

CAPÍTULO 7. SISTEMAS DE DEDUCCIÓN NATURAL

Si en lugar de *teoría de las catástrofes* se hubiera llamado *teoría de singularidades*, seguramente su éxito popular hubiera sido menor.

Ll.Santaló, *La matemática: una filosofía y una ciencia*.

SISTEMAS DE DEDUCCIÓN NATURAL CON OPERADOR DE ABSURDO.

En este capítulo se describen y estudian algunas propiedades de sistemas de deducción natural para las lógicas mínima, intuicionista y clásica. El nombre «deducción natural» responde a la intención de Gentzen de capturar la lógica practicada por los matemáticos, en oposición a la lógica axiomática de la matemática. Por consiguiente, la naturalidad de la deducción natural ha de entenderse, en este primer sentido, en contraste con el modo de proceder de los sistemas hilbertianos. Prawitz, sin embargo, considera que la naturalidad de los sistemas de deducción natural consiste en algo más, en que «el contenido lógico esencial de los operadores lógicos intuitivos que pueden formalizarse en los lenguajes considerados, puede ser entendido como un contenido compuesto por las inferencias atómicas (es decir, 'deducciones básicas') aisladas por Gentzen.»[1971, pág.245].¹

Para cada una de las lógicas consideradas se describen dos sistemas deductivos de este tipo, que se diferencian, en primer lugar, por su proleguaje. El proleguaje \mathcal{P}^\perp , descrito en el capítulo 7 (Los cálculos de secuentes SI^\perp y SC^\perp) difiere de \mathcal{P} porque incorpora el operador sentencial ceroario ' \perp ' pero no el operador sentencial unario ' \neg '.² Trabajar con \perp facilita la comparación de los sistemas de deducción natural con los sistemas deductivos ya descritos y que cuentan entre sus operadores con el negador. \mathcal{P}^\perp , por otra parte, permite una aproximación más satisfactoria al teorema de normalización. Por consiguiente, una vez demostrada la equivalencia de ambos sistemas de deducción natural, elegiremos en cada caso el que resulte más ventajoso. Describamos en primer lugar los sistemas de deducción natural mínimo, intuicionista y clásico para el proleguaje \mathcal{P}^\perp .

Lógica mínima (DNM)

$$\begin{array}{l}
 \text{E\&} \quad \frac{A\&B}{A} \quad \frac{A\&B}{B} \quad \text{I\&} \quad \frac{A \quad B}{A\&B} \\
 \\
 \text{IV} \quad \frac{A}{A\vee B} \quad \frac{B}{A\vee B} \quad \text{EV} \quad \frac{\begin{array}{l} \boxed{A} \\ \boxed{B} \\ \boxed{C} \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{B} \\ \boxed{C} \end{array}}{C} \\
 \\
 \text{I}\rightarrow \quad \frac{\begin{array}{l} \boxed{A} \\ \boxed{B} \end{array}}{A\rightarrow B} \quad \text{E}\rightarrow \quad \frac{A \quad A\rightarrow B}{B}
 \end{array}$$

¹ Sobre la pretendida naturalidad del método de deducción natural puede consultarse L. Vega, *El análisis lógico: nociones y problemas*, II, Madrid, UNED, 1987, pp.46-49 y 57-59.

² Del operador \perp se trata también en el capítulo 6, epígrafe **Teorema de interpolación**.

$$\begin{array}{l}
 I\exists \quad \frac{A[t]}{(\exists v)A(v)} \qquad E\exists^* \quad \frac{(\exists v)A \quad \begin{array}{l} \boxed{A[v]} \\ \boxed{B} \end{array}}{B} \\
 E\forall \quad \frac{(\forall v)A[v]}{A[t]} \qquad I\forall^{**} \quad \frac{A}{(\forall v)A}
 \end{array}$$

* Restricción: 'v' no está libre en las premisas ni en B ni en supuestos previos no cancelados.

** Restricción: 'v' no está libre en las premisas ni en supuestos previos no cancelados

Lógica intuicionista (DNI).

DNM +

$$E\perp \quad \frac{\perp}{A}$$

Lógica clásica (DNC).

DNI +

$$TE \quad A \vee (A \rightarrow \perp)$$

o también,

DNI +

$$DN \quad \frac{((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)}{A}$$

OBSERVACIONES.-

[1] Un sistema de deducción natural DNS da una definición recursiva de una relación de derivabilidad, o si se prefiere de «derivación en DNS».

[2] De acuerdo con la presentación elegida, una derivación en DNS (=DNM,DNI,DNC) es un árbol (invertido) finito de fórmulas, en el que cada fórmula es o un supuesto (una premisa o un supuesto provisional) o resulta de la aplicación a las fórmulas que le preceden de una de las reglas enunciadas.

[3] No obstante, por razones de economía, en ocasiones adoptaremos una presentación secuencial de las derivaciones. Para ello basta con reescribir las reglas con más de una premisa como se indica acto seguido:

$$\begin{array}{l}
 I\& \quad \frac{A \quad B}{A\&B} \qquad E\& \quad \frac{A \quad B}{A} \qquad E\rightarrow \quad \frac{A \quad A\rightarrow B}{B} \qquad I\rightarrow \quad \frac{A \quad A\rightarrow B}{A} \\
 E\exists \quad \frac{(\exists v)A \quad \begin{array}{l} \boxed{A[v]} \\ \boxed{C} \end{array}}{C} \qquad E\vee \quad \frac{A\vee B \quad \begin{array}{l} \boxed{A} \\ \boxed{C} \\ \boxed{B} \\ \boxed{C} \end{array}}{C}
 \end{array}$$

Restricción: 'v' no está libre en las premisas ni en B ni en supuestos previos no cancelados.

\lceil 1. $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow (B \rightarrow \perp))$
 \lceil 2. $A \rightarrow B$ E&1
 \lceil 3. A
 \lceil 4. B E \rightarrow 2,3
 \lceil 5. $A \rightarrow (B \rightarrow \perp)$ E&1
 \lceil 6. $B \rightarrow \perp$ E \rightarrow 3,5
 \lceil 7. \perp E \rightarrow 4,6
 \lceil 8. $A \rightarrow \perp$ I \rightarrow 3-7
 9. $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow (A \rightarrow \perp)$ I \rightarrow 1-8

2. $(\exists x)((\forall y)(Px \& Qy \rightarrow Rxy) \& (\forall z)(Rzx)) \vdash_{\text{DNM}} (\exists x)(\forall y)(Px \wedge Qy \supset Rxy \wedge Ryx)$

1. $(\exists x)((\forall y)(Px \& Qy \rightarrow Rxy) \& (\forall z)(Rzx))$
 \lceil 2. $(\forall y)(Px \& Qy \rightarrow Rxy) \& (\forall z)(Rzx)$
 \lceil 3. $(\forall y)(Px \& Qy \rightarrow Rxy)$ E&2
 \lceil 4. $Px \& Qa \rightarrow Rxa$ E \forall ,3
 \lceil 5. $Px \& Qa$
 \lceil 6. Rxa E \rightarrow 4,5
 \lceil 7. $(\forall z)(Rzx)$ E&2
 \lceil 8. Rax E \forall ,7
 \lceil 9. $Rxa \& Rax$ I&6,8
 \lceil 10. $Px \& Qa \rightarrow Rxa \& Rax$ I \rightarrow 5-10
 \lceil 11. $(\forall y)(Px \wedge Qy \supset Rxy \wedge Ryx)$ I \forall ,10
 \lceil 12. $(\exists x)(\forall y)(Px \wedge Qy \supset Rxy \wedge Ryx)$ I \exists ,11
 13. $(\exists x)(\forall y)(Px \wedge Qy \supset Rxy \wedge Ryx)$ E \exists ,1,2-12

3. $\vdash_{\text{DNM}} A \& (A \rightarrow \perp) \rightarrow (B \rightarrow \perp)$

\lceil 1. $A \& (A \rightarrow \perp)$
 \lceil 2. A E&1
 \lceil 3. $A \rightarrow \perp$ E&1
 \lceil 4. B
 \lceil 5. \perp E \rightarrow 2,3
 \lceil 6. $B \rightarrow \perp$ I \rightarrow 4-5
 7. $A \& (A \rightarrow \perp) \rightarrow (B \rightarrow \perp)$ I \rightarrow 1-6

4. $\vdash_{\text{DNI}} (A \rightarrow (A \rightarrow \perp)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

\lceil 1. $A \rightarrow (A \rightarrow \perp)$
 \lceil 2. A
 \lceil 3. $A \rightarrow \perp$ E \rightarrow 1,2
 \lceil 4. \perp E \rightarrow 2,3
 \lceil 5. B E \perp ,4
 \lceil 6. $A \rightarrow B$ I \rightarrow 2-5
 7. $(A \rightarrow (A \rightarrow \perp)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ I \rightarrow 1-6

DERIVACIONES EN $DN\bar{\neg}$. EJEMPLOS.

1. $\vdash_{DNM} \neg(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$
 \lrcorner 1. $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \neg B)$
 \lrcorner | 2. $A \rightarrow B$ E&1
 \lrcorner | | \lrcorner 3. A
 \lrcorner | | | 4. B E \rightarrow 2,3
 \lrcorner | | | 5. $A \rightarrow \neg B$ E&1
 \lrcorner | | | 6. $\neg B$ E \rightarrow 3,5
 \lrcorner | | \lrcorner 7. $B \& \neg B$ I&4,6
 \lrcorner | 8. $\neg A$ I \neg ,3-7
9. $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ I \rightarrow ,1-8

2. $\vdash_{DNM} \neg A \rightarrow \neg \neg A$
 \lrcorner | 1. A
 \lrcorner | | \lrcorner 2. $\neg A$
 \lrcorner | | \lrcorner 3. $A \& \neg A$ (I&,1,2)
 \lrcorner | 4. $\neg \neg A$ I \neg 2-3
5. $A \rightarrow \neg \neg A$ I \rightarrow ,4

3. $\vdash_{DNI} \neg \neg (A \vee \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
 \lrcorner | 1. $\neg (A \vee \neg A)$
 \lrcorner | | \lrcorner 2. A
 \lrcorner | | | 3. $A \vee \neg A$ Iv,2
 \lrcorner | | | 4. $(A \vee \neg A) \& \neg (A \vee \neg A)$ I&,1,3
 \lrcorner | | \lrcorner 5. B Ei \neg ,4
 \lrcorner | 6. $A \rightarrow B$ I \rightarrow ,2-5
7. $\neg (A \vee \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ I \rightarrow ,1-6

4. $\vdash_{DNC} A \vee \neg A$
 \lrcorner | 1. $\neg (A \vee \neg A)$
 \lrcorner | | \lrcorner 2. A
 \lrcorner | | | 3. $A \vee \neg A$ Iv,2
 \lrcorner | | | 4. $(A \vee \neg A) \& \neg (A \vee \neg A)$ I&,1,3
 \lrcorner | | 5. $\neg A$ I \neg ,2-4
 \lrcorner | | 6. $A \vee \neg A$ Iv,5
 \lrcorner | 7. $(A \vee \neg A) \& \neg (A \vee \neg A)$ I&,1,6
 \lrcorner | | 8. $\neg \neg (A \vee \neg A)$ I \neg ,1-7
 \lrcorner | | 9. $A \vee \neg A$ E \neg

Una ocurrencia de una fórmula A en una derivación π es *máxima* si aparece en π como resultado de la aplicación de la regla de introducción de su símbolo lógico principal y sirve como premisa (mayor) en la aplicación de la regla de eliminación de su símbolo lógico principal. Una derivación es *normal* si no contiene ocurrencias máximas de fórmulas. Advértase que en la demostración 4 inmediatamente anterior, hay una ocurrencia máxima de la fórmula $\neg \neg (A \vee \neg A)$ y que entonces no es una derivación normal. ¿Puede encontrarse una derivación normal de $A \vee \neg A$ en $DNC\bar{\neg}$? Nótese asimismo que la derivación correspondiente en DNC consta de una única fórmula, $A \vee (A \rightarrow \neg A)$, justificada por TE

INTERDEFINICIÓN DEL OPERADOR DE ABSURDO Y EL NEGADOR.

En cualquier caso, los DNS y los DNS^\neg son deductivamente equivalentes en el sentido que se precisa a continuación. Sea B una fórmula de \mathcal{P} y $t_B: F' \rightarrow F$, donde F' es el conjunto de fórmulas de \mathcal{P}^\perp y F es el conjunto de fórmulas de \mathcal{P} , tal que

- (1) $t_B(p) = p$,
- (2) $t_B(\perp) = B \& \neg B$,
- (3) $t_B(A \& C) = t_B(A) \& t_B(C)$,
- (4) $t_B(A \vee C) = t_B(A) \vee t_B(C)$,
- (5) $t_B(A \rightarrow C) = t_B(A) \rightarrow t_B(C)$,
- (6) $t_B(\exists v A) = (\exists v) t_B(A)$, y
- (7) $t_B(\forall v A) = (\forall v) t_B(A)$.

LEMA 21. Para cualesquiera $B \in F'$, $X \cup \{A\} \subseteq F$, si A es derivable en DNS a partir de X entonces $t_B(A)$ es derivable a partir de $t_B(X)$ en DNS^\neg .

DEMOSTRACIÓN. Basta con mostrar que si R es una regla de DNS con A como conclusión, $t_B(A)$ es derivable en DNS^\neg de las imágenes bajo t_B de las premisas de R , algo que no presenta, en general, dificultades a la vista de la definición de t_B . Los únicos casos no completamente triviales son los de $[E\perp]$ y $[TE]$. Con respecto a $[E\perp]$, la traducción da como resultado:

$$\frac{B \& \neg B}{A}$$

es decir, la regla $[E^\neg]$. En cuanto al axioma de *tercio excluso*, la traducción es $t_B(A) \vee (t_B(A) \rightarrow B \& \neg B)$. Adaptando la definición precedente de $A \vee \neg A$, se llega a

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t_B(A) \vee \neg t_B(A) \\ \begin{array}{l} \boxed{} \\ \boxed{} \end{array} \begin{array}{l} t_B(A) \\ t_B(A) \vee \end{array} \quad \text{Iv} \\ t_B(A) \rightarrow B \& \neg B \\ \begin{array}{l} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{array} \begin{array}{l} \neg t_B(A) \\ t_B(A) \\ \neg(B \& \neg B) \end{array} \\ \begin{array}{l} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{array} \begin{array}{l} t_B(A) \& \neg t_B(A) \\ \neg \neg(B \& \neg B) \\ B \& \neg B \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{I\&} \\ \text{I}^\neg \\ \text{E}^{\epsilon \neg} \end{array} \\ \boxed{} \begin{array}{l} t_B(A) \rightarrow B \& \neg B \\ t_B(A) \vee \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{I} \rightarrow \\ \text{Iv} \end{array} \\ (t_B(A) \rightarrow B \& \neg B) \\ \boxed{} \begin{array}{l} t_B(A) \vee (t_B(A) \rightarrow B \& \neg B) \end{array} \quad \text{Ev} \end{array}$$

Para recorrer el camino inverso, de DNS a DNS^\neg sea $t: F \rightarrow F'$ tal que

- (1) $t(p) = p$,
- (2) $t(\neg A) = t(A) \rightarrow \perp$,
- (3) $t(A \& B) = t(A) \& t(B)$,
- (4) $t(A \vee B) = t(A) \vee t(B)$,
- (5) $t(A \rightarrow B) = t(A) \rightarrow t(B)$,
- (6) $t(\exists v A) = (\exists v) t(A)$, y
- (7) $t(\forall v A) = (\forall v) t(A)$.

†

LEMA 22. Para cualquier $X \cup \{A\} \subseteq F$, si A es derivable en DNS^\neg a partir de X entonces $t(A)$ es derivable a partir de $t(X)$ en DNS .

DEMOSTRACIÓN. Consiste, básicamente, en repetir el proceso de la demostración del lema 18, invirtiendo la dirección. Considérese la regla $[I^\neg]$; hay que demostrar que si $t(B \& \neg B) = t(B) \& (t(B) \rightarrow \perp)$ es derivable de $t(A)$ entonces $T(A) \rightarrow \perp$ es derivable.

┌	tA	
	.	}
	.	
	.	hipótesis
	$tB \& (tB \rightarrow \perp)$	
	tB	$E\&$
	$tB \rightarrow \perp$	$E\&$
└	\perp	$E\rightarrow$
	$tA \rightarrow \perp$	$I\rightarrow$

Para la regla intuicionista de eliminación del negador, se tiene:

$tB \& (tB \rightarrow \perp)$	
tB	$E\&$
$tB \rightarrow \perp$	$E\&$
\perp	$E\rightarrow$
tA	$E\perp$

Para la regla clásica de eliminación del negador, a su vez, se tiene:

$(tA \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$		
$tA \vee (tA \rightarrow \perp)$	TE	
┌	tA	
└	$tA \rightarrow \perp$	
	\perp	$E\rightarrow$
└	tA	$E\perp$
	tA	$E\vee$

Por otra parte, para cualquiera de los sistemas considerados (mínimo, intuicionista, clásico) $\neg A$ y $A \rightarrow \neg B \& \neg \neg B$ son deductivamente equivalentes, para cualquier fórmula B . └

1. $A \rightarrow \neg B \& \neg \neg B$		
┌	2. A	
└	3. $\neg B \& \neg \neg B$	$E\rightarrow 1,2$
4. $\neg A$	$I\neg 2-3$	

DEDUCCIÓN NATURAL vs. CÁLCULO DE SECUENTES.

El principio general que determina la correspondencia entre las reglas de los cálculos secuenciales y las de los sistemas de deducción natural puede formularse como sigue:

- a una demostración π de un secunte $X \Vdash A$ en SS le corresponde una derivación λ de A a partir de X en DNS ;
- a una demostración π de un secunte $X \Vdash \neg A$ en SS le corresponde una derivación λ de $\neg A \& \neg \neg A$ a partir de X en DNS ;

SISTEMAS DE DEDUCCIÓN NATURAL

- a una demostración π de un seciente $X \Vdash A_1, \dots, A_n$, $n > 1$, en SC le corresponde una derivación λ de $A_1 \vee \dots \vee A_n$ a partir de X en DNC.

Desde esta perspectiva, la deducción natural difiere del cálculo de secientes porque la simetría antecedente-consecuente de éste (en ambos casos se trata de conjuntos de fórmulas) es reemplazada por la asimetría premisas-conclusión de aquél (conjunto de premisas-fórmula conclusión). Esto tiene algunas consecuencias dignas de mención. Entre otras:

[1] En una derivación en DN siempre puede determinarse cuál fué la última regla aplicada, algo que no sucede cuando se admiten múltiples conclusiones.

[2] La unicidad de las conclusiones en DN es la responsable del feo aspecto de las reglas [Ev] y [E \exists]. Su fealdad proviene de la presencia de una fórmula C sin vínculos estructurales con la fórmula eliminada. En realidad lo natural sería disponer de una regla de eliminación de la disyunción como

$$\frac{A \vee B}{A \quad B}$$

con dos conclusiones.

La correspondencia entre secientes demostrables y derivaciones en deducción natural permite establecer una correspondencia más detallada entre reglas de uno y otro sistema deductivo.

1. REGLAS OPERACIONALES.

1.1 Las reglas de introducción en el consecuente se corresponden de manera casi inmediata con las reglas de introducción de los DNS.

En el caso de $\Vdash \&$ hay que mostrar que si $X \vdash_{\text{DNS}} A$ y $X \vdash_{\text{DNS}} B$ entonces $X \vdash_{\text{DNS}} A \& B$. La derivación correspondiente puede visualizarse entonces así:

$$\begin{array}{l} X \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B \\ A \& B \quad I\& \end{array}$$

En el caso de $\Vdash \neg$ hay que mostrar, en el caso más simple, que si $X, A \vdash_{\text{DNS}} \neg B \& \neg \neg B$ entonces $X \vdash_{\text{DNS}} \neg A$. La derivación correspondiente es:

$$\begin{array}{l} X \\ \lceil A \\ \lceil \cdot \\ \lceil \cdot \\ \lceil \cdot \\ \lceil \neg B \& \neg \neg B \\ \neg A \quad I\neg \end{array}$$

Y así sucesivamente.

1.2 Las reglas de introducción en el antecedente se corresponden, de manera menos directa que en el caso precedente, con las reglas de eliminación. Consideremos un par de ejemplos. La regla $[\exists I]$ requiere mostrar que si $X, A \Vdash_{\text{DNS}} B$ y v no está libre ni en B ni en las fórmulas de X entonces $X, (\exists v)A$. La solución es:

$$\begin{array}{l} X \\ (\exists v)A \\ \left[\begin{array}{l} A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B \end{array} \right. \\ B \quad E\exists \end{array}$$

En el caso de $[\rightarrow I]$, hay que establecer que si $X \vdash_{\text{DNS}} A$ y $Y, B \vdash_{\text{DNS}} C$ entonces $X, Y, A \rightarrow B \vdash_{\text{DNS}} C$. La derivación pertinente es, esquemáticamente, como sigue:

$$\begin{array}{l} X \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A \\ A \rightarrow B \quad \text{premisa} \\ B \quad E \rightarrow \\ Y \quad \text{premisas} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C \end{array}$$

2. REGLAS ESTRUCTURALES.

2.1 Las reglas de datos no se corresponden, obviamente, con ninguna regla de deducción natural. Sucede más bien que su contenido está diluido en el conjunto de las reglas de eliminación/introducción. Una regla como $[P]$ encuentra su homólogo en la duplicidad de formas de las reglas de deducción natural con dos premisas: en ambos casos se expresa que el orden de las premisas es irrelevante.

2.2 El caso de la regla de Corte ofrece mayor interés y se trata con algún detalle en el epígrafe siguiente. Esta regla, traducida a deducción natural, dice que si hay una derivación de A a partir de X y una derivación de B a partir de $Y \cup \{A\}$, entonces hay una derivación de B a partir de $X \cup Y$. Esta derivación en DNS resulta de combinar las dos anteriores:

$$\begin{array}{l} X \quad \text{premisas} \\ \cdot \quad \text{hipótesis 1ª} \\ \cdot \\ \cdot \\ A \\ Y \quad \text{premisas} \\ \cdot \quad \text{hipótesis 2ª} \\ \cdot \\ \cdot \\ B \end{array}$$

Esto, desde luego, no es particularmente excitante. Adviértase, sin embargo, que A aparece, en primer lugar, como una conclusión extraída de X y por consiguiente como el resultado de aplicar la regla de

SISTEMAS DE DEDUCCIÓN NATURAL

introducción de su símbolo lógico principal. A continuación, junto con fórmulas de Y, sirve como premisa en la ulterior derivación de B, y por tanto como premisa en la eliminación de su símbolo lógico principal. La fórmula A se comporta entonces como una fórmula máxima en la derivación que se acaba de esquematizar. De esta manera, el teorema de eliminación de Corte de los sistemas de cálculo de secuentes se transmuta al pasar a los sistemas de deducción natural en un teorema de eliminación de (ocurrencias de) fórmulas máximas, o, si se prefiere, en un teorema de normalización.

Antes de ocuparnos del teorema de normalización, vamos a establecer la equivalencia de los DNS y los SS.

TEOREMA 29. Si $X \Vdash Y$ es demostrable en SS (=SM-, SI-, SC-) entonces $X \vdash_{DNS} \neg \vee Y$ ($DNS^- = DNM^-, DNI^-, DNC^-$, respectivamente) donde $\vee Y$ es la disyunción de las fórmulas de Y si $Y \neq \emptyset$, y $\neg B \& \neg \neg B$, para cualquier fórmula B, si $Y = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre la longitud de la demostración π de $X \Vdash Y$ en SS. Si π es $A \Vdash A$, la derivación correspondiente en DNS^- es A. Los casos de las reglas estructurales son inmediatos, excepto $\Vdash D$. En su versión intuicionista,

$$\frac{X \Vdash}{X \Vdash A},$$

la hipótesis de inducción proporciona una derivación λ de $\neg B \& \neg \neg B$ a partir de X en DNI^- ; aplicando E_i^- a $\neg B \& \neg \neg B$ para obtener A se obtiene la derivación apetecida. Para su versión clásica,

$$\frac{\frac{X \Vdash Y}{X \Vdash A}, Y}{Y}$$

la hipótesis de inducción proporciona una derivación λ de $\vee Y$ a partir de X en DNC^- ; I_v permite obtener entonces $A_v(\vee Y)$.

Vayamos con las reglas operacionales. Ya se ha señalado que las reglas secuenciales de introducción por la derecha se corresponden directamente con las reglas de introducción de deducción natural. Cuando, en el caso de la lógica clásica, no se supone que los consecuentes de los secuentes involucrados consten de una única fórmula, la cuestión se ve complicada por la necesidad de apelar a las reglas del disyuntor (para pasar de una relación en $Sb(F)_2$ a una relación en $Sb(F) \times F$). En concreto, en el caso de $\Vdash \&$, conviniendo en representar con $\vee Y$ la disyunción de las fórmulas de Y, se tiene:

	X
Hipót.inducción	$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right.$
	A v vY
hipót..inducción	$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right.$
	B v vY
I&	$\begin{array}{l} \ulcorner A \\ \lceil B \\ \lceil \lceil A \& B \end{array}$
IV	$\lceil \lceil (A \& B) v vY$
	$\lceil \lceil vY$
IV	$\lceil \lceil (A \& B) v vY$
EV	$\lceil (A \& B) v vY$
	$\ulcorner vY$
IV	$\lceil (A \& B) v vY$
EV	$(A \& B) v vY$

Las reglas de introducción por la izquierda se corresponden con las reglas de eliminación. Para $[\&\Vdash]$, por ejemplo, el razonamiento es el siguiente:

$$\begin{array}{l}
 X \\
 A\&B \\
 A \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \vee Y
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \} \\
 \} \\
 \} \\
 \} \\
 \} \\
 \} \\
 \}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Premisas} \\
 \\
 \text{E\&} \\
 \\
 \text{Hipót. inducción} \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}$$

⊢

Este teorema, junto con la definición de derivabilidad del cálculo secuencial, da como resultado:

COROLARIO 14. Si $X \vdash_{SS} A$ entonces $X \vdash_{DNS} A$.

TEOREMA 30. Si $X \vdash_{DNS} A$ entonces $X \Vdash A$ es demostrable en SS.

DEMOSTRACIÓN. La clave, de nuevo, es la correspondencia reglas de introducción/reglas de introducción en el consecuente y reglas de eliminación/reglas de introducción en el antecedente. En el primer caso la correspondencia es inmediata. Veamos un par de ejemplos.

$$\begin{array}{l}
 \text{I\&} \quad \frac{X \Vdash A \quad X \Vdash B}{X \Vdash A\&B} \quad \begin{array}{l} \text{hipótesis} \\ \Vdash\& \end{array} \\
 \\
 \text{I}\rightarrow \quad \frac{X, A \Vdash B}{X \Vdash A\rightarrow B} \quad \begin{array}{l} \text{hipótesis} \\ [\Vdash\rightarrow] \end{array} \\
 \\
 \text{I}\forall \quad \frac{X \Vdash A}{X \Vdash (\forall v)A} \quad \begin{array}{l} \text{hipótesis} \\ [\Vdash\forall] \end{array} \\
 \text{(donde } v \text{ no está libre en } X\text{).}
 \end{array}$$

La correspondencia reglas de eliminación/reglas de introducción en el antecedente es, como ya se ha señalado, menos directa. Para E&, por ejemplo, la hipótesis de inducción garantiza la demostrabilidad en SS de $X \Vdash A\&B$. La demostrabilidad de $X \Vdash A$ puede establecerse usando, además de $[\&\Vdash]$, la regla de Corte, apelando después a la eliminabilidad de la regla de Corte (Corolario 5) para establecer la existencia de una demostración en SS (por tanto de una demostración sin Corte). En concreto,

$$\begin{array}{l}
 \text{hipótesis} \quad \frac{X \Vdash A\&B}{X \Vdash A} \quad \begin{array}{l} \frac{A \Vdash A}{X, A \Vdash A} \text{ Axioma} \\ \frac{X, A \Vdash A}{X, A\&B \Vdash A} \text{ D}\Vdash \\ \frac{X, A\&B \Vdash A}{X \Vdash A} \text{ \&}\Vdash \\ \text{Corte} \end{array}
 \end{array}$$

Otro caso semejante es el de la regla de eliminación del condicional. Por hipótesis de inducción $X \Vdash A\rightarrow B$ y $X \Vdash A$ son demostrables en SS, y entonces por el lema 3 lo es $X, A \Vdash B$. Una aplicación de Corte permite obtener una primera demostración de $X \Vdash B$; por el corolario 5 hay una demostración de $X \Vdash B$ en SS.

⊢

TEOREMA DE FORMA NORMAL.

Hablando con propiedad lo que se demuestra en esta sección no es un teorema de normalización para DNS sino un teorema de forma normal. Una derivación en DNS es normal si no contiene ocurrencias máximas de fórmulas. Recuérdese que una ocurrencia de una fórmula A en una derivación π

SISTEMAS DE DEDUCCIÓN NATURAL

es *máxima* si aparece en π como resultado de la aplicación de la regla de introducción de su símbolo lógico principal y sirve como premisa (mayor) en la aplicación de la regla de eliminación de su símbolo lógico principal. La distinción teoremas de forma normal vs. teoremas de normalización se debe a Kreisel. Un *teorema de forma normal* para DNS es un teorema que enuncia que si hay una derivación en DNS de A a partir de X entonces hay una derivación normal de A a partir de X. Un *teorema de normalización*, por su parte, afirma la existencia de un método efectivo para transformar cualquier derivación de A a partir de X en DNS en una derivación normal. Por consiguiente, un teorema de normalización -a diferencia de un teorema de forma normal- relaciona cada derivación en DNS con la forma normal correspondiente.

A su vez, pueden distinguirse dos variantes de la normalización: *débil*, dada una derivación π en DNS, hay una secuencia de reducción (especificada por un procedimiento efectivo) $\pi \Rightarrow \pi_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \pi_n$ tal que π_n es normal, y *fuerte*, toda secuencia de reducción que comience por π es finita.

El teorema de forma normal que se quiere demostrar es un teorema de eliminación de ocurrencias máximas de fórmulas, como ya se ha dicho. Un *corte* en una derivación en DNS consiste en la aplicación consecutiva de una regla de introducción y de una regla de eliminación de un mismo símbolo lógico, de manera que la conclusión de la primera sirve como premisa mayor para la aplicación de la segunda. La fórmula en cuestión es por tanto una fórmula máxima. Por ejemplo, las líneas 8 y 9 de la derivación siguiente en DNC^{\neg} constituyen un corte:

1.	$\neg(A \vee \neg A)$	
2.	A	
3.	$A \vee \neg A$	I \vee ,2
4.	$(A \vee \neg A) \& \neg(A \vee \neg A)$	I $\&$,1,3
5.	$\neg A$	I \neg ,2-4
6.	$A \vee \neg A$	I \vee ,5
7.	$(A \vee \neg A) \& \neg(A \vee \neg A)$	I $\&$,1,6
8.	$\neg \neg(A \vee \neg A)$	I \neg ,1-7
9.	$A \vee \neg A$	E C^{\neg} ,8

La experiencia del teorema de eliminación de Corte sugiere una demostración del teorema de forma normal por inducción sobre el grado de la derivación. Para ello se identificaría el grado de un corte con la complejidad + 1 de su fórmula máxima y el grado de la derivación con el mayor de los grados de sus cortes. Sin embargo, este intento tropieza con las deficiencias ya apuntadas de las reglas $E\vee$ y $E\exists$. Sea π una derivación en DNS con un corte de la forma

A	
A \vee B	IV
┌ A	} λ
└ C	
┌ B	
└ C	
C	EV

Este corte puede eliminarse, reemplazando el fragmento de π descrito por la subderivación λ , pero entra dentro de lo posible que al eliminar la fórmula máxima $A \vee B$ del modo indicado C se convierte en una ocurrencia máxima. La dificultad estriba en que la complejidad de C no guarda relación con la complejidad de $A \vee B$, de manera que puede suceder que $c(C) > c(A \vee B)$.

Un ejemplo ayudará a entenderlo mejor. Considérese la siguiente derivación de t a partir de $\{p, p \rightarrow q, r \rightarrow \neg s, q \rightarrow t, \neg s \rightarrow t\}$, evidentemente no normal (el asterisco indica las ocurrencias máximas de fórmulas):

1. p	Premisa
2. pvr	Iv,1
┌ 3. p	
4. p→q	Premisa
5. q	E→3,4
└ 6. qv¬s	Iv,5
┌ 7. r	
8. r→¬s	Premisa
9. ¬s	E→7,8
└ 10. qv¬s	Iv,9
11. qv¬s	Ev2,3-6,7-10
┌ 12. q	
13. q→t	Premisa
└ 14. t	E→12,13
┌ 15. ¬s	
16. ¬s→t	Premisa
└ 17. t	E→15,16
18. t	Ev11,12-14,15-17

Si se intenta eliminar la fórmula máxima 'pvr' procediendo como se ha indicado en el párrafo anterior, se obtiene la derivación:

1. p	Premisa
2. p→q	Premisa
3. q	E→3,4
4. qv¬s	Iv,5
┌ 5. q	
6. q→t	Premisa
└ 7. t	E→12,13
┌ 8. ¬s	
9. ¬s→t	Premisa
└ 10. t	E→15,16
11. t	Ev4,5-7,8-10

Esta segunda derivación tampoco es normal y además sucede que $c(pvq) < c(qv¬s)$ -i.e., el grado lógico de la fórmula máxima de la primera derivación es menor que el grado de la fórmula máxima de la segunda.

Una primera y drástica solución es limitarse al fragmento $\{\perp, \&, \rightarrow, \forall\}$ de \mathcal{P}^\perp , evitando así las reglas de eliminación del disyuntor y del cuantificador existencial. Si DNS^* es la restricción de DNS a ese fragmento, entonces:

LEMA 23. Si π es una derivación en DNS^* de A a partir de X que termina con un corte de grado n y el resto de los cortes de π son de grado $<n$ entonces existe una derivación en DNS^* de A a partir de X con grado $<n$.

DEMOSTRACIÓN. Según la hipótesis del lema π es de la forma

·	}λ
·	
·	
B	[I#]
A	[E#]

SISTEMAS DE DEDUCCIÓN NATURAL

donde '#' es el símbolo lógico principal de B, $c(B)=n$ y el grado de la subderivación λ de B es $<n$. Los casos a considerar vienen dados por los operadores lógicos disponibles (por las posibles interpretaciones de '#' si se prefiere). Si '#' es '&', B es A&C o C&D, de modo que π es entonces de una de las formas:

A		C	
C		A	
A&C	I&	A&C	
A	E&	C	
C		A	
A		C	
A&C	I&	A&C	
A		C	

Las contracciones son operaciones que transforman derivaciones que termina con un corte en otras derivaciones con idénticas premisas y conclusión. En concreto, las contracciones para los casos que estamos considerando son las subderivaciones de la primera ocurrencia explicitada de 'A', en los dos primeros casos, y de la primera ocurrencia explicitada de 'C', en los casos restantes. La gracia está en que, bajo los supuestos del lema, la contracción de π es siempre de grado $<n$.

Si '#' es ' \rightarrow ', π es de una de las formas siguientes:

A		┌ A		
┌ A		└ C		
└ C		A \rightarrow C	I \rightarrow	
A \rightarrow C	I \rightarrow	A		
C	E \rightarrow	C	E \rightarrow	

y sus conversiones resultan de combinar la subderivación de la primera ocurrencia de 'A' y la derivación de C a partir de A. Adviértase que en esta última el supuesto provisional 'A' de la subderivación original es reemplazado por una ocurrencia de esa misma fórmula derivada a partir de las premisas.

Finalmente, si '#' es ' \forall ', π es

A[v]		I \forall
($\forall v$)A[v]	I \forall	
A[t]		E \forall

cuya conversión es la derivación que resulta de reemplazar en la subderivación de A[v] la variable (libre) v por el término t.

┆

Aplicando reiteradamente este lema se llega a:

TEOREMA 31. Si hay una derivación en DNS* de A a partir de X entonces hay una derivación normal de A a partir de X.

DEMOSTRACIÓN. Sea π una derivación en DNS* de grado n de la forma

.	}	
.		λ
.		
A'	I#	
A	E#	
	}	
.		μ
.		

En la que todo corte en la subderivación λ que precede al explícitamente señalado es de grado $<n$. Al aplicar la contracción correspondiente se obtiene una derivación π' reemplazando la subderivación λ por la subderivación apropiada λ' . Puede comprobarse fácilmente que la última fórmula de λ' es de complejidad menor que A' , y por consiguiente que si λ' termina con una aplicación de una regla de introducción I° y μ comienza con una aplicación de la regla de eliminación paralela, E° , la combinación subsiguiente de λ' y μ comporta la aparición de un corte de grado menor que el de la derivación original.

⊥

La eliminación de cortes despeja en principio el camino para el establecimiento de la propiedad de subfórmulas, que puede enunciarse así: toda fórmula en una derivación π libre de cortes de A a partir de X es una subfórmula generalizada de A o de una fórmula de X . El quid estriba en que en una derivación normalizada pueden distinguirse tres partes:

- a) *analítica*, en la que cada fórmula es la premisa principal de una eliminación y contiene como subfórmula a la fórmula siguiente;
- b) *intermedia*, en la que las fórmulas son premisas de reglas de introducción; y
- c) *sintética*, en la que cada fórmula es la conclusión de una introducción y es (salvo la conclusión) una subfórmula de la fórmula siguiente.

Sin embargo para demostrar que DNI^* y DNC^* poseen esta propiedad aún hay que introducir algún reajuste, como muestra el ejemplo que viene a continuación.

1. $A \rightarrow \perp$	Premisa
2. A	Premisa
3. \perp	$E \rightarrow 1,2$
4. $A \& B$	$E \perp 3$
5. A	$E \& 4$

Esta derivación no contiene fórmulas máximas -aunque sí un rodeo innecesario- aunque la fórmula ' $A \& B$ ' no es una subfórmula ni de las premisas ni de la conclusión.

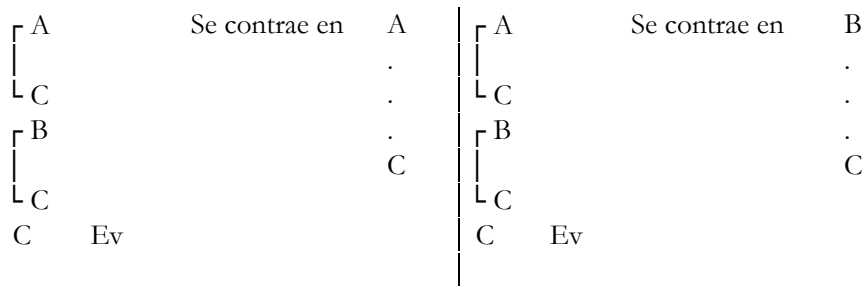
Lo que se desprende de éste y otros casos similares es la necesidad de restringir la regla $E \perp$ a aquellos casos en los que la conclusión ' A ' es de complejidad 0. Queda para el lector establecer, por inducción sobre $c(A)$, la equivalencia de DNS^* con el sistema así obtenido.

TEOREMA 32. Toda fórmula en una derivación libre de cortes de A a partir de X en $DNM^*(DNI^*)$ (con $E \perp$ restringida a fórmulas atómicas) es una subfórmula generalizada de una fórmula de X o de A .

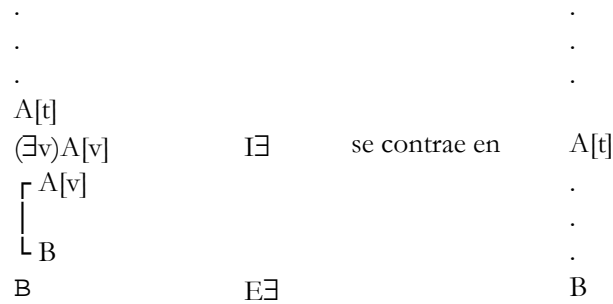
DEMOSTRACIÓN. Sea π una derivación a partir de un conjunto de hipótesis X de las premisas de una regla r que satisface las condiciones del enunciado del lema. Si r es una regla de introducción, la derivación π' resultante de su aplicación a las fórmulas terminales de π conservará esas propiedades -las fórmulas terminales de π serán ahora subfórmulas de la conclusión de π' . Si r es una regla de eliminación hay que considerar cuatro casos. Si, en primer lugar, es la regla de eliminación del condicional π' es de la forma:

·	·
·	·
·	·
B	$B \rightarrow C$
C	

Obviamente si B no es una subfórmula de las premisas, tampoco lo será $B \rightarrow C$. Por las restricciones impuestas a $E \perp$, $B \rightarrow C$ no puede ser el resultado de aplicar $E \perp$. Ahora bien, si esta fórmula resultase de aplicar alguna regla de eliminación distinta de $E \perp$, dadas las hipótesis iniciales, sería una subfórmula de las

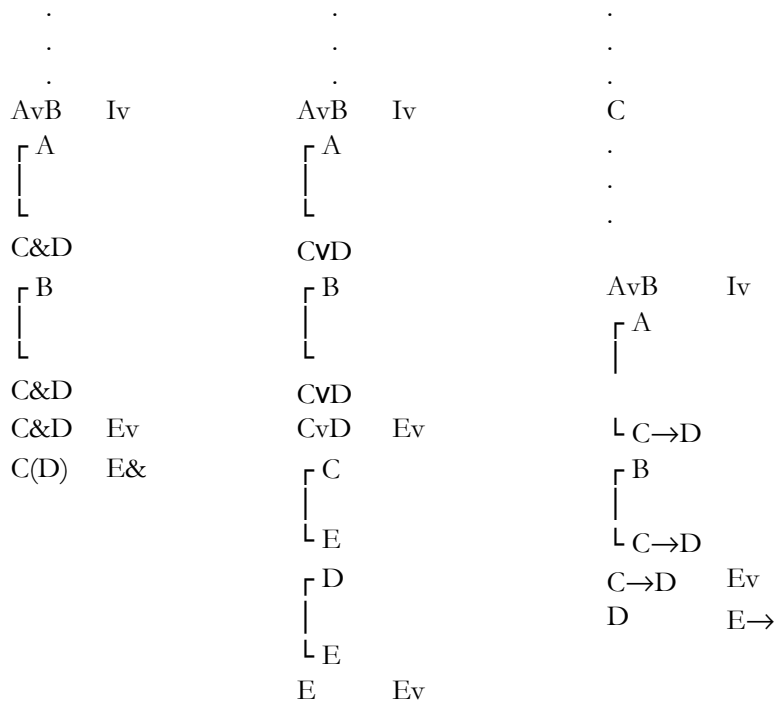


\exists -contracción



Pero con ésto no es suficiente, como se ha argumentado antes. Se precisa además la noción de corte conmutativo. Un *corte conmutativo* es una secuencia de dos aplicaciones de reglas, de las que la primera es [EV] o [E \exists] y la segunda una regla de eliminación cuya premisa mayor es suministrada por la aplicación de la primera. Por consiguiente, se tienen los siguientes cortes conmutativos.

a) Cortes conmutativos (Ev,E&), (Ev,Ev) y (Ev,E \rightarrow).

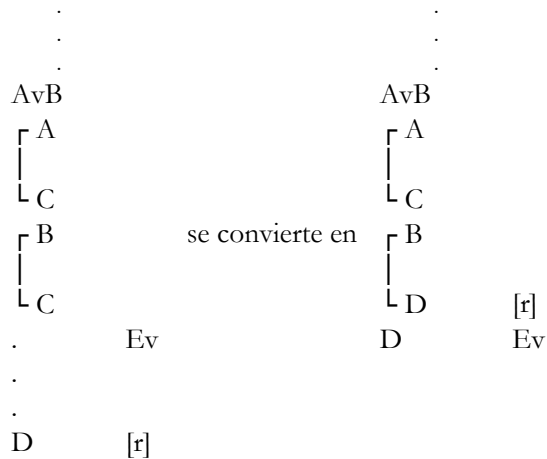


Aunque todo esto puede parecer prolijo, podría serlo más, puesto que en algunos casos no se ha prestado atención al orden de las premisas. El *grado de un corte conmutativo* es el grado + 1 de la fórmula que aparece como conclusión de la primera eliminación (EV o E \exists) y como premisa mayor de la eliminación subsiguiente.

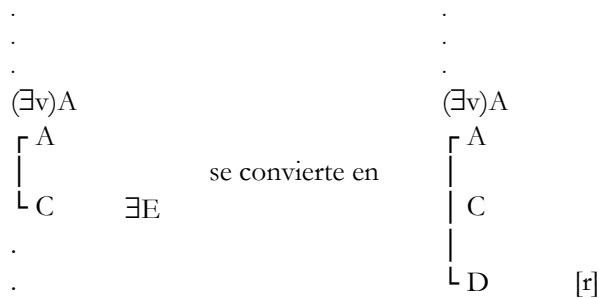
En el ejemplo discutido hace un momento hay un corte (2-11) y un corte conmutativo (11-18):

1. p	Premisa
2. pvr	Iv,1
┌ 3. p	
4. p→q	premisa
5. q	E→3,4
└ 6. qv¬s	Iv,5
┌ 7. r	
8. r→¬s	premisa
9. ¬s	E→7,8
└ 10. qv¬s	Iv,9
11. qv¬s	Ev2,3-6,7-10
┌ 12. q	
13. q→t	premisa
└ 14. t	E→12,13
┌ 15. ¬s	
16. ¬s→t	premisa
└ 17. t	E→15,16
18. t	Ev11,12-14,15-17

El siguiente paso es definir las contracciones de los cortes conmutativos. Esquemáticamente son:
Corte conmutativo para Ev



Corte conmutativo para E \exists



$$\left. \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \mu$$

La contracción correspondiente es

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{B}{C} \begin{array}{l} [r] \\ [r'] \end{array} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \left. \right\} \mu$$

A

formada por la yuxtaposición de la subderivación original de D, la subderivación del supuesto izquierdo de la eliminación del disyuntor y μ . Si r no es una regla de eliminación, B no es la fórmula principal de un corte y así la subderivación

$$\begin{array}{c} D \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{B}{C} \begin{array}{l} [r] \\ [r'] \end{array} \end{array}$$

tiene grado $<n$. Lo mismo vale si r es una regla de eliminación, digamos $E\#$, y r' es distinta de $I\#$, $E\vee$ y $E\exists$. Obviamente, si $c(B) < c(D\vee E)$, aún cuando r' sea una regla de eliminación, se llega a la misma conclusión. Por otra parte, si r es una regla de eliminación, no es el caso que $c(B) < c(D\vee E)$ ya que de lo contrario habría en π un corte conmutativo de grado $>n$. Así, falta por considerar el supuesto de que r sea una regla de eliminación y $c(B) = c(D\vee E)$. Bajo estos supuestos, está claro que la subderivación de B tiene grado $<n$, si bien la subderivación subsiguiente de C tiene grado n .

Más complejos son aquellos casos en los que B es la fórmula principal de un corte conmutativo. Analicemos a título de ejemplo el caso en que π es de la forma

$$\lambda \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \frac{\begin{array}{c} \lceil D \\ \lceil B \\ \lceil B \end{array}}{D\vee E} \quad \frac{\begin{array}{c} \lceil E \\ \lceil B \\ \lceil B \end{array}}{B} \\ \begin{array}{c} E\vee \\ E\# \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \\ \mu \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \\ A$$

Su contracción presenta entonces el aspecto siguiente:

$$\lambda \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \frac{\begin{array}{c} \lceil D \\ \lceil B \\ \lceil C \end{array}}{D\vee E} \quad \frac{\begin{array}{c} \lceil E \\ \lceil B \\ \lceil C \end{array}}{C} \\ \begin{array}{c} E\# \\ E\vee \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \\ \cdot$$

SISTEMAS DE DEDUCCIÓN NATURAL

DvE	$\perp B$	$\perp B$	
B			E_v
C			$E_\#$
F			E_\diamond
\cdot \cdot \cdot A			$\left. \vphantom{\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}} \right\} \mu$

contendría un c.c.g. de grado $>n$, contra la hipótesis de partida.

El tratamiento de los cortes conmutativos generalizados no presenta ninguna dificultad especial, salvo la posible «interiorización» del corte original en los supuestos de E_v o E_\exists , ya abordada para los cortes conmutativos.

†

El *quid* en la eliminación de cortes en deducción natural hay que buscarlo en la invertibilidad de las reglas de introducción y eliminación de un operador. Es este rasgo el que expresan las conversiones descritas, aunque es más perceptible en unos casos que en otros. Está claro, por ejemplo, que $I\&$ y $E\&$ son inversas entre sí, de modo que podrían reemplazarse sin pérdida alguna por

$$\frac{\frac{A \quad B}{\quad}}{A\&B}$$

donde el trazo doble indica la admisibilidad del tránsito inferencial en cualquiera de dos sentidos posibles inmediato en el caso del disyuntor.

Usando el lema 24 se llega a

TEOREMA 32. Si hay una derivación de A a partir de X en DNS (=DNM, DNI, DNC) entonces hay una derivación de A a partir de X en DNS sin cortes ni cortes conmutativos.

EJERCICIOS.

- (1) Establecer la equivalencia de las dos formulaciones de DNC (con el operador ' \perp ') consideradas en el texto. (La diferencia viene dada por la presencia de TE o de DN).
- (2) Demostrar directamente -es decir, sin pasar a través de sus formulaciones secuenciales- la equivalencia de los sistemas hilbertianos y de deducción natural considerados para las lógicas mínima, intuicionista y clásica.
- (3) Usando el lema 21, demostrar que DNI (con ' \vee ' y ' \exists ') posee la propiedad de subfórmulas.
- (4) Sea DNC' la formulación resultante de reemplazar TE/DN por la regla [Abs]

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma A \rightarrow \perp \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A}$$

Muéstrese que DNC y DNC' son deductivamente equivalentes.

- (5) Demuéstrese que DNC' posee la siguiente variante de la propiedad de subfórmulas: si π es una derivación normal (i.e., sin cortes) de A a partir de X , entonces cada fórmula de π es (a) una subfórmula de A , (b) una subfórmula de alguna fórmula de X , (c) un supuesto de la forma $A \rightarrow \perp$ cancelado aplicando [Abs], siendo A una fórmula del tipo indicado, o (d) una instancia de \perp .

