C'[t]⊩} cierra. Una argumentación análoga a la de a.4 permite inferir que X ∪ {⊩C'[w]} también cierra. Manipulando las aplicaciones de ⊩∀ y ∀⊩ en las tablas correspondientes según las convenciones

expuestas en el epígrafe *Convenciones sobre el uso de las variables*… del capítulo3, se consigue «igualar» w y t. Como c(C´[w])<n, X cierra por la primera condición del lema.

⊣

TEOREMA 28 (DE ELIMINACIÓN PARA TC). Toda fórmula de $\wp$ es eliminable en TC.
DEMOSTRACIÓN. Si hubiera fórmulas ineliminables, habría un n para el que se cumpliría que existe una fórmula A, c(A)=n, ineliminable y, al mismo tiempo, que para todo m<n, si c(B)=m entonces B es eliminable. Decir que una fórmula es eliminable es decir que lo es para todo entero k. Por tanto, si A fuera ineliminable habría un entero k tal que A no sería k-eliminable aunque sí lo sería para todo j<k. En suma, (1) toda fórmula B de complejidad <n sería eliminable y (2) toda fórmula B de complejidad n sería j-eliminable para cualquier j<k. Del lema 16 se desprende entonces que A sería k-eliminable, contra la hipótesis inicial.

⊣

EJERCICIOS.

(1) Demostrar, usando el lema de König (L19), que toda tabla analítica cerrada es finita.
(2) Demostrar directamente (es decir, sin pasar por SS y empleando el teorema 28) que para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula A de $\wp$, si $X \vdash_{HC} A$ entonces $X \vdash_{TC} A$.
(3) Demostrar los análogos del lema 20 y el teorema 28 para TI.
(4) Demostrar que para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula A de $\wp$ se cumple que si $X \vdash_{TC} A$ entonces $X \vdash_{HC} A$.
Pista.- Sea ' la función de fórmulas signadas en fórmulas de $\wp$ definida por las estipulaciones $(A\Vdash)'=A$ y $(\Vdash A)'=\neg A$. Demuéstrese a continuación que si hay una tabla analítica cerrada para X entonces $X' \vdash_{HC} B$ para cualquier fórmula B (X' está formado por las imágenes de las fórmulas de X bajo la función '). El siguiente paso es establecer el lema: si $X,\neg A \vdash_{HC} \neg B$ y $X \vdash_{HC} B$ entonces $X \vdash_{HC} A$. Finalmente, mostrar que si hay una tabla analítica cerrada para $X \cup \{\Vdash A\}$ -donde todas las fórmulas de X son signadas y de la forma $B\Vdash$- entonces $X \vdash_{HC} A$.

CAPÍTULO 7. SISTEMAS DE DEDUCCIÓN NATURAL

> Si en lugar de *teoría de las catástrofes* se hubiera llamado *teoría de singularidades*, seguramente su éxito popular hubiera sido menor.
>
> Ll.Santaló, *La matemática: una filosofía y una ciencia*.

SISTEMAS DE DEDUCCIÓN NATURAL CON OPERADOR DE ABSURDO.

En este capítulo se describen y estudian algunas propiedades de sistemas de deducción natural para las lógicas mínima, intuicionista y clásica. El nombre «deducción natural» responde a la intención de Gentzen de capturar la lógica practicada por los matemáticos, en oposición a la lógica axiomática de la matemática. Por consiguiente, la naturalidad de la deducción natural ha de entenderse, en este primer sentido, en contraste con el modo de proceder de los sistemas hilbertianos. Prawitz, sin embargo, considera que la naturalidad de los sistemas de deducción natural consiste en algo más, en que «el contenido lógico esencial de los operadores lógicos intuitivos que pueden formalizarse en los lenguajes considerados, puede ser entendido como un contenido compuesto por las inferencias atómicas (es decir, 'deducciones básicas') aisladas por Gentzen.»[1971, pág.245].[25]

Para cada una de las lógicas consideradas se describen dos sistemas deductivos de este tipo, que se diferencian, en primer lugar, por su prolenguaje. El prolenguaje $\mathcal{P}^{\perp}$, descrito en el capítulo 7 (Los cálculos de secuentes SI$^{\perp}$ y SC$^{\perp}$) difiere de $\mathcal{P}$ porque incorpora el operador sentencial ceroario '$\perp$' pero no el operador sentencial unario '$\neg$'.[26] Trabajar con $\perp$ facilita la comparación de los sistemas de deducción natural con los sistemas deductivos ya descritos y que cuentan entre sus operadores con el negador. $\mathcal{P}^{\perp}$, por otra parte, permite una aproximación más satisfactoria al teorema de normalización. Por consiguiente, una vez demostrada la equivalencia de ambos sistemas de deducción natural, elegiremos en cada caso el que resulte más ventajoso. Describamos en primer lugar los sistemas de deducción natural mínimo, intuicionista y clásico para el prolenguaje $\mathcal{P}^{\perp}$.

Lógica mínima (DNM)

$$\mathrm{E\&}\ \frac{A\&B}{A} \qquad \frac{A\&B}{B} \qquad \mathrm{I\&}\ \frac{A \quad B}{A\&B}$$

$$\mathrm{I\vee}\ \frac{A}{A\vee B} \qquad \frac{B}{A\vee B} \qquad \mathrm{E\vee}\ \frac{\begin{matrix}[A\\C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B\\C\end{matrix} \quad A\vee B}{C}$$

$$\mathrm{I\to}\ \frac{\begin{matrix}[A\\B\end{matrix}}{A\to B} \qquad \mathrm{E\to}\ \frac{A \quad A\to B}{B}$$

[25] Sobre la pretendida naturalidad del método de deducción natural puede consultarse L. Vega,*El análisis lógico: nociones y problemas, II*, Madrid, UNED, 1987, pp.46-49 y 57-59.

[26] Del operador $\perp$ se trata también en el capítulo 6, epígrafe **Teorema de interpolación**.

$$\text{I}\exists\ \frac{A[t]}{(\exists v)A(v)} \qquad \text{E}\exists^{*}\ \frac{(\exists v)A \quad \begin{matrix}\ulcorner A[v] \\ \llcorner B\end{matrix}}{B}$$

$$\text{E}\forall\ \frac{(\forall v)A[v]}{A[t]} \qquad \text{I}\forall^{**}\ \frac{A}{(\forall v)A}$$

* Restricción: 'v' no está libre en las premisas ni en B ni en supuestos previos no cancelados.
** Restricción: 'v' no está libre en las premisas ni en supuestos previos no cancelados

Lógica intuicionista (DNI).

DNM +

$$\text{E}\bot\ \frac{\bot}{A}$$

Lógica clásica (DNC).

DNI +

$$\text{TE}\quad A \vee (A\rightarrow\bot)$$

o también,

DNI +

$$\text{DN}\ \frac{((A\rightarrow\bot)\rightarrow\bot)}{A}$$

OBSERVACIONES.-
[1] Un sistema de deducción natural DNS da una definición recursiva de una relación de derivabilidad, o si se prefiere de «derivación en DNS».
[2] De acuerdo con la presentación elegida, una derivación en DNS (=DNM,DNI,DNC) es un árbol (invertido) finito de fórmulas, en el que cada fórmula es o un supuesto (una premisa o un supuesto provisional)o resulta de la aplicación a las fórmulas que le preceden de una de las reglas enunciadas.
[3] No obstante, por razones de economía, en ocasiones adoptaremos una presentación secuencial de las derivaciones. Para ello basta con reescribir las reglas con más de una premisa como se indica acto seguido:

$$\text{I}\&\ \frac{A \quad B}{A\&B} \qquad \frac{B \quad A}{A\&B} \qquad \text{E}\rightarrow\ \frac{A \quad A\rightarrow B}{B} \qquad \frac{A\rightarrow B \quad A}{B}$$

$$\text{E}\exists\ \frac{(\exists v)A \quad \begin{matrix}\ulcorner A[v] \\ \llcorner C\end{matrix}}{C} \qquad \text{Ev}\ \frac{A\vee B \quad \begin{matrix}\ulcorner A \\ \llcorner C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\ulcorner B \\ \llcorner C\end{matrix}}{C}$$

Restricción: 'v' no está libre en las premisas ni en B ni en supuestos previos no cancelados.

Una derivación es entonces una secuencia de fórmulas en la que cada fórmula es o un supuesto o la conclusión de la aplicación de una regla a fórmulas que le preceden en la secuencia.

[4] La definición de derivabilidad en DNS es entonces: $X \vdash_{DNS} A$ (A se sigue de X en DNS) syss hay una derivación de A a partir de X.
[5] Las derivaciones más simples constan de una única fórmula A, y expresan que A es derivable de un conjunto de fórmulas X si $A \in X$.
[6] Las derivaciones de la forma A mencionadas en el punto anterior, en las que la fórmula A aparece a la vez como premisa y como conclusión, no han de confundirse con las demostraciones de A. Una demostración de A en DNS es una derivación de A a partir del conjunto de fórmulas ∅. Dicho de otro modo, en una demostración de A, ésta aparece únicamente como conclusión.
[7] Una regla como I& se interpreta así: si π es una derivación de A a partir de X y μ es una derivación de B a partir de Y, entonces

$$\begin{array}{lcc} & \pi & \mu \\ \{ & . & . \\ \lambda & . & . \\ & . & . \\ & A & B \\ \hline I\& & A\&B & \end{array}$$

es una derivación de A&B a partir de $X \cup Y$.
[8] Las fórmulas marcadas con '┌' en los enunciados de las reglas son *supuestos provisionales*. Su función se entiende fácilmente cuando se tiene en cuenta que una regla con supuestos provisionales, como [Ev], ha de interpretarse como sigue: si hay una derivación π de AvB, una derivación λ de C a partir de $X \cup \{A\}$ y una derivación μ de C a partir de $X \cup \{B\}$ entonces hay una derivación de C a partir de X -a saber, la esquematizada en el enunciado de la regla. '└' sirve entonces para indicar donde termina la derivación de C a partir de $X \cup \{A\}$, en un caso, y de $X \cup \{B\}$, en el otro. Dicho de otro modo, '└' indica cuándo y dónde se cancela el supuesto correspondiente, A o B, respectivamente. En suma, la regla [Ev] podría transcribirse también así:

$$\frac{X \vdash_{DNS} AvB \qquad X \cup \{A\} \vdash_{DNS} C \qquad X \cup \{B\} \vdash_{DNS} C}{X \vdash_{DNS} C}$$

[9] La dualidad introducción-eliminación, característica de los sistemas de deducción natural, encuentra su excepción en el operador de absurdo '⊥'. La ausencia de reglas para '⊥' en DNM obedece a la debilidad de la negación mínima (¬A es definible, recuérdese, como $A \rightarrow \bot$). En DNI hay regla de eliminación de '⊥', pero no regla de introducción. Finalmente, el principio [TE] (*tercio excluso*) de DNC tiene el *status* de axioma, o más exactamente de esquema axiomático. Puede verse como una regla sin premisas, es decir, de la forma:

$$\frac{}{A \vee (A \rightarrow \bot)}$$

en cuyo caso aparece como una regla de introducción del operador de absurdo (poco satisfactoria, eso sí, en la medida en que en su enunciado aparecen otros operadores).
[10] Con las salvedades indicadas en el punto anterior, el uso derivacional de cada operador está regido por una regla de introducción y una regla de eliminación, que son inversas entre sí. Precisamente el modo en que se relacionan introducción y eliminación es lo que da pie al teorema de forma normal enunciado más adelante.
[11] Gentzen reconocía cierta prioridad a las reglas de introducción, al considerar que determinan el «significado» lógico del operador correspondiente y que las reglas de eliminación han de justificarse en términos de las reglas de introducción (en virtud, justamente, de la simetría antes mencionada).

DERIVACIONES EN DN. EJEMPLOS.

1. $\vdash_{DNM} (A \rightarrow B) \& (A \rightarrow (B \rightarrow \bot)) \rightarrow (A \rightarrow \bot)$
┌ 1.$(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow (B \rightarrow \bot))$
│ 2.$A \rightarrow B$ E&1
│ ┌3.A
│ │4.B E→2,3
│ │5.$A \rightarrow (B \rightarrow \bot)$ E&1

| | 6.B→⊥ E→3,5
| └7.⊥ E→4,6
└ 8.A→⊥ I→,3-7
9.(A→B)&(A→(B→⊥))→(A→⊥) I→,1-8

2. (∃x)((∀y)(Px & Qy → Rxy) & (∀z)(Rzx)) ⊢$_{DNM}$ (∃x)(∀y)(Px ∧ Qy ⊃ Rxy ∧ Ryx)

1. (∃x)((∀y)(Px & Qy → Rxy) & (∀z)(Rzx))
┌ 2. (∀y)(Px & Qy → Rxy) & (∀z)(Rzx)
| 3. (∀y)(Px & Qy → Rxy) E&,2
| 4. Px & Qa → Rxa E∀,3
| ┌ 5. Px & Qa
| | 6. Rxa E→,4,5
| | 7. (∀z)(Rzx) E&,2
| | 8. Rax E∀,7
| └ 9. Rxa & Rax I&,6,8
| 10. Px & Qa → Rxa & Rax I→,5-10
| 11. (∀y)(Px ∧ Qy ⊃ Rxy ∧ Ryx) I∀,10
└ 12. (∃x)(∀y)(Px ∧ Qy ⊃ Rxy ∧ Ryx) I∃,11
13. (∃x)(∀y)(Px ∧ Qy ⊃ Rxy ∧ Ryx) E∃,1,2-12

3. ⊢$_{DNM}$A&(A→⊥)→(B→⊥)

┌ 1.A&(A→⊥)
| 2.A E&,1
| 3.A→⊥ E&,1
| ┌ 4 B
| └ 5 ⊥ E→,2,3
└ 6 B→⊥ I→,4-5
7 A&(A→⊥)→(B→⊥) I→,1-6

4. ⊢$_{DNI}$(A→(A→⊥))→(A→B)

┌ 1. A→(A→⊥)
| ┌ 2. A
| | 3. A→⊥ E→,1,2
| | 4. ⊥ E→2,3
| └ 5. B E⊥,4
└ 6. A→B I→2-5
7. (A→(A→⊥))→(A→B) I→1-6

5. ⊢$_{DNC}$(A→B)v(B→A)

1. (A→B)v((A→B)→⊥) TE
┌── 2. A→B
└── 3. (A→B)v(B→A) Iv,2
┌── 4. (A→B)→⊥
| ┌ 5. B
| | ┌ 6. A

┃ ┃ ┃	┌7. B→⊥		
┃ ┃ ┃	└8. ⊥	E→,5,7	
┃ ┃ ┃	9. (B→⊥)→⊥	I→7-8	
┃ ┃ ┃	10. B v (B→⊥)	TE	
┃ ┃ ┃	┌11. B		
┃ ┃ ┃	└		
┃ ┃ ┃	┌12. B→⊥		
┃ ┃ ┃	┃13. ⊥	E→5,12	
┃ ┃ ┃	└14. B	E⊥,13	
┃ ┃ └	15. B	Ev,10,11,12-13	
┃ ┃	16. A→B	I→,6-15	
┃ ┃	17. ⊥	E→,4,16	
┃ └	18. A	E⊥	
┃	19. B→A	I→,5-18	
└	20. (A→B)v(B→A)	Iv,19	
	21. (A→B)v(B→A)	Ev,1,2-3,4-20	

SISTEMAS DE DEDUCCIÓN NATURAL CON NEGADOR.

Los sistemas de deducción natural mínimo, intuicionista y clásico para el prolenguaje $\mathcal{P}$ resultan de añadir a las reglas de introducción y eliminación de '&', 'v', '→', '∃' y '∀' antes enunciadas las reglas para el negador que se enuncian a continuación.

Lógica mínima (DNM¬).

$$[I\neg]\quad \begin{array}{l}\ulcorner A\\ \vdots\\ \llcorner B\&\neg B\end{array}\ \Big/\ \neg A$$

Lógica intuicionista (DNI¬).

$$\mathbf{DNM}^{\neg} + E^{i}\neg\quad \frac{B\&\neg B}{A}$$

Lógica clásica (DNC¬).

$$\mathbf{DNM}^{\neg} + E^{c}\neg\quad \frac{\neg\neg A}{A}$$

DERIVACIONES EN DN¬. EJEMPLOS.

1. $\vdash_{DNM}\neg(A\rightarrow B)\&(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A$

┌	1.(A→B)&(A→¬B)	
┃	2.A→B	E&1
┃	┌3.A	
┃	┃4.B	E→2,3
┃	┃5.A→¬B	E&1
┃	┃6.¬B	E→3,5
┃	└7.B&¬B	I&4,6
└	8.¬A	I¬,3-7

9.(A→B)&(A→¬B)→¬A I→,1-8

2. ├$_{DNM}$¬A→¬¬A
┌─ 1. A
│ ┌ 2. ¬A
│ └ 3. A&¬A (I&,1,2)
└ 4.¬¬A I¬2-3
5. A→¬¬A I→,4

3. ├$_{DNI}$¬¬(Av¬A)→(A→B)
┌─ 1. ¬(Av¬A)
│ ┌ 2. A
│ │ 3. Av¬A Iv,2
│ │ 4. (Av¬A)&¬(Av¬A) I&,1,3
│ └ 5. B E^{i}¬,4
└─ 6. A→B I→,2-5
7. ¬(Av¬A)→(A→B) I→,1-6

4. ├$_{DNC}$Av¬A
┌─ 1. ¬(Av¬A)
│ ┌ 2. A
│ │ 3. Av¬A Iv,2
│ └ 4. (Av¬A)&¬(Av¬A) I&,1,3
│ 5. ¬A I¬,2-4
│ 6. Av¬A Iv,5
└─ 7. (Av¬A)&¬(Av¬A) I&,1,6
8. ¬¬(Av¬A) I¬,1-7
9. Av¬A E^{c}¬

Una ocurrencia de una fórmula A en una derivación π es *máxima* si aparece en π como resultado de la aplicación de la regla de introducción de su símbolo lógico principal y sirve como premisa (mayor) en la aplicación de la regla de eliminación de su símbolo lógico principal. Una derivación es *normal* si no contiene ocurrencias máximas de fórmulas. Adviértase que en la demostración 4 inmediatamente anterior, hay una ocurrencia máxima de la fórmula ¬¬(Av¬A) y que entonces no es una derivación normal. ¿Puede encontrarse una derivación normal de Av¬¬A en DNC¬? Nótese asímismo que la derivación correspondiente en DNC consta de una única fórmula, Av(A→¬A), justificada por TE

INTERDEFINICIÓN DEL OPERADOR DE ABSURDO Y EL NEGADOR.

En cualquier caso, los DNS y los DNS¬ son deductivamente equivalententes en el sentido que se precisa a continuación. Sea B una fórmula de $\mathcal{P}$ y t_B:F'→F, donde F' es el conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}^{\perp}$ y F es el conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$, tal que

(1) $t_B(p)=p$,
(2) $t_B(\perp)=B\&\neg B$,
(3) $t_B(A\&C)=t_B(A)\&t_B(C)$,
(4) $t_B(AvC)=t_B(A)vt_B(C)$,
(5) $t_B(A\rightarrow C)=t_B(A)\rightarrow t_B(C)$,
(6) $t_B((\exists v)A)=(\exists v)t_B(A)$, y
(7) $t_B((\forall v)A)=(\forall v)t_B(A)$.

LEMA 21. Para cualesquiera B∈F', X ∪ {A} ⊆ F, si A es derivable en DNS a partir de X entonces $t_B(A)$ es derivable a partir de $t_B(X)$ en DNS¬.

DEMOSTRACIÓN. Basta con mostrar que si R es una regla de DNS con A como conclusión, $t_B(A)$ es derivable en DNS¬ de las imágenes bajo t_B de las premisas de R, algo que no presenta, en general, dificultades a la vista de la definición de t_B. Los únicos casos no completamente triviales son los de [E⊥] y [TE]. Con respecto a [E⊥], la traducción da como resultado:

$$\frac{B\&\neg B}{A}$$

es decir, la regla [$E^i\neg$]. En cuanto al axioma de *tercio excluso*, la traducción es $t_B(A)$ ∨ ($t_B(A)\rightarrow B\&\neg B$). Adaptando la definición precedente de Av¬A, se llega a

.
.
.
$t_B(A)$ v ¬$t_B(A)$
┌── $t_B(A)$
└── $t_B(A)$ v Iv
$t_B(A)\rightarrow B\&\neg B)$
┌── ¬$t_B(A)$
│ ┌ $t_B(A)$
│ │ ┌ ¬(B&¬B)
│ │ └ $t_B(A)\&\neg t_B(A)$ I&
│ │ ¬¬(B&¬B) I¬
│ └ B&¬B $E^c\neg$
│ $t_B(A)\rightarrow B\&\neg B$ I→
└── $t_B(A)$ v Iv
($t_B(A)\rightarrow B\&\neg B$)
$t_B(A)$ v ($t_B(A)\rightarrow B\&\neg B$) Ev

Para recorrer el camino inverso, de DNS a DNS¬ sea t:F→F' tal que

(1) t(p)=p,
(2) t(¬A)=t(A)→⊥,
(3) t(A&B)=t(A)&t(B),
(4) t(AvB)=t(A)vt(B),
(5) t(A→B)=t(A)→t(B),
(6) t((∃v)A)=(∃v)t(A), y
(7) t((∀v)A)=(∀v)t(A).

┤

LEMA 22. Para cualquier X ∪ {A} ⊆ F, si A es derivable en DNS¬ a partir de X entonces t(A) es derivable a partir de t(X) en DNS.

DEMOSTRACIÓN. Consiste, básicamente, en repetir el proceso de la demostración del lema 18, invirtiendo la dirección. Considérese la regla [I¬]; hay que demostrar que si t(B&¬B)=t(B)&(t(B)→⊥) es derivable de t(A) entonces T(A)→⊥ es derivable.

┌ tA
│ . }
│ .
│ . hipótesis
│ tB&(tB→⊥)
│ tB E&
│ tB→⊥ E&
└ ⊥ E→
tA→⊥ I→

Para la regla intuicionista de eliminación del negador, se tiene:

tB & (tB→⊥)

tB	E&
tB→⊥	E&
⊥	E→
tA	E⊥

Para la regla clásica de eliminación del negador, a su vez,: se tiene:

(tA→⊥)→⊥	
tA v (tA→⊥)	TE
┌ tA	
└───	
┌ tA→⊥	
│ ⊥	E→
└ tA	E⊥
tA	Ev

┤

Por otra parte, para cualquiera de los sistemas considerados (mínimo, intuicionista, clásico) ¬A y A→¬B&¬¬B son deductivamente equivalentes, para cualquier fórmula B.

1.A→¬B&¬¬B	
┌2.A	
└3.¬B&¬¬B	E→1,2
4.¬A	I¬,2-3

DEDUCCIÓN NATURAL vs. CÁLCULO DE SECUENTES.

El principio general que determina la correspondencia entre las reglas de los cálculos secuenciales y las de los sistemas de deducción natural puede formularse como sigue:

- a una demostración π de un secuente X⊩A en SS le corresponde una derivación λ de A a partir de X en DNS;
- a una demostración π de un secuente X⊩ en SS le corresponde una derivación λ de ¬A&¬¬A a partir de X en DNS;
- a una demostración π de un secuente X⊩$A_1,...,A_n$, n>1, en SC le corresponde una derivación λ de A_1v...vA_n a partir de X en DNC.

Desde esta perspectiva, la deducción natural difiere del cálculo de secuentes porque la simetría antecedente-consecuente de éste (en ambos casos se trata de conjuntos de fórmulas) es reemplazada por la asimetría premisas-conclusión de aquél (conjunto de premisas-fórmula conclusión). Esto tiene algunas consecuencias dignas de mención. Entre otras:

[1] En una derivación en DN siempre puede determinarse cuál fué la última regla aplicada, algo que no sucede cuando se admiten múltiples conclusiones.

[2] La unicidad de las conclusiones en DN es la responsable del feo aspecto de las reglas [Ev] y [E∃]. Su fealdad proviene de la presencia de una fórmula C sin vínculos estructurales con la fórmula eliminada. En realidad lo natural sería disponer de una regla de eliminación de la disyunción como

$$\frac{A \text{ v } B}{A \qquad B}$$

con dos conclusiones.

La correspondencia entre secuentes demostrables y derivaciones en deducción natural permite establecer una correspondencia más detallada entre reglas de uno y otro sistema deductivo.

1.REGLAS OPERACIONALES.

1.1 Las reglas de introducción en el consecuente se corresponden de manera casi inmediata con las reglas de introducción de los DNS.

En el caso de ⟦⊢& hay que mostrar que si $X \vdash_{DNS} A$ y $X \vdash_{DNS} B$ entonces $X \vdash_{DNS} A\&B$. La derivación correspondiente puede visualizarse entonces así:

X
.
.
.
A
.
.
.
B
A&B I&

En el caso de [⟦⊢¬] hay que mostrar, en el caso más simple, que si $X,A \vdash_{DNS} \neg B\&\neg\neg B$ entonces $X \vdash_{DNS} \neg A$. La derivación correspondiente es:

X
┌ A
│ .
│ .
│ .
└ ¬B&¬¬B
¬A I¬

Y así sucesivamente.

1.2 Las reglas de introducción en el antecedente se corresponden, de manera menos directa que en el caso precedente, con las reglas de eliminación. Consideremos un par de ejemplos. La regla [∃⟦⊢] requiere mostrar que si $X,A \Vdash_{DNS} B$ y v no está libre ni en B ni en las fórmulas de X entonces $X,(\exists v)A$. La solución es:

X
(∃v)A
┌ A
│ .
│ .
│ .
└ B
B E∃

En el caso de [→⟦⊢], hay que establecer que si $X \vdash_{DNS} A$ y $Y,B \vdash_{DNS} C$ entonces $X,Y,A\rightarrow B \vdash_{DNS} C$. La derivación pertinente es, esquemáticamente, como sigue:

X
.
.
.
A
A→B premisa
B E→
Y premisas
.
.
.

C

2. REGLAS ESTRUCTURALES.

2.1 Las reglas de datos no se corresponden, obviamente, con ninguna regla de deducción natural. Sucede más bien que su contenido está diluido en el conjunto de las reglas de eliminación/introducción. Una regla como [P⊩] encuentra su homólogo en la duplicidad de formas de las reglas de deducción natural con dos premisas: en ambos casos se expresa que el orden de las premisas es irrelevante.

2.2 El caso de la regla de Corte ofrece mayor interés y se trata con algún detalle en el epígrafe siguiente. Esta regla, traducida a deducción natural, dice que si hay una derivación de A a partir de X y una derivación de B a partir de Y ∪ {A}, entonces hay una derivación de B a partir de X∪Y. Esta derivación en DNS resulta de combinar las dos anteriores:

X premisas
. }hipótesis 1ª
.
.
A
Y premisas
. }hipótesis 2ª
.
.
B

Esto, desde luego, no es particularmente excitante. Adviértase, sin embargo, que A aparece, en primer lugar, como una conclusión extraída de X y por consiguiente como el resultado de aplicar la regla de introducción de su símbolo lógico principal. A continuación, junto con fórmulas de Y, sirve como premisa en la ulterior derivación de B, y por tanto como premisa en la eliminación de su símbolo lógico principal. La fórmula A se comporta entonces como una fórmula máxima en la derivación que se acaba de esquematizar. De esta manera, el teorema de eliminación de Corte de los sistemas de cálculo de secuentes se transmuta al pasar a los sistemas de deducción natural en un teorema de eliminación de (ocurrencias de) fórmulas máximas, o, si se prefiere, en un teorema de normalización.

Antes de ocuparnos del teorema de normalización, vamos a establecer la equivalencia de los DNS y los SS.

TEOREMA 29. Si X⊩Y es demostrable en SS^- (=SM^-, SI^-, SC^-) entonces $X \vdash_{DNS^\neg} \vee Y$ ($DNS^\neg$=$DNM^\neg$, $DNI^\neg$, $DNC^\neg$, respectivamente) donde ∨Y es la disyunción de las fórmulas de Y si Y≠∅, y ¬B&¬¬B, para cualquier fórmula B, si Y=∅.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre la longitud de la demostración π de X⊩Y en SS. Si π es A⊩A, la derivación correspondiente en $DNS^\neg$ es A. Los casos de las reglas estructurales son inmediatos, excepto ⊩D. En su versión intuicionista,

$$\frac{X\Vdash}{X\Vdash A,}$$

la hipótesis de inducción proporciona una derivación λ de ¬B&¬¬B a partir de X en $DNI^\neg$; aplicando $E^i\neg$ a ¬B&¬¬B para obtener A se obtiene la derivación apetecida. Para su versión clásica,

$$\frac{X\Vdash Y}{\begin{array}{l}X\Vdash A,\\ Y\end{array}}$$

la hipótesis de inducción proporciona una derivación λ de ∨Y a partir de X en $DNC^\neg$; Iv permite obtener entonces Av(∨Y).

Vayamos con las reglas operacionales. Ya se ha señalado que las reglas secuenciales de introducción por la derecha se corresponden directamente con las reglas de introducción de

deducción natural. Cuando, en el caso de la lógica clásica, no se supone que los consecuentes de los secuentes involucrados consten de una única fórmula, la cuestión se ve complicada por la necesidad de apelar a las reglas del disyuntor (para pasar de una relación en $Sb(F)_2$ a una relación en $Sb(F)xF$). En concreto, en el caso de [⊩&], conviendo en representar con ∨Y la disyunción delas fórmulas de Y, se tiene:

	X
Hipót.inducción	.
	.
	.
	Av∨Y
hipót..inducción	.
	.
	.
	Bv∨Y
	┌ A
	│ ┌ B
I&	│ │ A&B
I∨	│ └ (A&B)∨∨Y
	│ ┌ ∨Y
I∨	│ └ (A&B)v∨Y
E∨	└ (A&B)v∨Y
	┌ ∨Y
I∨	└ (A&B)v∨Y
E∨	(A&B)v∨Y

Las reglas de introducción por la izquierda se corresponden con las reglas de eliminación. Para [&⊩], por ejemplo, el razonamiento es el siguiente:

X A&B	Premisas
A	E&
. . .	Hipót..inducción
∨Y	

⊣

Este teorema, junto con la definición de derivabilidad del cálculo secuencial, da como resultado:

COROLARIO 14. Si $X \vdash_{SS^-} A$ entonces $X \vdash_{DNS\neg} A$.

TEOREMA 30. Si $X \vdash_{DNS\neg} A$ entonces X⊩A es demostrable en SS^-.

DEMOSTRACIÓN. La clave, de nuevo, es la correspondencia reglas de introducción/reglas de introducción en el consecuente y reglas de eliminación/reglas de introducción en el antecedente. En el primer caso la correspondencia es inmediata. Veamos un par de ejemplos.

$$\text{I\&}\quad \frac{X \Vdash A \qquad X \Vdash B}{X \Vdash A\&B}\ \begin{matrix}\text{hipótesis}\\ \Vdash\&\end{matrix}$$

$$\text{I}\rightarrow\quad \frac{X, A \Vdash B}{X \Vdash A \rightarrow B}\ \begin{matrix}\text{hipótesis}\\ [\Vdash\rightarrow]\end{matrix}$$

$$\text{I}\forall\quad \frac{X \Vdash A}{X \Vdash (\forall v)A}\ \begin{matrix}\text{hipótesis}\\ [\Vdash\forall]\end{matrix}$$

(donde v no está libre en X).

La correspondencia reglas de eliminación/reglas de introducción en el antecedente es, como ya se ha señalado, menos directa. Para E&, por ejemplo, la hipótesis de inducción garantiza la demostrabilidad en SS de X⊩A&B. La demostrabilidad de X⊩A puede establecerse usando, además de [&⊩], la regla de Corte, apelando después a la eliminabilidad de la regla de Corte (Corolario 5) para establecer la existencia de una demostración en SS$^-$ (por tanto de una demostración sin Corte). En concreto,

$$\dfrac{\text{hipótesis}\quad X\Vdash A\&B \qquad \dfrac{\dfrac{A\Vdash A}{X,A\Vdash A}\ D\Vdash}{X,A\&B\Vdash A}\ \&\Vdash}{X\Vdash A}\ \text{Corte}$$

Otro caso semejante es el de la regla de eliminación del condicional. Por hipótesis de inducción X⊩A→B y X⊩A son demostrables en SS$^-$, y entonces por el lema 3 lo es X,A⊩B. Una aplicación de Corte permite obtener una primera demostración de X⊩B; por el corolario 5 hay una demostración de X⊩B en SS.

⊣

TEOREMA DE FORMA NORMAL.

Hablando con propiedad lo que se demuestra en esta sección no es un teorema de normalización para DNS sino un teorema de forma normal. Una derivación en DNS es normal si no contiene ocurrencias máximas de fórmulas. Recuérdese que una ocurrencia de una fórmula A en una derivación π es *máxima* si aparece en π como resultado de la aplicación de la regla de introducción de su símbolo lógico principal y sirve como premisa (mayor) en la aplicación de la regla de eliminación de su símbolo lógico principal. La distinción teoremas de forma normal vs. teoremas de normalización se debe a Kreisel. Un *teorema de forma normal* para DNS es un teorema que enuncia que si hay una derivación en DNS de A a partir de X entonces hay una derivación normal de A a partir de X. Un *teorema de normalización*, por su parte, afirma la existencia de un método efectivo para transformar cualquier derivación de A a partir de X en DNS en una derivación normal. Por consiguiente, un teorema de nomalización -a diferencia de un teorema de forma normal- relaciona cada derivación en DNS con la forma normal correspondiente.

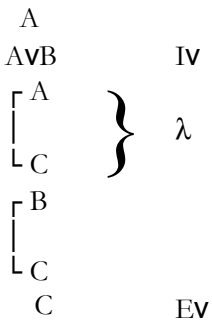
A su vez, pueden distinguirse dos variantes de la normalización: *débil*, dada una derivación π en DNS, hay una secuencia de reducción (especificada por un procedimiento efectivo) $\pi \Rightarrow \pi_1 \Rightarrow ... \Rightarrow \pi_n$ tal que π_n es normal, y *fuerte*, toda secuencia de reducción que comience por π es finita.

El teorema de forma normal que se quiere demostrar es un teorema de eliminación de ocurrencias máximas de fórmulas, como ya se ha dicho. Un *corte* en una derivación en DNS consiste en la aplicación consecutiva de una regla de introducción y de una regla de eliminación de un mismo símbolo lógico, de manera que la conclusión de la primera sirve como premisa mayor para la aplicación de la segunda. La fórmula en cuestión es por tanto una fórmula máxima. Por ejemplo, las líneas 8 y 9 de la derivación siguiente en DNC¬ constituyen un corte:

┌──	1. ¬(Av¬A)	
│ ┌	2. A	
│ │	3. Av¬A	Iv,2
│ └	4. (Av¬A)&¬(Av¬A)	I&,1,3
│	5. ¬A	I¬,2-4
│	6. Av¬A	Iv,5
└──	7. (Av¬A)&¬(Av¬A)	I&,1,6
	8. ¬¬(Av¬A)	I¬,1-7
	9. Av¬A	EC¬,8

La experiencia del teorema de eliminación de Corte sugiere una demostración del teorema de forma normal por inducción sobre el grado de la derivación. Para ello se identificaría el grado de un corte

con la complejidad + 1 de su fórmula máxima y el grado de la derivación con el mayor de los grados de sus cortes. Sin embargo, este intento tropieza con las deficiencias ya apuntadas de las reglas Ev y E∃. Sea π una derivación en DNS con un corte de la forma



Este corte puede eliminarse, reemplazando el fragmento de π descrito por la subderivación λ, pero entra dentro de lo posible que al eliminar la fórmula máxima AvB del modo indicado C se convierte en una ocurrencia máxima. La dificultad estriba en que la complejidad de C no guarda relación con la complejidad de AvB, de manera que puede suceder que c(C)>c(AvB).

Un ejemplo ayudará a entenderlo mejor. Considérese la siguiente derivación de t a partir de {p,p→q,r→¬s,q→t,¬s→t}, evidentemente no normal (el asterisco indica las ocurrencias máximas de fórmulas):

1. p	Premisa
2. pvr	Iv,1
┌ 3. p	
│ 4. p→q	Premisa
│ 5. q	E→3,4
└ 6. qv¬s	Iv,5
┌ 7. r	
│ 8. r→¬s	Premisa
│ 9. ¬s	E→7,8
└10. qv¬s	Iv,9
11. qv¬s	Ev2,3-6,7-10
┌ 12. q	
│13. q→t	Premisa
└ 14. t	E→12,13
┌ 15. ¬s	
│16. ¬s→t	Premisa
└ 17. t	E→15,16
18. t	Ev11,12-14,15-17

Si se intenta eliminar la fórmula máxima 'pvr' procediendo como se ha indicado en el párrafo anterior, se obtiene la derivación:

1. p	Premisa
2. p→q	Premisa
3. q	E→3,4
4. qv¬s	Iv,5
┌ 5. q	
│ 6. q→t	Premisa
└ 7. t	E→12,13
┌ 8. ¬s	
│ 9. ¬s→t	Premisa
└ 10. t	E→15,16

11. t Ev4,5-7,8-10

Esta segunda derivación tampoco es normal y además sucede que c(pvq)<c(qv¬s) -i.e., el grado lógico de la fórmula máxima de la primera derivación es menor que el grado de la fórmula máxima de la segunda.

Una primera y drástica solución es limitarse al fragmento {⊥,&,→,∀} de $\mathcal{P}^{\perp}$, evitando así las reglas de eliminación del disyuntor y del cuantificador existencial. Si DNS* es la restricción de DNS a ese fragmento, entonces:

LEMA 23. Si π es una derivación en DNS* de A a partir de X que termina con un corte de grado n y el resto de los cortes de π son de grado <n entonces existe una derivación en DNS* de A a partir de X con grado <n.

DEMOSTRACIÓN. Según la hipótesis del lema π es de la forma

```
.        }λ
.
.
B        [I#]
A        [E#]
```

donde '#' es el símbolo lógico principal de B, c(B)=n y el grado de la subderivación λ de B es <n. Los casos a considerar vienen dados por los operadores lógicos disponibles (por las posibles interpretaciones de '#' si se prefiere). Si '#' es '&', B es A&C o C&D, de modo que π es entonces de una de las formas:

```
A              C
C              A
A&C     I&     A&C
A       E&     C

C              A
A              C
A&C     I&     A&C
A              C
```

Las contracciones son operaciones que transforman derivaciones que termina con un corte en otras derivaciones con idénticas premisas y conclusión. En concreto, las contracciones para los casos que estamos considerando son las subderivaciones de la primera ocurrencia explicitada de 'A', en los dos primeros casos, y de la primera ocurrencia explicitada de ´C', en los casos restantes. La gracia está en que, bajo los supuestos del lema, la contracción de π es siempre de grado <n.

Si '#' es '→', π es de una de las formas siguientes:

```
A                          ┌ A
┌ A                        │
│                          └ C
└ C                        A→C      I→
A→C      I→                A
C        E→                C        E→
```

y sus conversiones resultan de combinar la subderivación de la primera ocurrencia de 'A' y la derivación de C a partir de A. Adviértase que en esta última el supuesto provisional 'A' de la subderivación original es reemplazado por una ocurrencia de esa misma fórmula derivada a partir de las premisas.

Finalmente, si '#' es '∀', π es

```
A[v]
(∀v)A[v]      I∀
A[t]          E∀
```

cuya conversión es la derivación que resulta de reemplazar en la subderivación de A[v] la variable (libre) v por el término t..

⊣

Aplicando reiteradamente este lema se llega a:

TEOREMA 31. Si hay una derivación en DNS* de A a partir de X entonces hay una derivación normal de A a partir de X.

DEMOSTRACIÓN. Sea π una derivación en DNS* de grado n de la forma

```
.          }
.                      λ
.
A'         I#
A          E#
           }
.                      μ
.
```

En la que todo corte en la subderivación λ que precede al explícitamente señalado es de grado <n. Al aplicar la contracción correspondiente se obtiene una derivación π' reemplazando la subderivación λ por la subderivación apropiada λ'. Puede comprobarse fácilmente que la última fórmula de λ' es de complejidad menor que A', y por consiguiente que si λ' termina con una aplicación de una regla de introducción I° y μ comienza con una aplicación de la regla de eliminación paralela, E°, la combinación subsiguiente de λ' y μ comporta la aparición de un corte de grado menor que el de la derivación original.

⊣

La eliminación de cortes despeja en principio el camino para el establecimiento de la propiedad de subfórmulas, que puede enunciarse así: toda fórmula en una derivación π libre de cortes de A a partir de X es una subfórmula generalizada de A o de una fórmula de X. El quid estriba en que en una derivación normalizada pueden distinguirse tres partes:

a) *analítica*, en la que cada fórmula es la premisa principal de una eliminación y contiene como subfórmula a la fórmula siguiente;

b)*intermedia*, en la que las fórmulas son premisas de reglas de introducción; y

c) *sintética*, en la que cada fórmula es la conclusión de una introducción y es (salvo la conclusión) una subfórmula de la fórmula siguiente.

Sin embargo para demostrar que DNI* y DNC* poseen esta propiedad aún hay que introducir algún reajuste, como muestra el ejemplo que viene a continuación.

1. A→⊥	Premisa
2. A	Premisa
3. ⊥	E→1,2
4. A&B	E⊥3
5. A	E&4

Esta derivación no contiene fórmulas máximas -aunque sí un rodeo innecesario- aunque la fórmula 'A&B' no es una subfórmula ni de las premisas ni de la conclusión.

Lo que se desprende de éste y otros casos similares es la necesidad de restringir la regla E⊥ a aquellos casos en los que la conclusión 'A' es de complejidad 0. Queda para el lector establecer, por inducción sobre c(A), la equivalencia de DNS* con el sistema así obtenido.

TEOREMA 32. Toda fórmula en una derivación libre de cortes de A a partir de X en DNM*(DNI*) (con E⊥ restringida a fórmulas atómicas) es una subfórmula generalizada de una fórmula de X o de A.

DEMOSTRACIÓN. Sea π una derivación a partir de un conjunto de hipótesis X de las premisas de una regla r que satisface las condiciones del enunciado del lema. Si r es una regla de introducción, la derivación π' resultante de su aplicación a las fórmulas terminales de π conservará esas propiedades -las fórmulas terminales de π serán ahora subfórmulas de la conclusión de π'. Si r es una regla de eliminación hay que considerar cuatro casos. Si, en primer lugar, es la regla de eliminación del condicional π' es de la forma:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ B & B\to C\end{array}}{C}$$

Obviamente si B no es una subfórmula de las premisas, tampoco lo será B→C. Por las restricciones impuestas a E⊥, B→C no puede ser el resultado de aplicar E⊥. Ahora bien, si esta fórmula resultase de aplicar alguna regla de eliminación distinta de E⊥, dadas las hipótesis iniciales, sería una subfórmula de las premisas. Por otra parte, si resulta de emplear una regla de introducción, ésta no puede ser sino I→ y π' sería de la forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \left[\begin{array}{c}B\\ \vdots\\ C\end{array}\right]\end{array}}{\begin{array}{cc}B & B\to C\\ \hline & C\end{array}}\ \begin{array}{l}I\to\\ E\to\end{array}$$

y por tanto π contendría un corte, contra la hipótesis del teorema.
Los casos E& y E∀ se tratan de manera análoga. Falta únicamente por considerar la regla E⊥. Sea pues π'

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \}\,\pi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{A}\ E\bot$$

donde 'A' es una fórmula atómica. Como ⊥ no tiene subfórmulas propias, todas las fórmulas de la subderivación π distintas de '⊥' serán subfórmulas propias de las premisas y, ante la ausencia de reglas de introducción para ⊥, π concluye aplicando una regla de eliminación, de donde se sigue que ⊥ es a su vez una subfórmula propia de las premisas (o una premisa).⊣

La mutilación del prolenguaje previa a la demostración del teorema 30 es menos inquietante en el caso de la lógica clásica que en de la lógica mínima o la lógica intuicionista, puesto que A∨B y (∃v)A son clásicamente equivalentes a ¬(¬A&¬B) y ¬(∀v)¬A, respectivamente. De hecho, en el caso de la lógica clásica los resultados alcanzados hasta el momento son difícilmente mejorables.

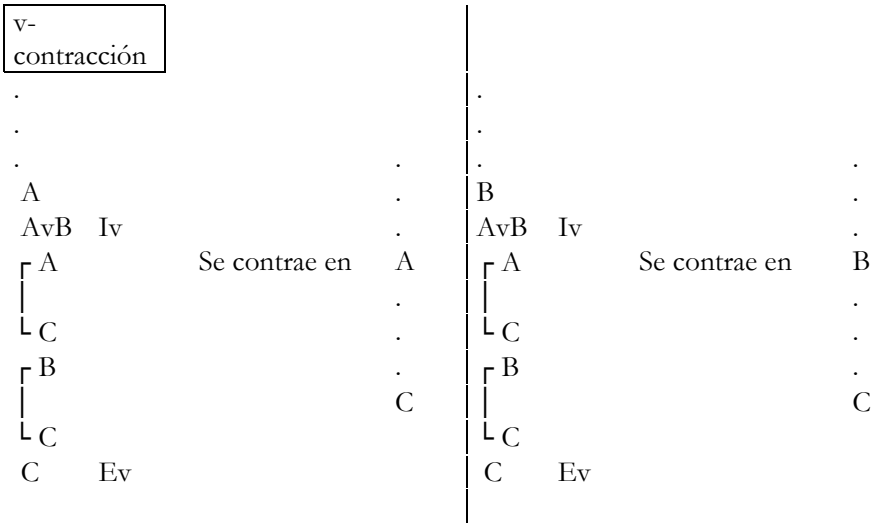
Adviértase que DNC* carece de la propiedad de subfórmulas tal y como ésta se enuncia en el teorema 28 debido a la presencia del axioma de tercio excluso, que en austero lenguaje en el que ahora nos movemos puede enunciarse como ((A→⊥)→⊥)→A. Así en la derivación de A a partir de (A→⊥)→⊥

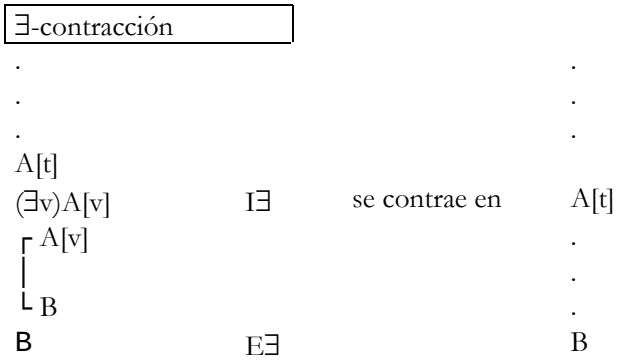
$$\text{Premisa}\ \dfrac{(A\to\bot)\to\bot \qquad ((A\to\bot)\to\bot)\to A}{}\ \text{TE}$$

$$\frac{}{A}\ E\rightarrow$$

la fórmula de la derecha no es ni una hipótesis ni una subfórmula de la conclusión. Naturalmente siempre puede encontrarse una paráfrasis más o menos airosa de la propiedad de subfórmulas para salir del paso -teniendo en cuenta la equivalencia de A y $(A\rightarrow\bot)\rightarrow\bot$.

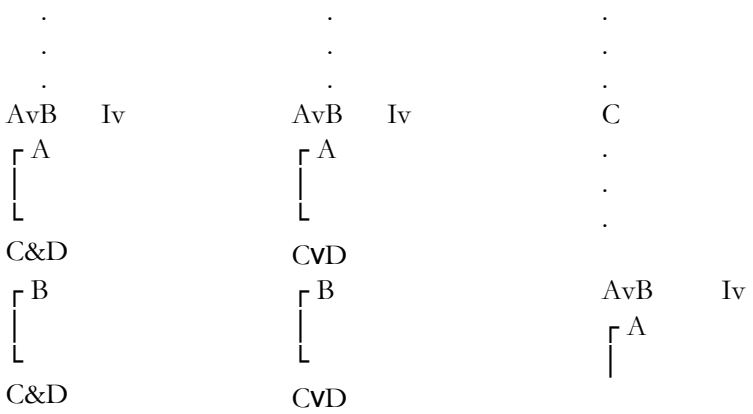
Para demostrar un teorema de forma normal para DNS, comencemos por especificar las contracciones asociadas a los operadores '∨' y '∃':





Pero con ésto no es suficiente, como se ha argumentado antes. Se precisa además la noción de corte conmutativo. Un *corte conmutativo* es una secuencia de dos aplicaciones de reglas, de las que la primera es [E∨] o [E∃] y la segunda una regla de eliminación cuya premisa mayor es suministrada por la aplicación de la primera. Por consiguiente, se tienen los siguientes cortes conmutativos.

a) Cortes conmutativos (Ev,E&), (Ev,Ev) y (Ev,E→).



C&D Ev
C(D) E&

CvD Ev
┌ C
│
└ E
┌ D
│
└ E
E Ev

└ C→D
┌ B
│
└ C→D
C→D Ev
D E→

b) Cortes conmutativos (Ev,E∀), (Ev,E∃) y (Ev, E⊥).

.
.
.
AvB Iv
┌ A
│
└
(∀v)C
┌ B
│
└
(∀v)C
(∀v)C Ev
C[t] E∀

.
.
.
AvB Iv
┌ A
│
└
(∃v)C
┌ B
│
└
(∃v)C
(∃v)C Ev
┌ C[v]
│
└ D
D E∃

.
.
.
AvB Iv
┌ A
│
└ ⊥

┌ B
│
└ ⊥

⊥ Ev
C E⊥

c) Cortes conmutativos para (E∃,E&), (E∃,Ev) y (E∃,E→).

.
.
.
(∃v)A[v] I∃
┌ A[v]
│
└ B&C
B&C E∃
B(C) E&

.
.
.
(∃v)A[v] I∃
┌ A[v]
│
└ BvC
BvC E∃
┌ B
│
└ D
┌ C
│
└ D
D Ev

.
.
.
B
.
.
.
(∃v)A[v] I∃
┌ A[v]
│
└ B→C
B→C E∃
C E→

d) Cortes conmutativos para (E∃,E∀), (E∃,E∃) y (E∃, E⊥).

.
.
.
(∃v)A[v] I∃
┌ A[v]
│

.
.
.
(∃v)A[v] I∃
┌ A[v]
│

.
.
.
(∃v)A[v] I∃
┌ A[v]
│

⌞ (∀u)B		⌞ (∃u)B[u]		⌞ ⊥	
(∀u)B	E∃	(∃u)B[u]	E∃	⊥	E∃
B[t]	E∀	⌜ B[u]		B	E⊥
		⎢			
		⌞ C		DNI,DNC	
		C	E∃		

Aunque todo esto puede parecer prolijo, podría serlo más, puesto que en algunos casos no se ha prestado atención al orden de las premisas. El *grado de un corte conmutativo* es el grado + 1 de la fórmula que aparece como conclusión de la primera eliminación (E**v** o E∃) y como premisa mayor de la eliminación subsiguiente.

En el ejemplo discutido hace un momento hay un corte (2-11) y un corte conmutativo (11-18):

1. p	Premisa
2. pvr	Iv,1
⌜ 3. p	
⎢ 4. p→q	premisa
⎢ 5. q	E→3,4
⌞ 6. qv¬s	Iv,5
⌜ 7. r	
⎢ 8. r→¬s	premisa
⎢ 9. ¬s	E→7,8
⌞ 10. qv¬s	Iv,9
11. qv¬s	Ev2,3-6,7-10
⌜ 12. q	
⎢ 13. q→t	premisa
⌞ 14. t	E→12,13
⌜ 15. ¬s	
⎢ 16. ¬s→t	premisa
⌞ 17. t	E→15,16
18. t	Ev11,12-14,15-17

El siguiente paso es definir las contracciones de los cortes conmutativos. Esquemáticamente son:

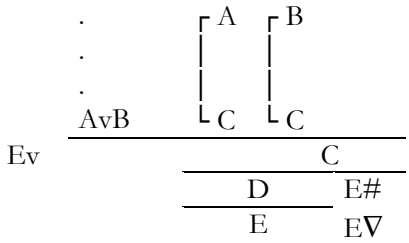
Corte conmutativo para Ev

.			.	
.			.	
.			.	
AvB			AvB	
⌜ A			⌜ A	
⎢			⎢	
⌞ C			⌞ C	
⌜ B		se convierte en	⌜ B	
⎢			⎢	
⌞ C			⌞ D	[r]
.	Ev		D	Ev
.				
.				
D	[r]			

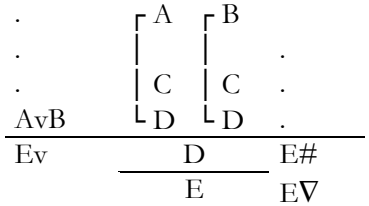
Corte conmutativo para E∃

.		.	
.		.	
.		.	
(∃v)A		(∃v)A	
⌜ A		⌜ A	
⎢	se convierte en	⎢	

Pero las complicaciones no terminan aquí. Considérese el esquema derivacional:

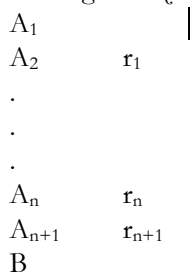


y supóngase que c(C)=n, n<c(D) y que todos los cortes, ordinarios y conmutativos, de la subderivación de C son de grado <n. El resultado de convertir esta derivación para eliminar el corte conmutativo cuya fórmula principal es C es:



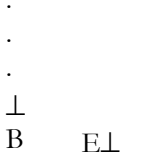
con lo que la desaparición de un corte conmutativo comporta la aparición de un nuevo corte conmutativo de grado mayor (con D como fórmula principal). Obsérvese que para que esto suceda es preciso que E# sea una de las reglas E⊥ Ev o E∃, puesto que de lo contrario, al provenir D de C en la derivación original por aplicación de E#, la complejidad de D sería menor que la de C.

La solución es definir un *corte conmutativo generalizado (c.c.g.)* como una secuencia derivacional



en la que (1) r_1 es una de las reglas E⊥, Ev o E∃, (2) cada r_i, $1<i<n+1$, es una regla de eliminación cuya premisa mayor es A_{i-1}, y (3) r_{n+1} es una de las reglas E⊥ Ev o E∃, con A_{n+1} como premisa mayor. El *grado de un c.c.g.* es entonces $\text{máx}\{c(A_i)/1\leq i\rightarrow n+1\}$.

Especifiquemos ahora las contracciones de los c.c.g. Si, usando el esquema precedente, r_1 es E⊥, su conversión es



Si r_1 es Ev o E∃, su conversión (que conserva en el peor de los casos el grado de la derivación original) es la conversión correspondiente al corte conmutativo inicial de la secuencia.

En lo que sigue, por *grado de* π ha de entenderse el mayor de los grados de sus cortes ordinarios, conmutativos y conmutativos generalizados.

LEMA 24. Sea π una derivación de A a partir de X en DNM, DNI o DNC de grado $n\geq 1$. Entonces existe una derivación π' de A a partir de X de grado <n.

DEMOSTRACIÓN. Búsquese el primer corte (ordinario o conmutativo) de π de grado n, de manera que la derivación puede representarse ahora como

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array}\right\} \lambda \\ B \\ C \quad [r] \\ \left.\begin{array}{l}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array}\right\} \mu \\ A \end{array}$$

donde B es la fórmula principal del corte en cuestión, y por consiguiente r es una regla de eliminación y el grado de la subderivación λ de B es <n. Si el corte en cuestión es el corte ordinario asociado a uno de los operadores '&', '$\rightarrow$' o '$\forall$', c(C)<c(B). Reemplazando entonces en π la subderivación

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array}\right\} \lambda \\ \underline{B} \\ C \quad [r] \end{array}$$

por la contracción correspondiente λ', se obtiene una derivación

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array}\right\} \lambda' \\ \underline{C} \\ D \quad [r] \\ \left.\begin{array}{l}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array}\right\} \mu \\ A \end{array}$$

Tanto si C no es la fórmula principal de un corte ordinario o conmutativo como si lo es, la subderivación

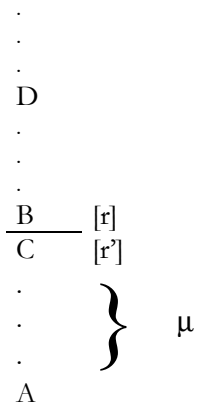
$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array}\right\} \lambda' \\ \underline{C} \\ D \quad [r] \end{array}$$

tiene grado <n=c(B).

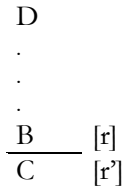
De los casos correspondientes a los cortes ordinarios de los operadores restantes 'v' y '$\forall$' se expone sólo el primero, quedando el otro para el lector. Supóngase, entonces, que el corte en cuestión es el corte ordinario correspondiente a 'v', de manera que π es ahora

$$\begin{array}{l} A \\ \left.\begin{array}{l}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array}\right\} \lambda \\ \begin{array}{ll} \underline{D} & \ulcorner D \quad \ulcorner E \\ \text{Iv} \quad D \text{v} E & \llcorner B \quad \llcorner B \end{array} \\ \underline{\qquad\qquad B} \quad \text{Ev} \\ C \quad [r] \\ \left.\begin{array}{l}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array}\right\} \mu \end{array}$$

La contracción correspondiente es

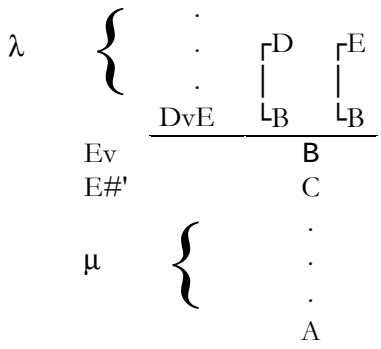


formada por la yuxtaposición de la subderivación original de D, la subderivación del supuesto izquierdo de la eliminación del disyuntor y μ. Si r no es una regla de eliminación, B no es la fórmula principal de un corte y así la subderivación

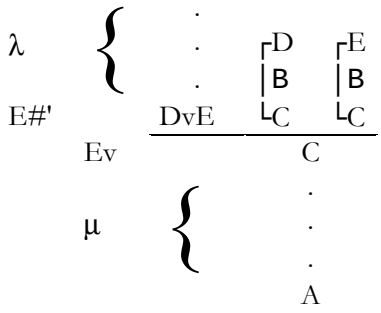


tiene grado <n. Lo mismo vale si r es una regla de eliminación, digamos E#, y r' es distinta de I#, Ev y E∃. Obviamente, si c(B)<c(DvE), aún cuando r´ sea una regla de eliminación, se llega a la misma conclusión. Por otra parte, si r es una regla de eliminación, no es el caso que c(B)<c(DvE) ya que de lo contrario habría en π un corte conmutativo de grado>n. Así, falta por considerar el supuesto de que r sea una regla de eliminación y c(B)=c(DvE). Bajo estos supuestos, está claro que la subderivación de B tiene grado <n, si bien la subderivación subsiguiente de C tiene grado n.

Más complejos son aquellos casos en los que B es la fórmula principal de un corte conmutativo. Analicemos a título de ejemplo el caso en que π es de la forma

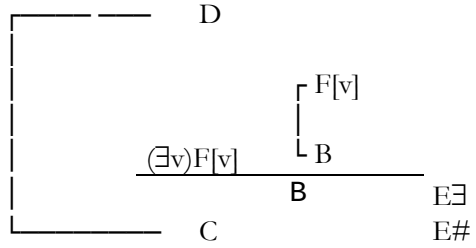


Su contracción presenta entonces el aspecto siguiente:

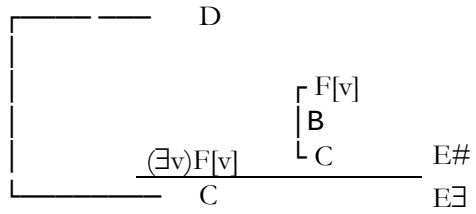


En primer lugar, al trasladar a las derivaciones subsidiarias de la eliminación del disyuntor la aplicación de E# que permite inferir C, pueden aparecer en éstas cortes ordinarios o conmutativos con el mismo grado que el corte conmutativo eliminado puesto que en todos los casos su fórmula

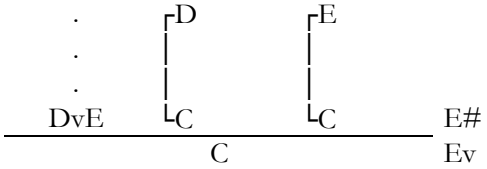
principal será B. Si se trata de cortes ordinarios bastará con efectuar a continuación la contracción apropiada. Si se trata de cortes conmutativos, su contracción permite, en el peor de los casos ir desplazando la anomalía hacia el interior de los supuestos anidados. Es decir, si la derivación subsidiaria del supuesto provisional D fuera



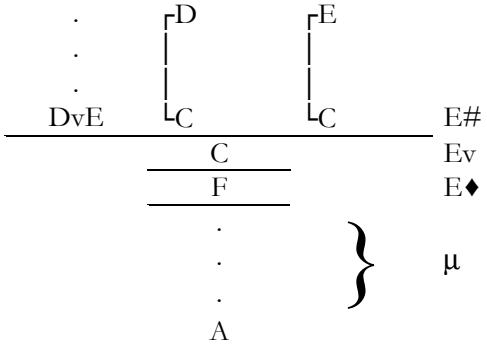
al contraerse se convertiría en



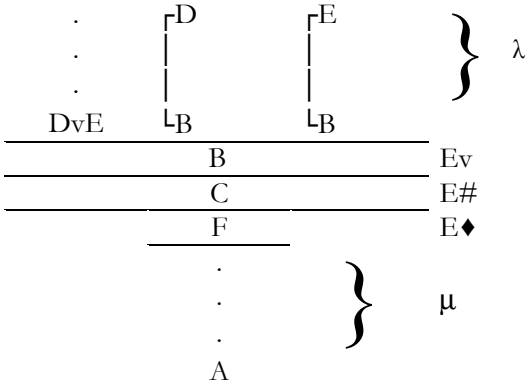
(habría que establecer, naturalmente, que 'v' no está libre en C, lo que eventualmente puede requerir «rebautizar» la variable). Como en cualquier caso entre D (o E) y B hay un número finito de aplicaciones de Ev y E∃, reiterando el procedimiento el número de veces preciso se termina por obtener subderivación



de grado <n. En segundo lugar, si el producto de las manipulaciones indicadas fuera de la forma



con c(C)>c(B) podría suceder que, debido al corte conmutativo con C como fórmula principal, la subderivación correspondiente a F tuviera un grado >n. Pero en tal caso, la derivación original,



contendría un c.c.g. de grado >n, contra la hipótesis de partida.

El tratamiento de los cortes conmutativos generalizados no presenta ninguna dificultad especial, salvo la posible «interiorización» del corte original en los supuestos de Ev o E∃, ya abordada para los cortes conmutativos.

⊣

El *quid* en la eliminación de cortes en deducción natural hay que buscarlo en la invertibilidad de las reglas de introducción y eliminación de un operador. Es este rasgo el que expresan las conversiones descritas, aunque es más perceptible en unos casos que en otros. Está claro, por ejemplo, que I& y E& son inversas entre sí, de modo que podrían reemplazarse sin pérdida alguna por

$$\dfrac{A \qquad B}{A\&B}$$

donde el trazo doble indica la admisibilidad del tránsito inferencial en cualquiera de dos sentidos posibles inmediato en el caso del disyuntor.

Usando el lema 24 se llega a

TEOREMA 32. Si hay una derivación de A a partir de X en DNS (=DNM, DNI, DNC) entonces hay una derivaciónde A a partir de X en DNS sin cortes ni cortes conmutativos.

EJERCICIOS.

(1) Establecer la equivalencia de las dos formulaciones de DNC (con el operador '⊥') consideradas en el texto. (La diferencia viene dada por la presencia de TE o de DN).
(2) Demostrar directamente -es decir, sin pasar a través de sus formulaciones secuenciales- la equivalencia de los sistemas hilbertianos y de deducción natural considerados para las lógicas mínima, intuicionista y clásica.
(3) Usando el lema 21, demostrar que DNI (con 'v' y '∃') posee la propiedad de subfórmulas.
(4) Sea DNC' la formulación resultante de reemplazar TE/DN por la regla [Abs]

$$\dfrac{\begin{array}{l}\ulcorner\, A\to\bot \\ \vert \\ \llcorner\, \bot\end{array}}{A}$$

Muéstrese que DNC y DNC' son deductivamente equivalentes.
(5) Demuéstrese que DNC' posee la siguiente variante de la propiedad de subfórmulas: si π es una derivación normal (i.e., sin cortes) de A a partir de X, entonces cada fórmula de π es (a) una subfórmula de A, (b) una subfórmula de alguna fórmula de X, (c) un supuesto de la forma A→⊥ cancelado aplicando [Abs], siendo A una fórmula del tipo indicado, o (d) una instancia de ⊥.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, E.

[1996] *Curso de teoría de la computación*. Ediciones de la UAM, Madrid.

Anderson, A.R. y Belnap, N.D. Jr.

[1975] *Entailment: the Logic of Relevance and Necessity, I*. Princeton University Press, Princeton.

[1992] *Entailment: the Logic of Relevance and Necessity, II*. Princeton University Press, Princeton.

Bell, J. y Machover, M.

[1977] *A Course in Mathematical Logic*. North Holland, Amsterdam.

Belnap, N.D., Jr.

[1982] 'Display logic', *Journal of Philosophical Logic* 11, 375-417.

[1996] 'The Display Problem' en H.Wansing [1996], 79-92.

Beth, E.W.

[1978] *Entrañamiento semántico y derivabilidad formal*. Cuadernos Teorema, Valencia. Original inglés 'Semantic entailment and formal derivability' de 1955.

Brady, R.T.

[1991] 'Gentzenization and decidability of some contractionless relevant logics'. *Journal of Philosophical Logic*, 97-117.

Crocco, G. y Fariñas del Cerro, L.

[1994] 'Structure, Consequence Relation and Logic' en D.M.Gabbay (1994a), 239-259.

David, R., Nour,K. y Raffalli, C.

[2001] *Introduction à la logique: Théorie de la démonstration*. Dunod, París.

Došen, K.

[1985] 'Sequent systems for modal logic' , *The Journal of Symbolic Logic* 50, 149-168.

[1987] 'Logical Constants as Punctuation Marks', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30, 362-381.

[1997] 'Logical consequence: a turn in style' en *Logic and Scientific Methods*, M.L. Dalla Chiara et al., comps., 289-311, Kluwer, Dordrecht-Boston-Londres.

Dragalin, A.G.

[1987] *Mathematical Intuitionism: Introduction to Proof Theory*. American Mathematical Society.

Gabbay, D.M.

[1994a] (comp.) *What is a Logical System?* Oxford University Press, Oxford.

[1994b] 'What is a Logical System?' en Gabbay [1994ª], 179-216.

[1996] *Labelled Deductive Systems*., vol.I. Oxford University Press, Nueva York.

Gentzen, G.

[1969] 'Investigations into logical deduction' en *The collected works of Gerhard Gentzen*, M.E. Szabo (comp.), 68-131, North Holland, Amsterdam. Original alemán 'Untersuchungen über das logische Schliessen' de 1934.

Girard, J.-Y.

[1987] *Proof Theory and Logical Complexity*, Bibliópolis, Nápoles.

Girard, J.-Y., Lafont, Y. y Regnier, L. (comps.)

[1995] *Advances in linear logic*. Cambridge University Press, Cambridge.

Girard, J.-Y., Lafont, Y. y Taylor, P.

[1989] *Proofs and Types*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kleene, S.C.

[1974] *Introducción a la metamatemática*. Tecnos, Madrid. Original inglés *Introduction to Metamathematics* de 1952.

Kreisel, G.

[1971] 'A Survey of Proof Theory II' en *Proceedings of the Second Scandinvian Logic Symposium*, J.E. Fenstad (comp.), 109-70, North Holland, Amsterdam.

Lambek, J. y Scott, D.

[1986] *Introduction to Higher-Order Categorical Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

Łos,J. y Suszko,R.

[1958] 'Remarks on sentential logics', *Indagationes Mathematicae*.

Marraud, H. y Navarro, P.
[1988] *Sistemas deductivos tipo Gentzen*. Ediciones de la UAM, Madrid.
Moisil, G.C.
[1972] *Essais sur les logiques non chrysippiennes*. Editions de l'Académie de R.S. de Roumanie, Bucarest.
Moortgat,M.
[1988] *Categorical Investigations: Logical Aspects of the Lambek Calculus*. Foris, Dordrecht.
Negri,S. y von Plato, J.
[2001] *Structural Proof Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
Ono, H. y Komori, I.
[1985] 'Logics without the contraction rule', *The Journal of Symbolic Logic* 50, 169-201.
Prawitz, D.
[1965] *Natural Deduction*, Almqvist & Wiksell, Estocolmo.
[1971] 'Ideas and results in proof theory' en *Proceedings of the Second Scandinvian Logic Symposium*, J.E. Fenstad (comp.), 235-307, North Holland, Amsterdam.
[1981] 'Philosophical aspects of proof theory' en *Contemporary philosophy. A new survey 1*, R. Klibansky (comp.), 235-277, Martinus Nijhoff, La Haya.
Rasiowa, H.
[1974] *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*. PWN y Noth Holland, Varsovia y Amsterdam.
Rautenberg, W.
[1979] *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik*, Vieweg & Sohn, Braunschweig y Wiesbaden.
Restall, G.
[1999] *An Introduction to Substructural Logics*, Routledge, Londres.
Sambin,G., Battilotti,G. y Faggian,C.
[2000] 'Basic logic: Reflection, Symmetry, Visibility'. *The Journal of Symbolic Logic* 65, 979-1013.
Schröder-Heister,P. y Došen,K. (comps.)
[1993] *Substructural Logics*, Oxford University Press, Oxford.
Schütte, K.
[1977] *Proof Theory*. Springer Verlag, Berlín. Original alemán *Beweistheorie* de 1960.
Schwichtenberg,H. y Troelstra, A.
[2000] *Basic Proof Theory*. Cambridge, Cambridge University Press.
Shoesmith, D.J. y Smiley, T.J.
[1978] *Multiple Conclusion Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.
Smullyan, R.
[1968] *First-Order Logic*, Springer Verlag, Berlín-Heidelberg-Nueva York.
Sundholm, G.
[1983] 'Systems of Deduction' en *Handbook of Philosophical Logic*,*I* D.M.Gabbay y F. Guenthner (comps.), 133-88, Reidel, Dordrecht.
Takeuti, G.
[1975] *Proof Theory*, North Holland, Amsterdam.
Tarski, A.
[1956] *Logics, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*. Clarendon Press, Oxford.
Tennant, N.
[1978] *Natural Logic*, Edinburgh University Press, Edimburgo.
Troelstra, A.
[1992] *Lectures on Linear Logic*. CSLI, Stanford.
Ungar, A.M.
[1992] *Normalization, Cut-elimination and the theory of proofs*. CSLI, Stanford.
Vega, L.
[1987] *El análisis lógico: nociones y problemas II*. UNED, Madrid.
Wansing, H. (comp.)
[1996] *Proof Theory of Modal Logic*. Kluwer, Dordrecht-Boston-Londres.
Wójcicki, R.
[1986] *Theory of Logical Calculi*. Kluwer, Dordrecht-Boston-Londres.
Zucker, J.:

[1974] 'Cut-elimination and normalization', *Annals of Mathematical Log*ic 7, 1-15.