

Capítulo 5

Teoría de Conjuntos

En las secciones que siguen se presenta primero la teoría intuitiva de conjuntos, basada en la original de Cantor, para seguir con sus problemas de inconsistencia y terminar con la solución axiomática de Zermelo-Fraenkel.

5.1. Teoría intuitiva de conjuntos

5.1.1. La selva de Cantor

La definición inicial de Cantor es informal

“Un conjunto es cualquier colección C de objetos determinados y bien distintos x de nuestra percepción o nuestro pensamiento (que se denominan elementos de C), reunidos en un todo”.

Su concepción de la naturaleza de los conjuntos coincide con la de Frege, identificándola con la extensión de un predicado —esto es, con la colección de objetos que satisface el predicado—. Esta idea tan sencilla e intuitiva resulta ser también ingenua porque produce enormes contradicciones de inmediato, como por ejemplo la denominada *paradoja de Russell*. Para poder mostrarla es necesario empezar por formalizar esta teoría que, aparte de los signos para los conjuntos y sus elementos — C , x , etc.—, tendrá los signos de pertenencia $\in$ e igualdad $=$.

- Que x es un elemento del conjunto C se expresa “ x pertenece a C ” (y se formaliza, $x \in C$).
- Que x no es un elemento de C se expresa “ x no pertenece a C ” (y se formaliza, $\neg x \in C$ o $x \notin C$).

Tendremos en cuenta que no es necesario denotar siempre con letras mayúsculas a los conjuntos y con minúsculas a sus elementos, ya que un conjunto

puede ser a su vez un elemento de otro conjunto e incluso podemos considerar que en nuestra teoría no hay objetos que no sean conjuntos.

¿Cómo se determina una colección?

Hay dos modos:

- *Listar los objetos.* De acuerdo con la definición de Cantor un conjunto queda determinado si es posible describir completamente cuales son sus elementos. El procedimiento más sencillo es nombrar a cada uno de ellos, y se llama *definición por extensión*; es conocida la notación de encerrar entre llaves a los elementos del conjunto.

El inconveniente de este método de listado o enumeración de los elementos del conjunto es que éste debe tener sólo un número finito de ellos y, en la práctica, uno muy pequeño

¿Qué hacer cuando la colección es infinita, o cuando es finita pero numerosa?

- *Describir los objetos.* Cuando el conjunto tiene infinitos elementos —como, por ejemplo, el de los número impares— o son demasiado numerosos —como el de todas las palabras que pueden formarse con el alfabeto latino— se utiliza el método de *definición por intensión*, que consiste en la descripción de un conjunto como la *extensión de un predicado*, esto es, mediante una o varias propiedades (el predicado) que caracterizan a los elementos de ese conjunto.

En principio podría tomarse cualquier lengua natural para describir los objetos (español, inglés, italiano, vasco, catalán, etc), sin embargo es preferible utilizar un *lenguaje formal* que ofrezca rigor y precisión. Dicho lenguaje debe ser adecuado y lo bastante rico; esto es, lo suficientemente expresivo como para poder describir *todas* las colecciones matemáticas. Pero también su teoría ha de ser lo suficientemente restrictiva como para limitarse *sólo* a las colecciones de objetos matemáticos. Para expresar predicados utilizaremos el lenguaje $L^\in$ de la lógica de primer orden —que contiene como signos lógicos las conectivas $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ más los cuantificadores universal $\forall$ y existencial $\exists$ — al que se añaden variables, igualdad y el relator binario de pertenencia. Puede ser ampliado mediante definición con los símbolos propios de las operaciones, relaciones o funciones del lenguaje específico de teoría de conjuntos.

5.1.2. La paradoja de Russell

Pero la definición de conjunto como “colección de objetos ‘describable’ por un predicado”, conduce inevitablemente a ciertas contradicciones que se llaman paradojas, siendo la más célebre la conocida como *paradoja de Russell*:

En la teoría cantoriana de conjuntos todas las propiedades permiten definir conjuntos, pero si tomamos como propiedad la de no pertenecerse a sí mismo, llegamos a una contradicción al analizar la clase

$$U = \{x \mid x \notin x\}$$

Evidentemente, para cualquier A se cumple

$$A \in U \leftrightarrow A \notin A$$

Pero, ¿qué sucede con el propio U ? ¿Es U un elemento de U ?

Si U fuera un elemento de U , debería verificar la propiedad que lo define; *i.e.*, debería no pertenecerse a sí mismo, $U \notin U$. Por otra parte, si U no fuera un elemento de U debería no verificar la propiedad que define a esta clase; *i.e.*, $\neg U \notin U$; es decir, $U \in U$. Naturalmente, la expresión resultante,

$$U \in U \leftrightarrow U \notin U$$

es una contradicción.

Se ha visto claramente que el concepto de conjunto no es tan sencillo y que identificarlo sin mayor cautela con el de colección resulta problemático. Para evitar la paradoja de Russell y otras de esta naturaleza, es necesario restringir la formación de conjuntos, lo veremos en lo que sigue. Otras paradojas, de hecho las primeras en descubrirse, afectaban a colecciones muy grandes, como por ejemplo la de los ordinales, o la de todos los conjuntos; estas colecciones no podrán pertenecer a la categoría de conjunto en la teoría axiomática de Zermelo.

5.1.3. Solución de las paradojas

Una solución radical al problema de las paradojas es la propuesta en 1903 por Russell, su *Teoría de Tipos*. Observa que en todas las paradojas conocidas hay una componente de reflexividad, de circularidad. Técnicamente se evitan las paradojas al eliminar del lenguaje las formaciones autorreflexivas¹. Se reconoce que nuestro universo matemático no es plano, sino jerarquizado, por niveles, y que el lenguaje más adecuado para hablar de un universo así debe tener diversos tipos de variables que correspondan a cada nivel; en particular, la relación de pertenencia se da entre objetos de distinto nivel.

En 1908 Zermelo propone como solución la *Teoría Axiomática de Conjuntos*, refinada más tarde por Fraenkel, Skolem y otros. En ella se evita que las colecciones que producían las paradojas puedan ser conjuntos. Una colección de objetos será un conjunto si los axiomas la respaldan; esto es, justifican que lo sea. Dichos axiomas permiten formar conjuntos a partir de conjuntos previamente contruidos y postulan la existencia del $\emptyset$ y de al menos un conjunto infinito. Sin embargo, en la teoría de von Neumann se admiten colecciones que no son conjuntos, las denominadas *clases últimas*. En ella se definen las clases mediante propiedades, sin restricción alguna, pero habrá que mostrar que se trata de conjuntos viendo que pertenecen a alguna clase, en los casos oportunos. Las clases últimas, como la clase universal o la de los ordinales, no pertenecen a ninguna otra clase.

¹La paradoja antes mencionada no puede producirse en la teoría de tipos simple porque la sucesión de signos $X \notin X$ no es una fórmula y el axioma de definición de clases no se aplica para ella. El signo de $\in$ se aplica entre objetos de distinto tipo, $X^\alpha \in X^{(0,\alpha)}$

5.1.4. El Universo matemático

La idea intuitivamente más fructífera y también la más extendida es que nuestro *universo matemático*, —esto es, el que contiene todas las colecciones de objetos matemáticos, pero solamente los objetos matemáticos— constituye una jerarquía de conjuntos, la denominada *Jerarquía de Zermelo*.

En la construcción de los conjuntos que la formarán se parte de una colección inicial $\mathcal{M}_0$ de objetos dados y a continuación se construye una colección $\mathcal{M}_1$ de conjuntos de elementos de $\mathcal{M}_0$, después una colección $\mathcal{M}_2$ de conjuntos de objetos de $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_1$, etc.

El supuesto fundamental es que los conjuntos se construyen por niveles y que por lo tanto no nos vienen dados en bloque desde un principio. En cada uno de ellos formamos nuevos conjuntos a partir de los que disponemos hasta ese nivel; es decir, los ya formados². Entre ellos se forma una cadena de inclusiones

$$\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \dots$$

y se considera que nuestros conjuntos son todos los que aparecen en sus eslabones. Así, el universo de conjuntos resultante es una jerarquía.

Para proporcionar mayor precisión debemos responder a las preguntas siguientes:

1. ¿Cuál será nuestra colección de partida, $\mathcal{M}_0$?
2. ¿Qué conjuntos de objetos de niveles inferiores se toman para formar nuevos niveles en la jerarquía?
3. ¿Hasta dónde se extiende esta jerarquía?

Para responder a la primera pregunta debemos considerar si nos interesa tomar objetos que no sean conjuntos o si nos basta con partir de un primer nivel que sea sencillamente el conjunto $\emptyset$. Está claro que así se toman sólo objetos matemáticos, pero habrá que ver también que ello es suficiente y que podremos finalmente contar en el *Universo* con todos los objetos matemáticos.

Una respuesta a la segunda pregunta que parece razonable es que los nuevos conjuntos que vayan siendo admitidos, se puedan describir con nuestro lenguaje formal. Al tomar esta opción formamos la *jerarquía de conjuntos constructibles*. Otra posibilidad es tomar como objetos de un nuevo nivel a todos los posibles. Veremos que esta fue la opción de Zermelo.

Finalmente, la tercera de las preguntas es hasta donde se extiende la jerarquía. La respuesta es que no tiene fin, siempre se pueden construir nuevos niveles.

Comentario 182 *Para precisar un poco más esta representación mental de nuestro Universo matemático es conveniente contar con algunas nociones de teoría de conjuntos básica y con el concepto de ordinal. Por ello sólo volvemos sobre este asunto cuando tengamos el equipamiento necesario.*

²Necesitaremos, no obstante, a los números ordinales — $\Omega = \text{Ord}$ — para disponer los infinitos niveles, pero esto no es un problema grave porque lo que estamos haciendo ahora es proporcionar una imagen intuitiva; no estamos definiéndolos en un sentido técnico o fuerte.

5.2. Algunas definiciones pertinentes

Definiciones de igualdad, inclusión y vacío

1. *Igualdad (Axioma de extensionalidad):* $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B$
2. *Inclusión, subconjunto:* $A \subseteq B \leftrightarrow_{Df} \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
3. *Inclusión estricta:* $A \subset B \leftrightarrow_{Df} (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$
4. *Conjunto vacío:* $\emptyset$ se define $\forall x(x \notin \emptyset)$

Definiciones de operaciones algebraicas

1. *Unión:* $\forall x(x \in A \cup B \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B))$
por extensionalidad, este conjunto es único, $A \cup B = \{x / (x \in A) \vee (x \in B)\}$
2. *Intersección:* $\forall x(x \in A \cap B \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B))$
por extensionalidad, este conjunto es único, $A \cap B = \{x / (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
3. *Diferencia:* $\forall x(x \in A - B \leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B))$
por extensionalidad, este conjunto es único, $A - B = \{x / (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$

Definiciones de clases unitarias, pares, díadas y conjunto potencia o de las partes de un conjunto

1. *Par desordenado:* $\{x, y\} = \{z / (z = x) \vee (z = y)\}$
2. *Clase unitaria:* $\{x\} = \{x, x\}$
3. *Par ordenado:* $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
4. *Partes de un conjunto:* $\wp(A) = \{C / C \subseteq A\}$

Definiciones de gran unión, gran intersección y producto cartesiano

1. *Gran unión:* $\bigcup \mathcal{A} = \{x \mid \exists A (A \in \mathcal{A} \wedge x \in A)\}$
2. *Gran intersección:* $\bigcap \mathcal{A} = \{x \mid \forall A (A \in \mathcal{A} \rightarrow x \in A)\}$
Convención: $\bigcap \emptyset = \emptyset$
3. *Producto cartesiano de dos conjuntos:*

$$A \times B = \{z \mid \exists uv(z = \langle u, v \rangle \wedge u \in A \wedge v \in B)\}$$

Definiciones de relaciones binarias

1. *Relación binaria:* $\forall R (R \text{ es una relación} \leftrightarrow_{Df} \forall x (x \in R \rightarrow \exists yz (x = \langle y, z \rangle)))$
Una relación binaria es una clase de pares ordenados.
2. *Dominio:* $Dom R = \{x \mid \exists y \langle x, y \rangle \in R\}$
3. *Rango:* $Rang R = \{x \mid \exists y \langle y, x \rangle \in R\}$
4. *Campo:* $Camp R = Rang R \cup Dom R$

Definición de relación inversa, producto relativo y restricción

1. *Relación inversa:* $R^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R\}$
2. *Producto relativo:* $R/S = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z (\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S)\}$
3. *Restricción de una relación a un conjunto:*

$$R \upharpoonright A = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \wedge x \in A\}$$

Definiciones de propiedades de ciertas relaciones

1. R es **reflexiva** si y sólo si: $\forall x (x \in Camp R \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$
2. R es **simétrica** si y sólo si: $\forall xy (\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$
3. R es **transitiva** si y sólo si:

$$\forall xyz (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$$

4. R es **irreflexiva** si y sólo si: $\forall x (x \in Camp R \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$
5. R es **asimétrica** si y sólo si: $\forall xy (\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \notin R)$
6. R es **intransitiva** si y sólo si:

$$\forall xyz (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \notin R)$$

7. R es **antisimétrica** si y sólo si: $\forall xy (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$
8. R está **conectada** syss:

$$\forall xy (x, y \in Camp R \wedge x \neq y \rightarrow \langle x, y \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in R)$$

9. R está **fuertemente conectada** syss:

$$\forall xy (x, y \in Camp R \rightarrow \langle x, y \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in R)$$

10. R es **euclídea** syss: $\forall xyz (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, z \rangle \in R \rightarrow \langle y, z \rangle \in R)$
11. R es **incestuosa** syss:

$$\forall xyz (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, z \rangle \in R \rightarrow \exists u (\langle y, u \rangle \in R \wedge \langle z, u \rangle \in R))$$

Definiciones de relaciones de orden

1. R es una relación de **orden (parcial)** si y sólo si R es una relación y R es reflexiva, antisimétrica y transitiva
2. R es un **orden (parcial)** sobre A si y sólo si $\text{Camp } R = A$ y R es una relación de orden
3. R es un **orden lineal** si y sólo si R es una relación de orden y R esta conectada
4. R es un **orden lineal sobre** A si y sólo si $\text{Camp } R = A$ y R es una relación de orden lineal
5. Un **conjunto parcialmente ordenado** es un par $\langle A, R \rangle$ formado por un conjunto A y un orden parcial sobre A .
6. Un **conjunto linealmente ordenado** es un par $\langle A, R \rangle$ formado por un conjunto A y un orden lineal sobre A
7. Sea $\langle A, R \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $Y \subseteq A$. Un elemento $a \in Y$ es un **elemento minimal** de Y si y sólo si

$$\neg \exists x(x \in Y \wedge \langle x, a \rangle \in R)$$

Un elemento $a \in Y$ es **primer elemento** de Y (mínimo de Y) si y sólo si

$$\forall x(x \in Y \rightarrow \langle a, x \rangle \in R)$$

8. Un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, R \rangle$ está **bien fundado** si cada subconjunto no vacío de A posee elemento minimal.
9. Cuando $\langle A, R \rangle$ está linealmente ordenado y bien fundado decimos que está **bien ordenado**.

Definición de funciones, composición y propiedades

1. *Función:* f es una función si y sólo si f es una relación y

$$\forall xyz(\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \rightarrow y = z)$$

2. *Composición:* $f \circ g = g/f$
3. f es una función de A en B si y sólo si f es una función y $\text{Dom } f = A$ y $\text{Rang } f \subseteq B$
4. f es una función parcial de A en B si y sólo si f es una función y $\text{Dom } f \subseteq A$ y $\text{Rang } f \subseteq B$

5. f es una **función inyectiva** si y sólo si f es una función y

$$\forall xyz (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle z, y \rangle \in f \rightarrow x = z)$$

6. $f : A \longrightarrow B$ es **exhaustiva** si y sólo si $\text{Rang } f = B$

7. $f : A \longrightarrow B$ es **biyectiva** si y sólo si f es inyectiva y exhaustiva

5.3. Buenos órdenes e inducción

En un conjunto bien ordenado todos los subconjuntos no vacíos tienen un primer elemento. El principio de inducción es una consecuencia de esta importante propiedad.

De entre los subconjuntos de números naturales destacan por su interés los que poseen la siguiente propiedad: *si tomamos un número cualquiera del conjunto y le sumamos uno, el resultado también está en el conjunto.*

Llamemos *inductivos* a los subconjuntos de los naturales que exhiban semejante comportamiento y formulemos el principio de inducción así:

Si un conjunto G de números naturales es tal que: 0 es elemento de G y G es inductivo, entonces $G = \mathbb{N}$

Podemos expresarlo de esta manera

$$\mathcal{P}(0) \wedge \forall n (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \forall n \mathcal{P}(n)$$

No voy a entrar en la aplicabilidad de este principio, sino en su justificación.

¿Por qué es verdad?

En la aritmética de Peano se toma como axioma y por lo tanto no tiene sentido preguntárselo. Pero estamos en un contexto mucho más amplio, tanto que tendría que servir de fundamento, incluso de teorías tan potentes como la misma aritmética; aquí debería no ser un principio, sino derivarse de otros más generales. Para contestar a la pregunta resulta útil plantearse esta primero:

¿por qué funciona el principio de inducción?

Si queremos demostrar que todos los números tienen una determinada propiedad $\mathcal{P}$ es obvio que, al tratarse de un conjunto infinito, no podemos comprobar uno a uno que todos los naturales cumplen $\mathcal{P}$; sin embargo, basta con ver que

$$\mathcal{P}(0) \wedge \forall n (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$$

¿Por qué?

Esta es la razón:

Supongamos que no todos los naturales tuvieran la propiedad $\mathcal{P}$; es decir,

$$\{n \mid \neg \mathcal{P}(n)\} \neq \emptyset.$$

Habría un primer elemento de este conjunto; esto es, habría un m para el que valdría $\neg \mathcal{P}(m)$ pero también, por ser m el primer elemento, valdría $\mathcal{P}(m-1)$.

Esto es justamente lo que queda excluido en una prueba por inducción; porque demostramos

$$\forall n(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$$

Retrocedamos un poco, ¿por qué tiene que haber un primer elemento en el conjunto?

Lo que hace que funcione el principio de inducción matemática es el buen orden de los naturales que nos garantiza que todo subconjunto tiene primer elemento. Esto es, la seguridad de que $\forall n \mathcal{P}(n)$ se verifica en cuanto somos capaces de probar que vale para el cero y para el siguiente de todos los que tienen la propiedad, se apoya en el principio del buen orden.

¿Se puede extender este método para que sirva no sólo con los conjuntos numerables, sino también con los transfinitos (supernumerables)?

La respuesta es afirmativa, lo hacemos introduciendo a los ordinales.

Teorema 183 Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado. Y sea $E \subseteq X$ tal que:
 (1) el primer elemento de X es elemento de E
 (2) para cada $x \in X$, si $\forall y(y < x \rightarrow y \in E)$, entonces $x \in E$
 entonces $E = X$

La inducción para los naturales es una consecuencia directa de la inducción para conjuntos bien ordenados cualesquiera.

Comparación de conjuntos bien ordenados. Isomorfismos.

Definición 184 Sean $\langle X, \leq \rangle$ y $\langle X^*, \leq^* \rangle$ dos conjuntos bien ordenados.

$f : X \rightarrow X^*$ es un **isomorfismo de órdenes** si y sólo si

- (i) f es biyectiva
- (ii) $x < y \Rightarrow f(x) <^* f(y)$, para todo $x, y \in X$

Teorema 185 Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado, $Y \subseteq X$ y $f : X \cong Y$. Entonces $x \leq f(x)$, para todo $x \in X$.

Teorema 186 Sean $\langle X, \leq \rangle$ y $\langle X^*, \leq^* \rangle$ buenos órdenes. Si $\langle X, \leq \rangle \cong \langle X', \leq' \rangle$, entonces el isomorfismo es único.

Comentario 187 El que se trate de un buen orden es esencial en este teorema, no bastaría que el orden fuera lineal.

5.3.1. Segmento

Definición 188 Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado y $a \in X$. Llamamos segmento de X determinado por a al conjunto

$$X_a = \{x \in X \mid x < a\}$$

Proposición 189 Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado. No hay ningún isomorfismo de X en un segmento de X

Proposición 190 Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado y sea

$$A = \{X_a \mid a \in X\}$$

Entonces $\langle X, \leq \rangle \cong \langle A, \subseteq \rangle$

5.3.2. Ordinal

Definición 191 Un ordinal es un conjunto bien ordenado $\langle X, \leq \rangle$ tal que $X_a = a$, para todo $a \in X$

Teorema 192 Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado. Entonces las tres condiciones son equivalentes

$$(\forall x, y \in X)(x < y \leftrightarrow X_x \subset X_y \leftrightarrow x \subset y)$$

Teorema 193 Sea X un ordinal. Si $a \in X$, entonces X_a es un ordinal.

Teorema 194 Sea X un ordinal. Sea $Y \subseteq X$. Si Y es un ordinal, entonces $Y = X_a$, para algún $a \in X$.

Teorema 195 Si X e Y son ordinales, entonces $X \cap Y$ es un ordinal.

Teorema 196 Sean X e Y ordinales. Si $X \neq Y$, entonces uno es un segmento del otro.

Teorema 197 Si X e Y son ordinales isomorfos, entonces $X = Y$

Teorema 198 Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado tal que para cada $a \in X$, X_a es isomorfo a un ordinal. Entonces X es isomorfo a un ordinal.

Cada conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.

Comentario 199 Observaciones acerca de los ordinales:

Los Ordinales miden la longitud de los conjuntos bien ordenados

Si $\langle X, \leq \rangle$ es un conjunto bien ordenado, $\text{Ord}(X)$ es el único ordinal isomorfo a X .

Por otra parte, si X e Y son conjuntos bien ordenados,

$$X \cong Y \text{ syss } \text{Ord}(X) = \text{Ord}(Y)$$

Esta unicidad nos permite usar a los ordinales como “vara de medir” conjuntos bien ordenados; es decir, $\text{Ord}(X)$ es la longitud de X .

Inclusión (y pertenencia) bien-ordena a los ordinales

5.4. Teoría axiomática de conjuntos

Recordemos los componentes de una teoría axiomática:

1. El lenguaje o signos formales de la teoría.
2. Los axiomas, que son proposiciones acerca de los objetos de la teoría y que imponen el funcionamiento de dichos objetos.
3. Los teoremas, que son todas las proposiciones demostrables con herramientas lógicas a partir de los axiomas.

En la teoría de conjuntos axiomática de Zermelo-Fraenkel se usará el lenguaje de la lógica de primer orden. Las variables de dicho lenguaje se referirán a conjuntos; es decir, en la interpretación usual todos los objetos serán conjuntos. Es decir, *existir* será sinónimo de *ser un conjunto*. El lenguaje básico sólo tiene el relator binario de pertenencia, pero se extiende, mediante definiciones pertinentes, para dar cabida a operaciones, como vimos anteriormente.

Los conceptos primitivos de esta teoría son el de conjunto y el de pertenencia. En realidad la mayoría de los axiomas sirven para garantizar la existencia de los conjuntos que nos interesa tener. Por ello la idea de *construcción* es esencial en la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel (que notaremos *ZF*).

En la versión axiomática de la teoría de conjuntos se respeta la idea fundamental de aceptar que una colección de objetos pueda ser un conjunto, pero se impone la condición extra de que todos los objetos de una colección deben haberse formado antes de definir dicha colección, y de esta manera se evitarán los problemas que conducían a las paradojas. Uno de los axiomas de la teoría —se verá con detalle más adelante— impondrá esta restricción:

“Si X es un conjunto ya construido, existe un conjunto Y formado por los elementos de X que satisfacen un predicado $\mathcal{P}$ que los describe —o lo que es lo mismo, una fórmula con al menos una variable libre—”.

Así un predicado describirá un conjunto sólo si los objetos han sido ya construidos —son de otro conjunto X — y además satisfacen el predicado.

Añadiendo esta restricción a la definición de conjunto de Cantor desaparece la paradoja de Russell ya que para que

$$U = \{x \mid x \notin x\}$$

sea un conjunto se debería tener previamente el conjunto X a partir del cual se construyese; es decir,

$$U = \{x \in X \mid x \notin x\}$$

¿Cómo se resuelve la paradoja?

Como se requiere partir de un conjunto ya admitido desaparece la contradicción. Ahora, para cualquier B se verifica:

$$B \in U \leftrightarrow (B \in X \wedge B \notin B)$$

En realidad, puesto que la condición $B \notin B$ la cumplen todos, U será el propio X . No estamos así definiendo a la clase universal, es imposible que exista el conjunto de todos los conjuntos; esa colección no tiene cabida aquí.

Los teoremas de ZF se derivan de los axiomas, pero para que tengan un cierto interés deben mediar definiciones de conceptos y operaciones nuevas. Aunque en principio podría usarse un cálculo deductivo de primer orden, en la práctica resulta desaconsejable pues en él cualquier demostración se alargaría en exceso.

Los axiomas de la teoría ZF son propiedades indemostrables, que se aceptan como verdaderas y que tienen por objeto garantizar que en la Jerarquía de Conjuntos ZF todo lo construido sean conjuntos y así evitar las paradojas.

5.4.1. Axiomas de Extensionalidad y de Separación

Axioma 200 (de Extensionalidad):

$$\forall A B (A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B))$$

Este axioma asegura que el signo lógico $=$ para la igualdad de objetos de la teoría coincide con la intuición de que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos³.

Axioma 201 (de Separación): $\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge C(x))$

Expresa que si $C(x)$ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos, con a lo sumo la variable x libre y A es un conjunto, entonces la clase (colección)

$$\{x \mid x \in A \wedge C(x)\}$$

es un conjunto. El axioma de separación —llamado también de los subconjuntos— obliga a que los conjuntos estén formados de elementos de conjuntos ya construidos. Hay que observar que más que un sólo axioma es un esquema de axiomas, pues tenemos uno para cada predicado.

5.4.2. Axiomas del Par, de la Unión y de las Partes

Axioma 202 (del Par)

$$\forall A \forall B \exists C \forall x (x \in C \leftrightarrow x = A \vee x = B)$$

Expresa que si A y B son conjuntos entonces la clase $\{A, B\}$ es un conjunto. En particular, si A es un conjunto entonces la clase $\{A\}$ es un conjunto (por extensionalidad). Este axioma asegura que las colecciones de conjuntos son conjuntos.

³En realidad sólo un sentido de la flecha tiene significado conjuntista: la flecha hacia la derecha es una propiedad de la igualdad, que nada tiene de especial en teoría de conjuntos, comparten todas sus propiedades los objetos iguales; la flecha hacia la izquierda indica algo peculiar de la teoría de conjuntos, que sólo es relevante los individuos que pertenezcan a un determinado conjunto, no las propiedades que les hacen pertenecer a ellos.

Axioma 203 (de la Unión): $\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow \exists y (y \in A \wedge x \in y))$

Expresa que si A es un conjunto la gran unión de A , $\bigcup A$, es un conjunto.

Axioma 204 (de las Partes): $\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq A)$

Si A es un conjunto, entonces las partes de A , $\wp(A)$, es un conjunto.

Teoremas

A partir de los cinco primeros axiomas se obtienen los resultados siguientes que nos garantizan que las clases definidas con anterioridad son conjuntos.

Proposición 205 Si A y B son conjuntos entonces $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\{A, B\}$, $\wp(A)$, $\bigcup A$, $\bigcap A$ son conjuntos.

Demostración. Es consecuencia inmediata de los axiomas. ■

Proposición 206 Si A y B son conjuntos entonces $A \times B$ es un conjunto.

Demostración. Es consecuencia de que

$$A \times B \subseteq \wp(\wp(A \cup B))$$

y de los axiomas de la unión y de las partes. ■

Como consecuencia de la proposición precedente las relaciones obtenidas a partir de productos cartesianos también serán conjuntos.

Lo que no se puede deducir a partir de los axiomas anteriores es que la imagen por una función de un conjunto sea un conjunto. Necesitamos un nuevo axioma para ello.

5.4.3. Axioma de Reemplazamiento

Axioma 207 *Axioma de Reemplazamiento:*

$$\forall x \exists ! y C(x, y) \rightarrow \forall A \exists B \forall y (y \in B \leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge C(x, y)))$$

Expresa que la imagen de un conjunto por una función es un conjunto.

5.5. La Jerarquía de Zermelo

5.5.1. Construcción de la Jerarquía

Ahora podemos presentar con rigor la jerarquía de conjuntos de Zermelo Fraenkel, y responder a las preguntas que nos hicimos cuando hablábamos del *universo matemático* y se proponía la construcción de los conjuntos de la teoría partiendo de una colección inicial $\mathcal{M}_0$ de objetos dados y formando a continuación una colección $\mathcal{M}_1$ de objetos de $\mathcal{M}_0$, después $\mathcal{M}_2$ de objetos de $\mathcal{M}_0$ y de $\mathcal{M}_1$ y así sucesivamente. Una posibilidad sería la siguiente: reunir en el

conjunto $\mathbf{A}$ a todos los objetos que sin ser conjuntos queremos que formen parte de ellos, les llamaremos *átomos*. Y procedemos a construir la jerarquía

$$\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \dots$$

poniendo $\mathcal{M}_0 = \mathbf{A}$; en el nuevo nivel $\mathcal{M}_1$ ponemos además a los conjuntos que se pueden formar con los átomos

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0 \cup \wp(\mathcal{M}_0) = \mathbf{A} \cup \wp(\mathbf{A})$$

El tercer nivel incluye lo anterior y todos los conjuntos de objetos del nivel precedente

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \cup \wp(\mathcal{M}_1)$$

En general

$$\mathcal{M}_{n+1} = \mathcal{M}_n \cup \wp(\mathcal{M}_n)$$

Sin embargo, aún siendo infinita, esta jerarquía no contiene suficientes conjuntos; por ejemplo, aunque $\emptyset \in \mathcal{M}_1$, $\{\emptyset\} \in \mathcal{M}_2$, $\{\{\emptyset\}\} \in \mathcal{M}_3$, no hay ningún conjunto que los reúna a todos,

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$$

por lo que añadimos un nuevo nivel ω

$$\mathcal{M}_\omega = \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \dots$$

La construcción no termina aquí, pues seguimos añadiendo niveles.

Esta es la descripción habitual de la jerarquía de Zermelo, que se representa normalmente como un cono en cuyo eje se sitúan los ordinales (ver figura: 5.1). A mí me gusta representarlos como una escalera interminable en cuya superficie se hallan los ordinales (ver figura: 5.2).

No obstante, podemos simplificar la jerarquía haciendo que el conjunto $\mathbf{A}$ sea $\emptyset$. Perdemos así la posibilidad de formar conjuntos de sillas, o de calcetines, pero en realidad sólo nos interesan los objetos matemáticos y éstos están, como veremos.

1. ¿Cuál será nuestra colección de partida, $\mathcal{M}_0$?

Nuestro origen es $\mathcal{M}_0 = \emptyset$; en el nivel inicial sólo ponemos el conjunto vacío, que denotaremos $\mathcal{V}_0$.

$$\mathcal{V}_0 = \emptyset$$

2. ¿Qué conjuntos de objetos de niveles inferiores se toman para formar nuevos niveles en la jerarquía?

Supóngase que hemos definido ya $\mathcal{V}_\alpha$.

¿Qué conjuntos de miembros de $\mathcal{V}_\alpha$ tomaremos para formar $\mathcal{V}_{\alpha+1}$?

Simplemente consideraremos $\wp(\mathcal{V}_\alpha)$ el conjunto potencia o de las partes

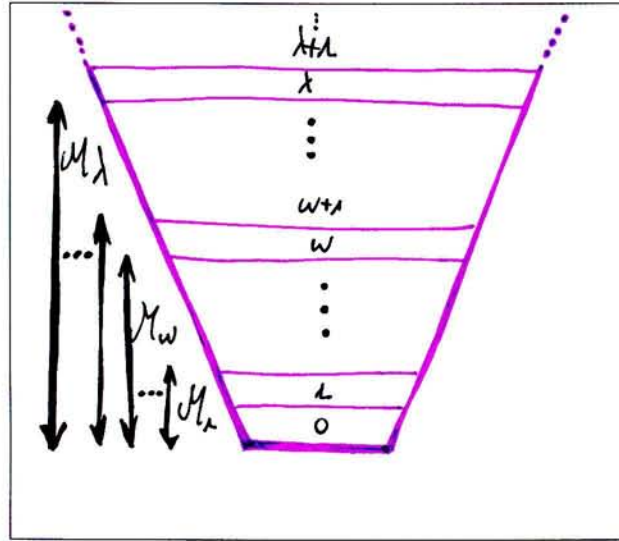


Figura 5.1: Jerarquía con átomos

de $\mathcal{V}_\alpha$, cuyos elementos son los subconjuntos de $\mathcal{V}_\alpha$. Por tanto, dado el nivel $\mathcal{V}_\alpha$ formamos

$$\mathcal{V}_{\alpha+1} = \wp(\mathcal{V}_\alpha)$$

Y cuándo λ es un ordinal límite y hemos definido $\mathcal{V}_\alpha$ para cada $\alpha < \lambda$, definimos

$$\mathcal{V}_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{V}_\alpha$$

Es decir, en estos momentos recopilamos todos los niveles anteriores.

Esta definición por casos —cero, ordinal sucesor y límite— puede comprimirse, para cualquier α

$$\mathcal{V}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \wp(\mathcal{V}_\beta)$$

3. ¿Hasta dónde se extiende esta jerarquía?

La jerarquía de conjuntos no tiene fin; siempre se pueden construir nuevos conjuntos. Para cada ordinal α debe haber un nivel $\mathcal{V}_\alpha$. Sus miembros son conjuntos cuyos elementos están en los niveles previos; en

$$\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{V}_\beta$$

Finalmente, la jerarquía de Zermelo Fraenkel de todos los conjuntos es:

$$\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathcal{V}_\alpha$$

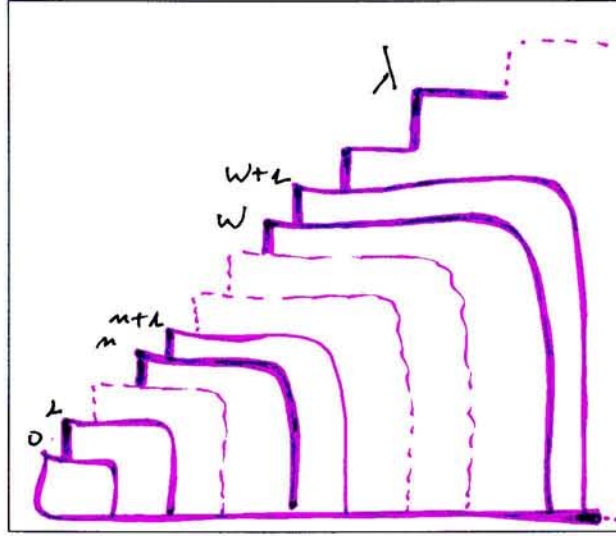


Figura 5.2: Escalera de bloques

Como vemos, la construcción se efectúa de manera muy similar a los $\mathcal{M}_\alpha$; mediante recursión sobre los ordinales formamos la cadena de los distintos niveles

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \dots$$

de la forma arriba indicada: $\mathcal{V}_0 = \emptyset$, $\mathcal{V}_1 = \wp(\mathcal{V}_0) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{V}_2 = \wp(\mathcal{V}_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc.

De hecho, se simplifica algo para los ordinales sucesores, como los números naturales, pues siempre que tengamos un nivel $\mathcal{V}_n$ construiremos el nivel siguiente

$$\mathcal{V}_{n+1} = \wp(\mathcal{V}_n)$$

Y para construir el nivel $\mathcal{V}_\omega$ tomamos la unión infinita de los niveles previos, como en $\mathcal{M}_\omega$

$$\mathcal{V}_\omega = \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \dots$$

y continuamos,

$$\mathcal{V}_{\omega+1} = \wp(\mathcal{V}_\omega)$$

Comentario 208 Si comparamos esta jerarquía con la que admite átomos vemos que esta es más estilizada y su construcción más simple (ver figura: 5.3).

Como se comentó con anterioridad la jerarquía de Zermelo es una buena representación intuitiva de nuestro universo matemático. Sería conveniente que respondiera a todas las expectativas planteadas en apartados precedentes y también, lo cual es extremadamente importante, que el marco axiomático en el que

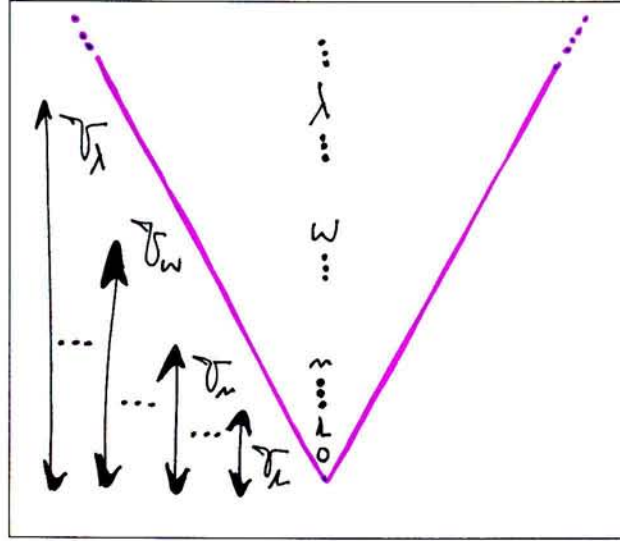


Figura 5.3: Cono de conjuntos

nos movemos; a saber, la teoría de Zermelo Fraenkel, garantizara su construcción. De hecho, se puede ver al revés, se eligieron los axiomas justamente para que nuestra construcción pudiera llevarse a término.

- Se observa en primer lugar que en toda la construcción hay una *operación básica*: formar el conjunto potencia o de las partes de un conjunto $\wp(x)$
- Otra de nuestras preocupaciones era que pudieran construirse *sólo* colecciones matemáticas. Esto está garantizado porque hemos optado por empezar con el $\emptyset$, descartando a los átomos, y formamos el universo

$$\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha \in Ord} \mathcal{V}_\alpha$$

mediante construcciones que no introducen objetos que no sean matemáticos. Sin embargo, $\mathcal{V}$ no es un conjunto.

- Finalmente, *todas* las colecciones matemáticas están, porque tenemos el axioma de separación.

5.5.2. Axiomas involucrados en la construcción de la jerarquía

Hemos ya formulado el axioma de separación y dejaremos para un tratamiento posterior los axiomas de elección y constructibilidad.

¿Cuales son los principios usados en la construcción de la Jerarquía?

Claramente

$$\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha \in Ord} \mathcal{V}_\alpha$$

no es una fórmula del lenguaje de primer orden que estamos usando. En su construcción usamos lo siguiente:

1. Tomamos como operación básica la de partes, $\wp(x)$. El axioma de las partes de un conjunto

$$\forall A \exists B (\forall x (x \in B \leftrightarrow \forall y (y \in x \rightarrow y \in A)))$$

permite formar un nuevo conjunto con todos los subconjuntos de uno dado, A . Este axioma nos permite pasar de $\mathcal{V}_\alpha$ a $\mathcal{V}_{\alpha+1}$, haciendo $\mathcal{V}_{\alpha+1} = \wp(\mathcal{V}_\alpha)$

¿Qué sucede cuando α es un ordinal límite?

2. Debemos poder formar la unión de colecciones de conjuntos. El axioma de la unión,

$$\forall A \exists B (\forall x (x \in B \leftrightarrow \exists y (y \in A \wedge x \in y)))$$

dice que dado un conjunto A hay un conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de A . El axioma de la unión nos permite formar $\mathcal{V}_\alpha$, cuando α es un ordinal límite, haciendo

$$\mathcal{V}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{V}_\beta$$

Es decir, $\mathcal{V}_\alpha = \bigcup \{\mathcal{V}_\beta \mid \beta < \alpha\}$.

Pero, ¿sabemos si $\{\mathcal{V}_\beta \mid \beta < \alpha\}$ es un conjunto?

En realidad, podríamos conseguirlo a partir de $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$ reemplazando cada β por $\mathcal{V}_\beta$. Para ello necesitaríamos contar en la jerarquía de conjuntos con los ordinales y utilizar el axioma del reemplazamiento. Dejemos de momento de lado a los ordinales, supongamos que ya los tenemos.

3. El axioma de reemplazamiento dice que si tenemos una fórmula $C(x, y)$ tal que a cada conjunto a le asigna un único conjunto b tal que $C(a, b)$ entonces, a partir de un conjunto A cualquiera podemos definir otro B en el que los elementos a de A son reemplazados por los b que cumplen $C(a, b)$

$$\forall x \exists! y C(x, y) \rightarrow \forall A \exists B \forall y (y \in B \leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge C(x, y)))$$

Retomemos la cuestión anterior,

¿Qué necesitamos para poder construir los ordinales?

4. En primer lugar, necesitamos el conjunto vacío $\emptyset$. Para ello añadimos el axioma que dice que hay un conjunto que carece de elementos

$$\exists B \forall x (x \notin B)$$

5. También necesitamos el axioma de infinitud, que dice que hay un conjunto que contiene al $\emptyset$ y que es inductivo —está cerrado bajo la operación del siguiente—

$$\exists B(\emptyset \in B \wedge \forall y(y \in B \rightarrow y \cup \{y\} \in B))$$

Los dos últimos axiomas, afirman la existencia de ciertos conjuntos. Esto contrasta con el resto, que proporcionan reglas mediante las cuales se forman conjuntos a partir de conjuntos existentes. (En realidad, el axioma del conjunto vacío no es necesario, pues es demostrable a partir de infinitud y de separación.)

¿Faltan más axiomas?

6. El axioma de extensionalidad, que usábamos desde el principio en la teoría básica, expresa el criterio fundamental de la teoría de conjuntos que dice que identificamos los conjuntos que tienen los mismos elementos. No estamos interesados en los predicados que definen a los conjuntos, sino en los objetos que finalmente caen bajo ellos, los que los cumplen. Sobre todo, el principio de extensionalidad nos permite demostrar la unicidad de los conjuntos cuya existencia garantizan otros axiomas.

¿Hemos expresado ya que el universo de conjuntos está formado exclusivamente por los elementos de los distintos niveles?

$$\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha \in Ord} \mathcal{V}_\alpha$$

En realidad, cuando se tiene el resto de los axiomas mencionados y el axioma de separación, se puede demostrar que el principio así expresado equivale al siguiente

7. *Axioma de fundación.* Dicho principio dice que $\in$ es una relación bien fundada. Lo expresamos así:

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

Añadamos, pues estos axiomas a la lista

Axioma 209 (*conjunto vacío*) $\emptyset. \exists B \forall x(x \notin B)$

Axioma 210 (*de infinitud*) $\exists B(\emptyset \in B \wedge \forall y(y \in B \rightarrow y \cup \{y\} \in B))$

Axioma 211 (*de fundación*) $\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$

5.6. Los Axiomas de Elección y Constructibilidad

Los axiomas presentados anteriormente permiten justificar que todos los elementos utilizados en la construcción de la Jerarquía de Conjuntos de Zermelo

Fraenkel son conjuntos. Esos axiomas y la teoría de conjuntos que se deriva de ellos se conoce como teoría ZF .

Existen extensiones de ZF consistentes en añadirle uno o varios axiomas; sólo nos ocuparemos ahora de las que se obtienen con dos de ellos en particular: el de *elección* y el de *constructibilidad*.

5.6.1. Axioma de elección

Su enunciado es muy sencillo. Sea

$$\mathfrak{B} = \{A_i \mid i \in I\}$$

una colección infinita de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos (ver figura: 5.4)

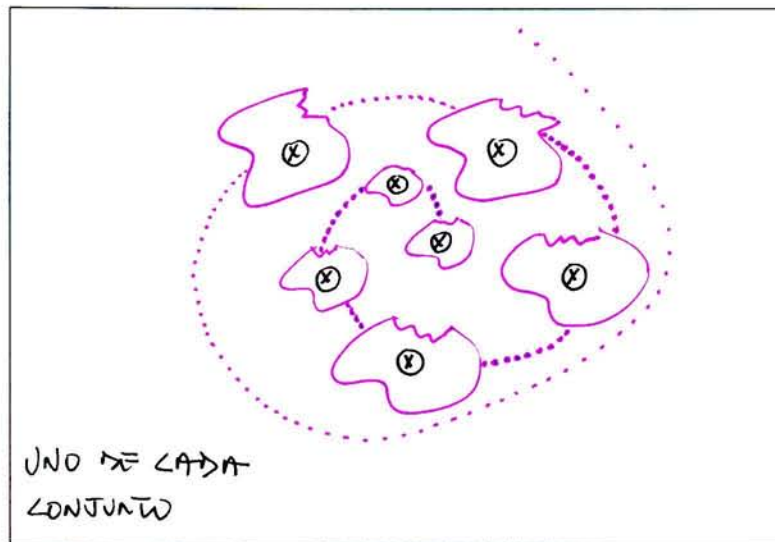


Figura 5.4: *Función de elección*

El axioma establece la existencia de un conjunto que toma un elemento x_i de cada conjunto $A_i \in \mathfrak{B}$. Su formulación podría hacerse así:

Dado un conjunto $\mathfrak{B}$ de conjuntos no vacíos y disjuntos, hay un conjunto que tiene un elemento de cada conjunto de $\mathfrak{B}$

Russell pone el famoso ejemplo de los calcetines: Dada una colección infinita de pares de calcetines, el axioma de elección nos permite elegir uno de cada par. El problema se plantea con los calcetines, pero no con los zapatos, ya que podemos elegir el izquierdo de cada par no necesitando axioma de elección para ello.

¿Por qué un axioma tan sencillo ha originado tanta controversia?

Muy posiblemente se deba a la naturaleza no constructiva del mismo, a que asegura la existencia de un conjunto, pero sin indicar cómo se construye.

La mayor parte de los axiomas hasta ahora introducidos nos indican el modo de formar conjuntos a partir de otros previamente contruidos, mediante operaciones de diversa índole, o porque satisfacen ciertos predicados.

La formulación explícita del axioma de elección se atribuye a Zermelo, aunque Peano ya aludió a él y Cantor lo usó, posiblemente sin advertirlo. En 1904 Zermelo demostró que todo conjunto puede ser bien ordenado usando la denominada *función de elección* que de cada subconjunto de un conjunto cualquiera elige un elemento. Esta versión difiere levemente de la mencionada, pero es equivalente. El principio del buen orden no es nada desdeñable, es fundamental para realizar pruebas por inducción sobre conjuntos de cualquier cardinalidad y equivale o implica muchos principios matemáticos básicos, como veremos más adelante.

Tomemos como axioma la primera de las formulaciones y expresémosla en lógica de primer orden.

Axioma 212 (*de elección*): $\forall A(\emptyset \notin A \wedge \forall xy(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset) \rightarrow \exists B \forall z(z \in A \rightarrow \exists! v(v \in z \cap B)))$

Asegura la existencia de un conjunto B obtenido a partir de una colección cualquiera A de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. De cada conjunto de A elige un único conjunto para poner en B .

Este enunciado no se puede derivar del resto en la teoría ZF , y si queremos asegurar la existencia de las llamadas funciones de elección o de la buena ordenación de cualquier conjunto, debe añadirse. La teoría de conjuntos axiomática resultante se conoce con las siglas ZFC (C del inglés Choice), y es la que en realidad se toma como teoría de Zermelo Fraenkel.

Si ZFC fuera consistente tendría un modelo⁴ y todo lo que se demostrase formalmente en esta teoría sería verdadero en el modelo. Sin embargo, como consecuencia del teorema de Gödel no hay esperanza de poder demostrar la consistencia de la teoría ZFC , ya que para hacerlo tendríamos que efectuar la prueba en una teoría más potente que ZFC , cuya consistencia sería aún más difícil de establecer. Otro de los resultados de Gödel muestra que si ZFC fuera inconsistente también lo sería ZF . Por lo tanto sólo es necesario suponer que ZF es consistente para asegurar también que ZFC lo es.

⁴Nos gustaría que el universo de Zermelo, junto a la relación habitual de pertenencia

$$\mathcal{U} = \langle \mathcal{V}, \in^{\mathcal{U}} \rangle$$

fuera un modelo de la teoría ZF . Sin embargo, para evitar problemas graves de autorreferencia habíamos convenido en exigir que los universos de las estructuras fueran conjuntos y $\mathcal{V}$ no lo es.

Otras formulaciones del axioma de elección

De entre las numerosas formulaciones del axioma de elección, cabe destacar las siguientes:

1. Para cada relación R hay una función f tal que

$$f \subseteq R \text{ y } \text{Dom}(f) = \text{Dom}(R)$$

Esta formulación la usamos para demostrar el criterio de exhaustividad para funciones. A saber, que una función $f : A \rightarrow B$ es exhaustiva si y sólo si hay una función $g : B \rightarrow A$ que compuesta con ella produce la identidad sobre B . Puesto que la función f no tiene porqué ser inyectiva, su recíproca normalmente no será función. Para asegurarnos de que existe g usamos *elección*.

2. El producto cartesiano de conjuntos no vacíos es no vacío.
3. Para cada conjunto A hay una función f —llamada *función de elección*— tal que el dominio de f es el conjunto de los subconjuntos no vacíos de A y tal que $f(B) \in B$ para cada $B \subseteq A$.

La demostración de la equivalencia entre estas formulaciones es fácil, y también lo es que todas se derivan de la que hemos tomado, esto es, el axioma número 212. Veamos, pues, que hay siempre una función de elección, usando para ello el axioma.

Proposición 213 *La formulación precedente se sigue del axioma de elección.*

Demostración. Sea $\mathfrak{B}$ una familia de conjuntos no vacíos

$$\mathfrak{B} = \{X \mid X \in \mathfrak{B}\}$$

Para poder aplicar el axioma de elección necesitaríamos que fueran disjuntos dos a dos, para lo que utilizamos el siguiente truco. Para cada $X \in \mathfrak{B}$ sea S_X el conjunto de pares ordenados $\langle X, a \rangle$ tales que $a \in X$

$$S_X = \{X\} \times X$$

Ahora la colección $\{S_X \mid X \in \mathfrak{B}\}$ está formada por conjuntos no vacíos y disjuntos. Utilizando el axioma elegimos un z_X de cada S_X que será de la forma

$$\langle X, a_X \rangle \text{ con } a_X \in X$$

y sucede para cada $X \in \mathfrak{B}$. Hemos obtenido así una función f que a cada $X \in \mathfrak{B}$ le asigna $f(X) = a_X$ ■

Importancia del Axioma de Elección

La importancia del axioma de elección es tal que la matemática sin él cambia radicalmente. Cito a continuación tres principios que equivalen o se siguen del de elección, para justificar lo que digo.

1. Equivale al principio del buen orden. $\forall A \exists R (R \text{ bien ordena } A)$.
El axioma asegura que es posible definir un buen orden en todo conjunto, y como todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un ordinal, será posible “medir” los conjuntos usando los ordinales.
2. Implica el *Lema de Zorn*: “*Todo conjunto ordenado en el que cada cadena posea cota superior, tiene elemento maximal*”.
3. El Lema de Zorn implica el *Principio de Hausdorff*: “*En todo conjunto ordenado cada cadena puede extenderse a una cadena maximal*”

5.6.2. Axioma de Constructibilidad

Dentro de cualquier posible modelo de Zermelo-Fraenkel

$$\mathcal{U} = \langle \mathcal{V}, \in^{\mathcal{U}} \rangle$$

habría siempre un modelo que normalmente sería más pequeño, formado por su parte constructible. La parte constructible de un modelo de ZF es el menor submodelo de ZF que contiene los números ordinales y que continúa siendo modelo de ZF .

Cuando se definió la jerarquía de conjuntos de Zermelo Fraenkel usamos como noción básica la del conjunto de las partes, o potencia de un conjunto

$$\mathcal{V}_{\alpha+1} = \wp(\mathcal{V}_{\alpha})$$

Sin embargo la noción de subconjunto es poco descriptiva y cuando nos hacemos preguntas tales como “*qué es un subconjunto arbitrario del conjunto de los números naturales*” y cuántos de ellos hay, no es posible responder sin determinar lo que se entiende por subconjunto. Podemos tomar como noción de conjunto la de una colección descriptible por una fórmula expresada en el lenguaje formal de la teoría de conjuntos. De esta manera obtendremos los conjuntos necesarios en matemáticas, excepto quizás los conjuntos “*no-constructibles*” provenientes del axioma de elección.

Por analogía con la jerarquía de Zermelo $\mathcal{V}_{\alpha}$, donde α es un ordinal, daremos una imagen intuitiva de la jerarquía constructible $\mathcal{L}_{\alpha}$. Empezamos como en $\mathcal{V}$ con el conjunto vacío y coincidiendo con los ordinales límite hacemos la recopilación de todo lo anterior tomando la gran unión de todos los niveles ya contruidos. La única diferencia afecta al paso crucial $\alpha + 1$ mientras que en $\mathcal{V}_{\alpha+1}$ tomábamos a todos los subconjuntos de $\mathcal{V}_{\alpha}$, en $\mathcal{L}_{\alpha+1}$ tomamos a una selección de ellos: sólo los subconjuntos definibles de $\mathcal{L}_{\alpha}$. Así se puede redefinir la jerarquía de conjuntos sustituyendo la noción de *conjunto de las partes*

de un conjunto por la de *conjunto descriptible de las partes* de un conjunto. Indicaremos el nivel $\alpha \in Ord$ de la jerarquía por la nueva notación $\mathcal{L}_\alpha$.

Para 0, entonces

$$\mathcal{L}_0 = \emptyset$$

el primer nivel, como en la jerarquía de Zermelo, sólo tiene el vacío.

Para ordinales sucesores

$$\mathcal{L}_{\alpha+1} = PARAM.DEF(\mathcal{L}_\alpha, L^\epsilon)$$

donde $\mathcal{L}_\alpha = \langle \mathcal{L}_\alpha, \in^{\mathcal{U}} \cap (\mathcal{L}_\alpha)^2 \rangle$ y se usa el lenguaje de la teoría de conjuntos L^ϵ . Así pues, tomamos todas las colecciones de elementos de $\mathcal{L}_\alpha$ que son definibles con fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos, admitiéndose usar variables como parámetros.

Y cuando es un ordinal límite, λ

$$\mathcal{L}_\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} \mathcal{L}_\beta$$

Un conjunto $\mathbf{X}$ es *constructible* si hay un α tal que $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_\alpha$. La clase de todos los conjuntos constructibles se denomina *universo constructible* y es denotada por $\mathcal{L}$.

Esto es, la jerarquía constructible de todos los conjuntos es:

$$\mathcal{L} = \bigcup_{\alpha \in Ord} \mathcal{L}_\alpha$$

Si comparamos a $\mathcal{L}$ con la jerarquía de Zermelo vemos que

$$\mathcal{L}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\alpha \text{ para todo } \alpha$$

De hecho, puesto que los conjuntos finitos pueden definirse con facilidad, $\mathcal{L}_n = \mathcal{V}_n$ y por lo tanto $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{V}_\omega$.

Normalmente, sin embargo, $\mathcal{L}_{\omega+1} \neq \mathcal{V}_{\omega+1}$ —porque en $\wp(\omega)$ puede haber una cantidad supernumerable de conjuntos y sólo una cantidad numerable de ellos pueden definirse mediante fórmulas de L^ϵ —. También se ve fácilmente que $\mathcal{L}_\alpha \subseteq \mathcal{L}_\beta$ cuando $\alpha \leq \beta$. Pero si comparamos el ritmo de crecimiento de esta jerarquía con la de Zermelo, el de la constructible es bastante lento.

El *axioma de constructibilidad* equivale a la afirmación de que todo conjunto es constructible. Esto significa que sólo aceptamos como conjuntos a los de esta clase. De manera informal expresamos este axioma así:

Axioma 214 (*de Constructibilidad*) $\mathcal{L} = \mathcal{V}$.

Se demuestra que la teoría ZF más el axioma de Constructibilidad garantiza la definición de todos los niveles de la jerarquía constructible, pero no se sigue de ZF .

La ventaja de añadirlo es que en $ZF + (\mathcal{L} = \mathcal{V})$ podemos definir qué es un subconjunto y efectivamente construir la jerarquía, además en esta teoría el axioma de elección se deriva como teorema.

Teorema 215 *En la teoría $ZF + (\mathcal{L} = \mathcal{V})$, cada conjunto puede ser bien ordenado.*

5.7. Clases y Conjuntos en Gödel-Bernays-Neumann

La única diferencia que representa esta jerarquía respecto de la jerarquía de Zermelo es que *GBN* termina, ya que se añade un nivel superior en donde se aceptan como clases todas las colecciones de conjuntos de $\mathcal{V}$; incluso la clase $\Omega = \text{Ord}$ de los ordinales o la propia $\mathcal{V}$, formada por todos los conjuntos. Estas son lo que se denominan clases últimas en la presentación habitual.

En *GBN* tenemos un axioma de definición de clases sin restricciones. Intuitivamente el axioma dice que toda subcolección de $\mathcal{V}$ se añade a $\mathcal{V}$ para obtener $\mathcal{V}^+$. De esta forma

$$\mathcal{V}^+ = \mathcal{V} \cup \{\{x \in \mathcal{V} / \varphi\} / \varphi \in \text{FORM}(L^\epsilon)\}$$

Comentario 216 *La teoría usualmente tomada como básica es ZFC. Sin embargo es posible obtener muchos resultados matemáticos sólo con ZF. Por otro lado, la teoría de conjuntos constructible puede parecer más natural y algunos matemáticos la adoptan, aunque la jerarquía de conjuntos más aceptada es $\mathcal{V}$ y el axioma de constructibilidad es muy discutido, como lo sigue siendo el de elección en muchos autores.*

Bibliografía

- [1] Alonso, J y otros. [1998]. *Curso práctico de Teoría de Conjuntos*. Ediciones la Ñ. Sevilla.
- [2] Barwise, J. [1977]. *Handbook of Mathematical Logic*. North Holland Publishing Company. Amsterdam. Holanda.
- [3] Devlin, K. (1973) *Aspects of constructibility*. Springer-Verlag. New York.
- [4] Devlin, K. (1993) *The Joy of Sets*. Springer-Verlag. New York.
- [5] Enderton, H. (1977) *Elements of Set Theory*. Academic Press. New York.
- [6] Halmos, P. (1974). *Naive Set Theory*. Springer-Verlag. New York.
- [7] Heijenoort, J. ed. [1967]. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press. Harvard. USA
- [8] Huertas, A y Manzano, M. (2002). *Teoría de Conjuntos*. <http://logicae.usal.es>
- [9] Jech, T. [1985]. *About the Axiom of Choice*. en [2]
- [10] Quine, W. [1969]. *Set Theory and its Logic*. Harvard University Press. Cambridge Massachusetts. USA.
- [11] Rubin, H y Rubin, J. [1963]. *Equivalents of the Axiom of Choice*. North Holland Publishing Company. Amsterdam. Holanda.
- [12] Suppes, P. (1972) *Axiomatic Set Theory*. Dover. New York.

