CAPÍTULO 6. SISTEMAS DE TABLAS ANALÍTICAS

> En la figura que se llama *oximoron*, se aplica a una palabra un epíteto que parece contradecirla; así los gnósticos hablaron de luz oscura; los alquimistas, de un sol negro.
>
> J.L. BORGES, *El zahir* .

DEL CÁLCULO DE SECUENTES A LAS TABLAS ANALÍTICAS.

En la tipología de los sistemas deductivos del capítulo 1, los sistemas gentzenianos se oponen a los sistemas hilbertianos porque éstos constan de reglas de nivel 0 de la forma

$$X \Rightarrow Y$$

(e.g. la regla de *modus ponens* $A\rightarrow B, A \Rightarrow B$) y aquellos de reglas de nivel 1 de la forma

$$\frac{X_1 \Rightarrow Y_1,\ldots, X_1 \Rightarrow Y_1}{X \Rightarrow Y}$$

(como la regla $[\Vdash\rightarrow]$ $X,A\Rightarrow B,Y$ / $X\Rightarrow A\rightarrow B,Y$). A su vez, las reglas de nivel 1 se subdividen en reglas estructurales y operacionales, y éstas en reglas de eliminación y reglas de introducción. Según lo expuesto en el capítulo 1, las reglas de introducción se caracterizan porque para cualquier aplicación de esa regla $c(X_1 \Rightarrow Y_1,\ldots, X_1 \Rightarrow Y_1)=c(X\Rightarrow Y)-1$ y las de eliminación porque en todas sus aplicaciones se comple $c(X_1 \Rightarrow Y_1,\ldots, X_1 \Rightarrow Y_1)=c(X\Rightarrow Y)+1$. La distinción entre reglas de introducción y de eliminación permite clasificar los sistemas gentzenianos en tres grupos:

(a) *sistemas de cálculo secuencial*: aquellos cuyas reglas operacionales son reglas de introducción;
(b) *sistemas de tablas analíticas*: aquellos cuyas reglas operacionales son reglas de eliminación;
(c) *sistemas de deducción natural*: aquellos que constan tanto de reglas de eliminación como de reglas de introducción.[1]

Los tres capítulos precedentes están dedicados precisamente al estudio de sistemas gentzenianos del primer grupo. En este capítulo se consideran sistemas del segundo y en el próximo capítulo los del tercero.

La manera más sencilla de obtener un sistema de tablas analíticas a partir de un sistema de cálculo de secuentes es invertir sus reglas,transformando así reglas de introducción en reglas de eliminación. Partiendo de los sistemas SS resultan los sistemas de tablas analíticas TSS que se describen a continuación.

Lógica mínima (TSM)

Secuentes de cierre $A \Vdash A$

Reglas estructurales

$$D\Vdash \frac{X,A\Vdash Y}{X\Vdash Y} \qquad R\Vdash \frac{X,A\Vdash Y}{X,A,A\Vdash Y}$$

$$P\Vdash \frac{X,B,A,X'\Vdash Y}{X,A,B,X'\Vdash Y}$$

Reglas operacionales

$$\&\Vdash \frac{X,A\&B\Vdash C}{X,A\Vdash C} \qquad \frac{X,A\&B\Vdash C}{X,B\Vdash C}$$

[1] Hay que reconocer que la nomenclatura no es particularmente afortunada y puede inducir a confusión. Sistemas bidireccionales (deducción natural) y unidireccionales, distinguiendo dentro de éstos ascendentes (cálculo de secuentes) y descendentes (tablas analíticas), sería preferible si no fuera por el peso de la historia.

$$\Vdash\& \quad \frac{X \Vdash A\&B}{X \Vdash A \qquad X \Vdash B}$$

$$\Vdash\vee \quad \frac{X \Vdash A\vee B}{X \Vdash A} \qquad\qquad \frac{X \Vdash A\vee B}{X \Vdash B}$$

$$\vee\Vdash \quad \frac{X,A\vee B \Vdash C}{X,A \Vdash C \qquad X,B \Vdash C}$$

$$\to\Vdash \quad \frac{X,Y,A\to B \Vdash C}{X \Vdash A \qquad Y,B \Vdash C} \qquad \Vdash\to \quad \frac{X \Vdash A\to B}{X,A \Vdash B}$$

$$\neg\Vdash \quad \frac{X \Vdash A}{X,\neg A \Vdash} \qquad \Vdash\neg \quad \frac{X,A \Vdash}{X \Vdash \neg A}$$

$$\Vdash\forall \quad \frac{X \Vdash (\forall v)A}{X \Vdash A} \qquad \forall\Vdash \quad \frac{X,(\forall v)A[v] \Vdash B}{X,A[t] \Vdash B}$$

$$\Vdash\exists \quad \frac{X \Vdash (\exists v)A[v]}{X \Vdash A[t]} \qquad \exists\Vdash \quad \frac{X,(\exists v)A \Vdash B}{X,A \Vdash B}$$

Donde las reglas $\Vdash\forall$ y $\exists\Vdash$ están sujetas a la restricción:de que v no esté libre en X, B.

Lógica intuicionista (TSI)

Añádase a TSM la regla estructural

$$\Vdash D \quad \frac{X \Vdash A}{X \Vdash}$$

Lógica clásica (TSC)

Secuentes de cierre $A \Vdash A$

Reglas estructurales

$$D\Vdash \quad \frac{X,A \Vdash Y}{X \Vdash Y} \qquad R\Vdash \quad \frac{X,A \Vdash Y}{X,A,A \Vdash Y}$$

$$P\Vdash \quad \frac{X,B,A,X' \Vdash Y}{X,A,B,X' \Vdash Y} \qquad \Vdash D \quad \frac{X \Vdash A,Y}{X \Vdash Y}$$

$$\Vdash R \quad \frac{X \Vdash A,Y}{X \Vdash A,A,Y} \qquad \Vdash P \quad \frac{X \Vdash Y,B,A,Y'}{X \Vdash Y,A,B,Y'}$$

Reglas operacionales

$$\&\Vdash \quad \frac{X,A\&B \Vdash Y}{X,A \Vdash Y} \qquad \frac{X,A\&B \Vdash Y}{X,B \Vdash Y}$$

$$\Vdash\& \quad \frac{X \Vdash A\&B,Y}{X \Vdash A,Y \qquad X \Vdash B,Y}$$

$$\Vdash\vee \quad \frac{X \Vdash A\vee B,Y}{X \Vdash A,Y} \qquad \frac{X \Vdash A\vee B,Y}{X \Vdash B,Y}$$

$$\vee\Vdash \quad \frac{X,A\vee B \Vdash Y}{X,A \Vdash Y \qquad X,B \Vdash Y}$$

$$\to\Vdash \quad \frac{X,Y,A\to B \Vdash Z,W}{X \Vdash A,Z \qquad Y,B \Vdash W} \qquad \Vdash\to \quad \frac{X \Vdash A\to B,Y}{X,A \Vdash B,Y}$$

$$\neg\Vdash \quad \frac{X\Vdash A,Y}{X,\neg A\Vdash Y} \qquad \Vdash\neg \quad \frac{X,A\Vdash Y}{X\Vdash\neg A,Y}$$

$$\Vdash\forall \quad \frac{X\Vdash(\forall v)A,Y}{X\Vdash A,Y} \qquad \forall\Vdash \quad \frac{X,(\forall v)A[v]\Vdash Y}{X,A[t]\Vdash Y}$$

$$\Vdash\exists \quad \frac{X\Vdash(\exists v)A[v],Y}{X\Vdash A[t],Y} \qquad \exists\Vdash \quad \frac{X,(\exists v)A\Vdash Y}{X,A\Vdash Y}$$

Donde las reglas $\Vdash\forall$ y $\exists\Vdash$ están sujetas a la restricción:de que v no esté libre en X, Y.

Adviértase que la inversión afecta también a las reglas estructurales, y no sólo a las operacionales. Se ha reemplazado la letra 'C' de la designación de las reglas de contracción por la letra'R', de «reiteración», por considerar que ésta es ahora una denominación más adecuada.

Una *demostración de un secuente* $X\Vdash Y$ *en TSS* (=TSM,TSI,TSC) es un árbol finito cuyos nodos son secuentes de $\mathcal{P}$ tal que

(1) su origen es $X\Vdash Y$,

(2) sus nodos terminales son secuentes de cierre,

(3) cualquier nodo distinto del origen resulta de su predecesor al aplicar una regla de TSS.

De un árbol finito que satisfaga las condiciones enunciadas excepto 2 se dice que es *una tabla analítica para* $X\Vdash Y$. En consonancia, una tabla para $X\Vdash Y$ cuyos nodos terminales sean secuentes de cierre es una *tabla analítica cerrada para* $X\Vdash Y$, y así un secuente es demostrable syss hay una tabla analítica cerrada para él. Por consiguiente, una fórmula A es *derivable en TSS* de un conjunto de fórmulas X syss para algún subconjunto finito Y de X, el secuente $Y\Vdash A$ es demostrable en TSS.

Es obvio que TSM es equivalente a SM^- (es decir, ambos definen la misma relación de derivabilidad), TSI a SI^- y TSC a SI^-: al invertir una demostración de $X\Vdash A$ en TSS se tiene una demostración de $X\Vdash Y$ en SS y viceversa.

Desde luego todo esto no es particularmente excitante. Más adelante se aclarará algo de lo que se gana invirtiendo las demostraciones del cálculo secuencial. Pero antes hagamos un par de observaciones. Hay quien mantiene que las reglas de introducción son, en el orden de la justificación, anteriores a las reglas de eliminación. Por consiguiente, el cálculo de secuentes sería anterior a ese respecto al cálculo de tablas analíticas (de hecho lo es cronológicamente: el origen de éste hay que buscarlo en las demostraciones de completitud de aquél).

La segunda observación trata de prevenir un error de concepto relativamente extendido en nuestro país (y proviniente de la obra de E.W.Beth)[2]. Aunque la apostilla final del párrafo anterior sugiere que las tablas analíticas exhiben una afinidad mayor con los lenguajes formales que los cálculos secuenciales, está claro que las tablas analíticas no son en ningún sentido un procedimiento semántico. Son un sistema deductivo, exactamente igual que los cálculos de secuentes. Después de todo si al leer al revés las reglas y demostraciones de un sistema deductivo, de naturaleza sintáctica, resultase un lenguaje formal, de naturaleza semántica, habría que admitir la existencia de la magia. Es cierto que las reglas de tablas analíticas admiten, exactamente igual que las de cálculo secuencial, una lectura semántica (en términos de preservación de propiedades semánticas), pero eso no las convierte en reglas semánticas.

REESCRIBIENDO LOS SECUENTES.

Las convenciones vigentes para la transcripción de demostraciones en TAS hacen la tarea innecesariamente engorrosa por la cantidad de redundancia tolerada. Un ejemplo sencillo ayudará a entenderlo.

[2] Al describir un mecanismo deductivo similar al de estas páginas, Beth emplea la denominación «tablas semánticas» -la introducción de terminologías desafortunadas no es en lógica tan rara como debiera.

$\Vdash(\exists x)(Px\rightarrow(\forall y)Py)$	
$\Vdash(\exists x)(Px\rightarrow(\forall y)Py),(\exists x)(Px\rightarrow(\forall y)Py)$	$\Vdash$R
$\Vdash Pc\rightarrow(\forall y)Py,(\exists x)(Px\rightarrow(\forall y)Py)$	$\Vdash\exists$
$Pc\Vdash(\forall y)Py,(\exists x)(Px\rightarrow(\forall y)Py)$	$\Vdash\rightarrow$
$Pc\Vdash Py,(\exists x)(Px\rightarrow(\forall y)Py)$	$\Vdash\forall$
$Pc\Vdash(\exists x)(Px\rightarrow(\forall y)Py),Py$	$\Vdash$P
$Pc\Vdash Py\rightarrow(\forall y)Py,Py$	$\Vdash\exists$
$Pc,Py\Vdash(\forall y)Py,Py$	$\Vdash\rightarrow$
$Py,Pc\Vdash(\forall y)Py,Py$	P$\Vdash$
$Py\Vdash Py,(\forall y)Py$	D$\Vdash$
$Py\Vdash(\forall y)Py,Py$	$\Vdash$P
$Py\Vdash Py$	$\Vdash$D

La información relevante para la construcción de la tabla es, en última instancia, de la forma «A en el antecedente» y «A en el consecuente». Desde este punto de vista, una misma información como «$(\exists x)(Px\rightarrow(\forall y)Py)$ en el consecuente» aparece registrada siete veces: una en cada uno de los nodos 1, 3-6 y dos veces en el nodo 2. Dicho de un modo más gráfico, la información se registra horizontalmente (en cada secuente) y verticalmente (pasando de un secuente a otro).

Estas consideraciones sugieren que la transcripción podría simplificarse utilizando el separador de secuente '$\Vdash$' como prefijo y sufijo de fórmulas, y registrando la información únicamente en el eje vertical. La idea es leer '$\Vdash$A' como «A en el consecuente» y 'A$\Vdash$' como «A en el antecedente». Las demostraciones se representarían entonces como árboles con nodos de las formas '$\Vdash$A' y 'A$\Vdash$', siendo A una fórmula de $\mathcal{P}$, en los que el enésimo nodo α de una rama Θ iría asociado con el secuente $A_1,...,A_i\Vdash B_1,...,B_j$ cuyo antecedente estaría formado por las fórmulas C tales que C$\Vdash$ es un nodo de Θ que precede o es igual a α, y cuyo consecuente por las fórmulas D tales que $\Vdash$D precede o es igual a α en Θ. Así, la demostración anterior se convertiría en

1. $\Vdash(\exists x)(Px\rightarrow(\forall y)Py)$
2. $\Vdash Pc\rightarrow(\forall y)Py$
3. $Pc\Vdash$
4. $\Vdash(\forall y)Py$
5. $\Vdash Py$
6. $\Vdash Py\rightarrow(\forall y)Py$
7. $Py\Vdash$

Adviértase que todo apunta a que esta transformación permitirá prescindir de reglas estructurales, lo que por cierto es menos ventajoso de lo que podría parecer. Así, la fórmula con prefijo del nodo 1 es usada dos veces, dando lugar a 2 y 6, en tanto que la aplicación de la regla no la «cancela» reemplazándola por otra fórmula. Esto permite pasarse sin la regla de reiteración. Si la profundidad de los nodos no determina el orden de aplicación de las reglas, puede prescindirse asimismo de la regla de permutación. Finalmente, si una rama cerrada es simplemente una rama con dos nodos $\Vdash$A y A$\Vdash$ (sin requerir, por ejemplo, que uno de ellos sea el predecesor del otro), también cabe omitir la regla de permutación.

La desaparición de las reglas estructurales, si bien puede ser vista como una simplificación, plantea un problema, puesto que desde una perspectiva secuencial las diferencias entre las lógicas mínima, intuicionista y clásica vienen expresadas precisamente por medio de reglas estructurales.

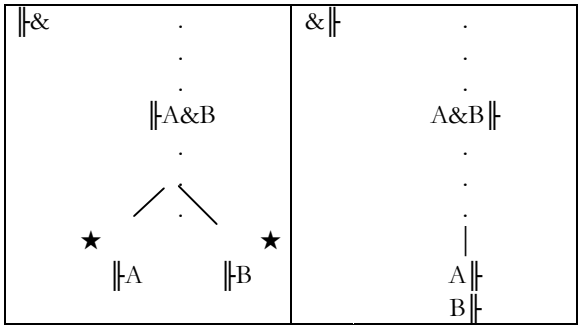
En el epígrafe siguiente se abordan ésta y otras cuestiones, formulándose todas estas sugerencias con la precisión debida.

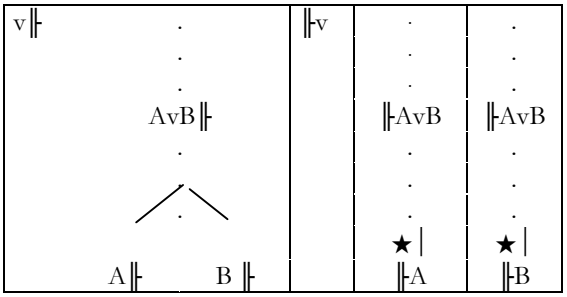
TABLAS ANALÍTICAS PARA LAS LÓGICAS MÍNIMA, INTUICIONISTA Y CLÁSICA.

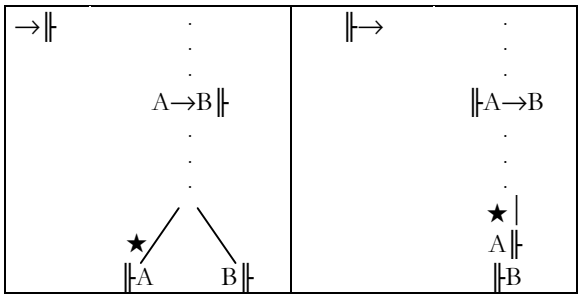
Se hará uso de los signos auxiliares '$\Vdash$' y '$\bigstar$'. El primero se usará como en el epígrafe precedente. El segundo no ha de ser confundido con el asterisco del capítulo 7, que representa una

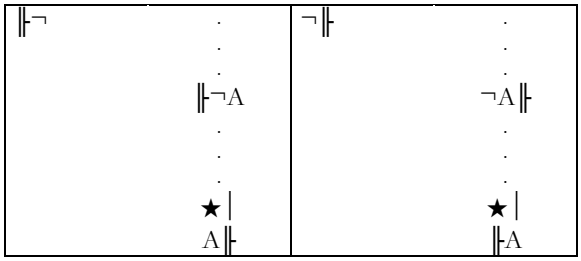
conectiva estructural. Llamaremos «fórmulas signadas» a las expresiones de las formas '⊩A' y 'A⊩', donde 'A' es una fórmula de $\mathcal{P}$. La función de la estrella es marcar determinados puntos de una rama para capturar las diferencias entre las lógicas que se vienen considerando mediante las restricciones oportunas.

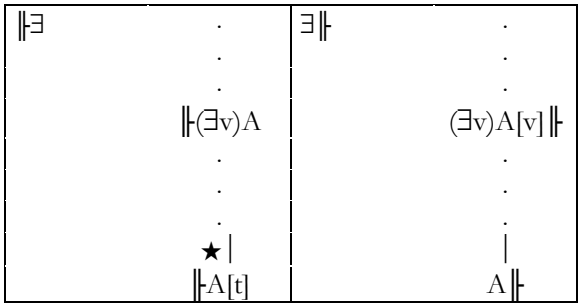
Lógica mínima (TM)

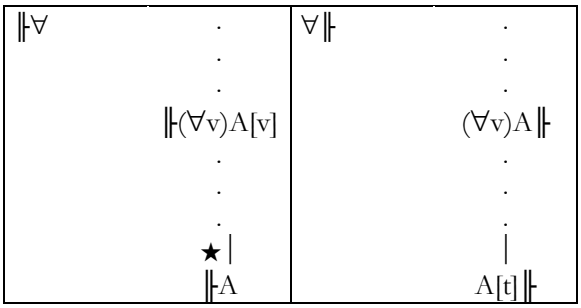












Restricciones.- (1) Las reglas ∃⊩ y ⊩∀ están sujetas a la restricción: v no está libre en ninguno de los nodos que preceden a la conclusión. (2) Las reglas ⊩&, ⊩∨, ⊩→, ⊩¬, ⊩∃ y ⊩∀ únicamente pueden aplicarse cuando entre la premisa correspondiente y el nodo terminal de la rama no hay ninguna estrella. (3) La aplicación de la regla ¬⊩ presupone que el nodo terminal de la rama que se está extendiendo no es de la forma ⊩B y entre cualquier nodo de la forma ⊩B y el nodo terminal hay un asterisco.

Lógica intuicionista (TI)

Como TM eliminando la restricción (3) de la regla ¬⊩.

Lógica clásica (TC)

Como TI eliminando de las reglas los asteriscos.

Definiciones

Una *tabla analítica en TS (=TM,TI,TC)* para un conjunto finito de fórmulas signadas $\{A_1⊩,...,A_n⊩,⊩B\}$ es un árbol cuyos nodos son fórmulas signadas y tal que

(1) su origen es $A_1⊩$,

(2) si n>i el único sucesor de $A_i⊩$ es A_{i+1} y en caso contrario es ⊩B,

(3) cualquier nodo distinto de los n+1 primeros resulta de un nodo que le domina al aplicar una regla de TSS.

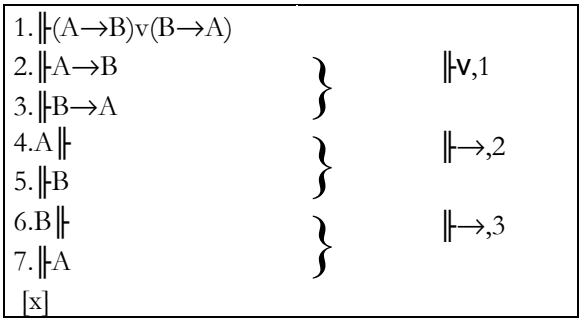
Una *rama* de una tabla analítica para TS (=TM,TI,TC) es *cerrada* syss 1) contiene dos nodos A⊩ y ⊩A, y 2) entre ⊩A y el nodo terminal no hay ningún asterisco. Una *tabla analítica* en TS es *cerrada* syss todas sus ramas lo son.

$X ⊢_{TS} B$ (la fórmula B se sigue en TS del conjunto de fórmulas X) syss para algún $\{A_1,...,A_n\}⊆X$, hay una tabla analítica cerrada para $\{A_1⊩,...,A_n⊩,⊩B\}$ en TS.

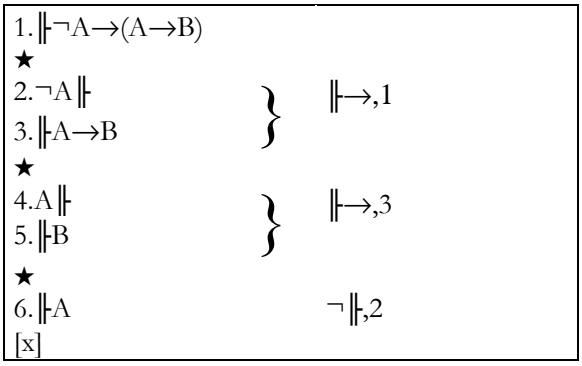
Con respecto a TC hay que señalar que, alternativamente, podrían conservarse los asteriscos, de manera que las reglas para TI y TC serían exactamente iguales, eliminando de la definición de rama cerrada para TC la segunda claúsula.

EJEMPLOS

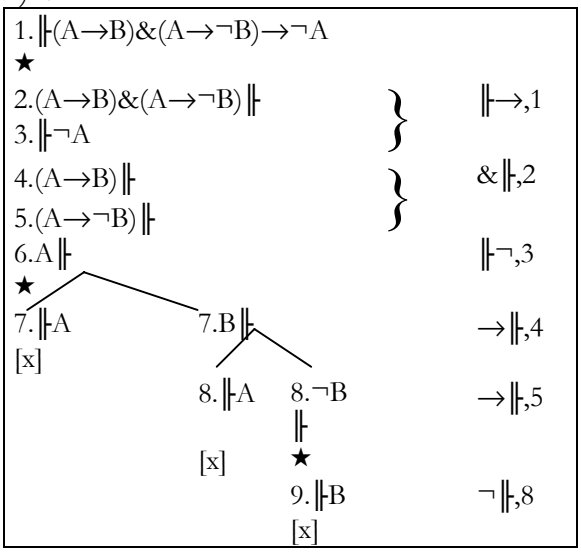
1. $⊢_{TC}(A→B)∨(B→A)$



2. $\vdash_{TI} \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

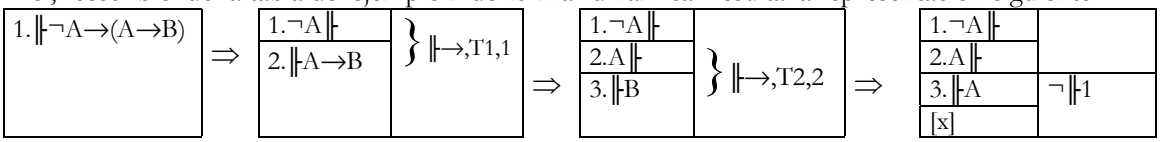


2. $\vdash_{TM} (A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$



EQUIVALENCIA DE LOS TSS Y LOS TS.

Ya se ha indicado que la función del signo auxiliar '★' es diferenciar a las lógicas mínima, intuicionista y clásica entre sí en ausencia de reglas estructurales. Las dos primeras se distinguen de la tercera desde el punto de vista del cálculo de secuentes porque sólo manipulan secuentes de las formas X⊩A y X⊩. El efecto de insertar una estrella entre dos nodos de una rama es borrar cualquier nodo anterior consistente en una fórmula con prefijo '⊩', como puede comprobarse examinando la restricción de las reglas para fórmulas con prefijo y la definición de rama cerrada. Así, reescribiendo la tabla del ejemplo 2 de forma «dinámica» resulta la representación siguiente:



Por ello, la inserción de una estrella puede verse como una regla para «reescribir» una rama, omitiendo algunos de sus nodos, y no para extenderla. Habría, por tanto, algo así como un trasunto de reglas estructurales (i.e., de reescritura) frente a las reglas puramente operacionales (i.e., de extensión).

En este sentido está claro que en cualquier rama de una tabla analítica en TM o TI hay a lo sumo una fórmula con prefijo. Esto corresponde a las restricciones sobre la cardinalidad del consecuente de los correspondientes cálculos secuenciales. En cuanto a las diferencias entre TM y TI, en el cálculo secuencial se reflejan en la ausencia en el primer caso y la presencia en el segundo de la regla ⊩D, bajo la forma

$$\frac{X \Vdash}{\quad}$$

$$\frac{}{X\Vdash A.}$$

Traducido al formato tablas, correspondería a la «cancelación» de un nodo de la forma $\Vdash A$ sin reemplazarlo por otro. Adviértase a este respecto que en la representación dinámica de la tabla intuicionista para $\Vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$, al pasar de la tercera a la cuarta columna aplicando $\neg \Vdash$, se elimina $\Vdash B$ sin reemplazarlo por otro nodo. Es justamente en este paso en donde quedaría bloqueada la construcción empleando reglas mínimas, puesto que el nodo 3 de la tercera columna es $\Vdash B$ y por ello no podría aplicarse $\neg$.

TEOREMA 23. $X \vdash_{TM} A$ syss $X \vdash_{TSM} A$.

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$ Según se ha indicado, la construcción de una tabla analítica para $A_1 \Vdash,...,A_n \Vdash, \Vdash B$ en TI puede verse como un proceso de construcción sucesiva de árboles. Además, en cada uno de las ramas de esos árboles ocurre a lo sumo una fórmula con prefijo $\Vdash$, y las restricciones para aplicar $\Vdash \neg$ aseguran que cuando se aplica esta regla en la rama correspondiente no hay fórmulas con prefijo. Por tanto, con cada rama y segmento inicial de rama de esos árboles puede asociarse el secuente cuyo antecedente está formado por las fórmulas con sufijo $\Vdash$ y cuyo consecuente está formado por la fórmula (si la hay) con prefijo $\Vdash$. La tabla que viene a continuación especifica el mecanismo de asociación.

	secuente asociado al segmento-premisa	secuentes asociados a los segmentos-conclusión
Origen		$A_1,...,A_n \Vdash B$
$\& \Vdash$	$X,A\&B,Y \Vdash C$	$X,A\&B,A,B,Y \Vdash B$
$\Vdash \&$	$X \Vdash A\&B$	$X \Vdash A$
		$X \Vdash B$
$\vee \Vdash$	$X,A\vee B,Y \Vdash C$	$X,A\vee B,A,Y \Vdash C$
		$X,A\vee B,B,Y \Vdash C$
$\Vdash \vee$	$X \Vdash A\vee B$	$X \Vdash A$
$\Vdash \vee$	$X \Vdash A\vee B$	$X \Vdash B$
$\rightarrow \Vdash$	$X,A\rightarrow B,Y \Vdash C$	$X,A\rightarrow B,Y \Vdash A$
		$X,A\rightarrow B,B,Y \Vdash C$
$\Vdash \rightarrow$	$X \Vdash A\rightarrow B$	$X,A \Vdash B$
$\Vdash \neg$	$X \Vdash \neg A$	$X,A \Vdash$
$\neg \Vdash$	$X,\neg A \Vdash$	$X,\neg A \Vdash A$
$\Vdash \exists$	$X \Vdash (\exists v)A$	$X \Vdash A$
$\exists \Vdash$	$X,(\exists v)A[v],Y \Vdash B$	$X,(\exists v)A[v],A[t],Y \Vdash B$
$\Vdash \forall$	$X \Vdash (\forall v)A[v]$	$X \Vdash A[t]$
$\forall \Vdash$	$X,(\forall v)A,Y \Vdash B$	$X,(\forall v)A,A,Y \Vdash B$

Dada una tabla analítica T en TM, el cuadro especifica un árbol de secuentes T'. No hace falta pensar mucho para percatarse de que, en general, T" no será una tabla analítica en TSM. Sin embargo puede demostrarse:

(1) hay una tabla analítica T" en TSM que preserva las relaciones de dominación en T";

(2) si T es cerrada, T" puede extenderse aplicando reglas de TSM a una tabla cerrada.

Para demostrar la primera afirmación basta con mostrar que para cualquier secuente de la segunda columna del cuadro hay una sucesión de aplicaciones de reglas de TSM que da como resultado el o los secuentes de la tercera columna. En algunos casos es inmediato, por ejemplo, $\Vdash \&$::

$$\frac{X \Vdash A\&B}{X \Vdash B} \Vdash \&$$

y en otros casos requiere un poco más de ingenio (tampoco demasiado), por ejemplo, $\& \Vdash$:

$X,A\&B \Vdash Y$	hipótesis
$X,A\&B,A\&B \Vdash Y$	$R\Vdash$
$X,A\&B,A\&B,A\&B \Vdash Y$	$R\Vdash$
$X,A\&B,A\&B,A \Vdash Y$	$\&\Vdash$
$X,A\&B,A,A\&B \Vdash Y$	$P\Vdash$
$X,A\&B,A,B \Vdash Y$	$\&\Vdash$

En cuanto a la segunda afirmación, si T es cerrada en cada rama Θ de T hay dos nodos $A\Vdash$ y $\Vdash A$ sin que entre este último y el nodo terminal de Θ haya ningún asterisco. En tal caso el secuente terminal de la rama correspondiente Θ' de T" es de la forma $X,A,Y \Vdash A$. En efecto, según la construcción de T' y T" si un nodo $A\Vdash$ domina o es igual al nodo terminal de Θ entonces A ocurre

en el antecedente del secuente asociado a ese nodo terminal. Por otra parte si el nodo ⊩A domina al nodo terminal y entre ambos no hay asteriscos, tampoco hay entre ambos nodos de la forma ⊩B y por consiguiente A ocurre en el consecuente del secuenteen cuestión. Así, el secuente terminal de Θ es de la forma X,A,Y⊩A y para obtener a partir de él un secuente de cierre se procede como sigue:

X,A,Y⊩A
.
.
.
} D⊩
X,A⊩A
.
.
.
} P⊩
A,X⊩A
.
.
.
} D⊩
A⊩A

⇐ Si T es una tabla analítica cerrada para $A_1,...,A_n$⊩B en TSM le asociamos una colección de árboles (según la representación dinámica de las tablas de TM) conforme a lo estipulado en el cuadro siguiente, en el que Θ es la rama asociada al secuente premisa.

	ramas asociadas a los secuentes-conclusión
Origen	A_1⊩,...,A_n⊩,⊩B
R.estructural	Θ
&⊩ (1ª forma)	Θ^A⊩
⊩&	Θ-{⊩C/C∈Θ}^⊩A/Θ-{⊩C/C∈Θ}^⊩A
v⊩	Θ^A⊩/Θ^B
⊩v (1ª forma)	Θ-{⊩C/C∈Θ}^⊩A
⊩v (2ª forma)	Θ-{⊩C/C∈Θ}^⊩B
→⊩	Θ-{⊩C/C∈Θ}^⊩A/Θ^B⊩
⊩→	Θ-{⊩C/C∈Θ}^A⊩^⊩B
⊩¬	Θ-{⊩C/C∈Θ}^A⊩
¬⊩	Θ-{⊩C/C∈Θ}^⊩A
⊩∃	Θ^⊩A
∃⊩	Θ^A[t]⊩
⊩∀	Θ^⊩A[t]
∀⊩	Θ^A⊩

Lo primero que hay que mostrar es que el resultado de estas transformaciones es una representación dinámica de una tabla en TM. Para ello hay que mostrar que si a un nodo de la rama Θ se le aplica la regla homóloga de TM, el resultado es la rama o ramas que aparecen en la columna de la derecha del cuadro anterior en la fila correspondiente. El único caso que presenta algún interés es el de ¬⊩, puesto para poder aplicar esta regla no puede haber nodos de la forma ⊩C en Θ (ésta es la traducción «dinámica» de la restricción 3 de las reglas de TM). Si ⊩C fuese el último nodo de Θ consistente en una fórmula con prefijo, es fácil comprobar que el secuente correspondiente sería de la forma X⊩C y por tanto el paso siguiente en la construcción de la tabla para TSM no puede ser una aplicación de ¬⊩.

En segundo lugar, si T es cerrada la última tabla de TM también lo es. En efecto, sea Θ una rama de T cuyo secuente terminal es un secuente de cierre, digamos A⊩A. Una inspección del cuadro muestra que si ξ es la rama asociada a un secuente X,A⊩Y de T entonces A⊩ ocurre en ξ (la instrucción «borrar» aparece siempre bajo la forma 'Θ-{⊩C/C∈Θ}'). Por otra parte, si A⊩A es el

nodo terminal de Θ, $\Vdash A$ ocurre en la rama asociada ξ a ese secuente (aún más, es la única fórmula con prefijo de ξ).

⊣

Con ligeras modificaciones, la misma línea de razonamiento lleva a los dos siguientes teoremas (cuya demostración queda, pues, para el lector):

TEOREMA 24. $X \vdash_{TI} A$ syss $X \vdash_{TSI} A$.

TEOREMA 25. $X \vdash_{TC} A$ syss $X \vdash_{TSC} A$.

UNA SEMÁNTICA PARA LA LÓGICA CLÁSICA DE PRIMER-ORDEN

Hasta el momento se dispone de tres sistemas deductivos para cada una de las lógicas consideradas, de los que sabemos que son equivalentes entre sí. Así, por lo que se refiere a la lógica clásica los teoremas 7 y 9 establecen la equivalencia de HC y SC (o lo que es lo mismo, que $\vdash_{HC}$ y $\vdash_{SC}$ es la misma relación) y el teorema 21 junto con el hecho de que al invertir una demostración de un secuente $X \Vdash Y$ en SC resulta una demostración de ese secuente en TSC y viceversa establece la equivalencia de SC y TC. Por tanto, HC, SC y TC son definiciones distintas de una misma relación de consecuencia en el prolenguaje $\mathcal{P}$.

Se ha apuntado anteriormente que el interés de los sistemas de tablas analíticas proviene de que es relativamente fácil mostrar que definen la misma relación de consecuencia que un lenguaje formal determinado. Para comprobarlo, comencemos por construir un lenguaje formal LFC para $\mathcal{P}$.

Un *modelo de* $\mathcal{P}$ es un par M=<U,I>, donde $U \neq \varnothing$ es un conjunto llamado «universo de M» e I es una función cuyo dominio está formado por las letras relacionales y funcionales de $\mathcal{P}$ y tal que si $\mathbf{R}^n$ es una letra relacional enearia, $I(\mathbf{R}^n) \subseteq U^n$, y si $\mathbf{f}^n$ es una letra funcional enearia, $I(\mathbf{f}^n): U^n \rightarrow U$.

Dado un conjunto U, una *asignación de valores a las variables de* $\mathcal{P}$ *sobre U* es una función g del conjunto de variables de $\mathcal{P}$ en U. Por tanto, si v es una variable, $g(v) \in U$.

El *valor semántico* de un término t de $\mathcal{P}$ con respecto a un modelo M=<U,I> y una asignación g sobre su universo U, $[t]^{M,g}$, se define recursivamente:

1. Si t es una variable, $[t]^{M,g}=g(t)$,
2. si t es de la forma $\mathbf{f}^n(t_1,...,t_n)$ entonces $[t]^{M,g}=I(\mathbf{f}^n)<[t_1]^{M,g},...,[t_n]^{M,g}>$.

El *valor de verdad* de una fórmula A con respecto a un modelo M=<U,I> y una asignación g sobre su universo U, $[A]^{M,g}$, también se define por recurrencia:

1. si c(A)=0, A es de la forma $\mathbf{R}^n t_1,...,t_n$ y en tal caso $[A]^{M,g}=1$ syss $\langle [t_1]^{M,g},...,[t_n]^{M,g}\rangle \in I(\mathbf{R}^n)$.
2. $[\neg A]^{M,g}=1$ syss $[A]^{M,g}=0$.
3. $[A\&B]^{M,g}=1$ syss $[A]^{M,g}=[B]^{M,g}=1$.
4. $[A \vee B]^{M,g}=1$ syss $[A]^{M,g}=1$ o $[B]^{M,g}=1$.
5. $[A \rightarrow B]^{M,g}=1$ syss $[A]^{M,g}=0$ o $[B]^{M,g}=1$.
6. $[(\exists v)A]^{M,g}=1$ syss para alguna asignación g' sobre U que difiere de g a lo sumo por el valor que asigna a v, $[A]^{M,g'}=1$.
7. $[(\forall v)A]^{M,g}=1$ syss para toda asignación g' sobre U que difiera de g a lo sumo por el valor que asigna a v, $[A]^{M,g'}=1$.

Las dos estipulaciones que vienen a continuación introducen a partir de esta definición el valor de verdad de una fórmula A con respecto a un modelo M=<U,I>, para el que se emplea la notación $[A]^M$:

- $[A]^M=1$ syss para toda asignación g sobre U, $[A]^{M,g}=1$.
- $[A]^M=0$ syss para toda asignación g sobre U, $[A]^{M,g}=0$.

Obsérvese que mientras $[A]^{M,g}$ es una función total (toda fórmula es verdadera o falsa con respecto a M y g), $[A]^M$ es una función parcial (algunas fórmulas son verdaderas en un modelo, otras falsas, y otras no son ni verdaderas ni falsas).

Si X es un conjunto de fórmulas y M un modelo y sucede que para toda fórmula $A \in B$, $[A]^M=1$, se dice que M es *un modelo de* X. Asímismo, si X tiene al menos un modelo, se dice que X es *satisfacible* en LFC.

La noción de *consecuencia semántica*, o entrañamiento semántico, en LFC se define entonces así:

$X \models_{LFC} A$ syss para todo modelo $M=<U,I>$ y toda asignación g sobre U, si $[B]^{M,g}=1$ para toda fórmula $B \in X$ entonces $[A]^{M,g}=1$.

Esta no es, sin embargo, la definición más común de entrañamiento semántico para la lógica clásica de primer orden, que reza: $X \models_{LFC'} A$ syss todo modelo de X es un modelo de {A}. Adviértase que (1) si las fórmulas de X y A no tienen variables libres, las dos definiciones son equivalentes, y (2) $\models_{LFC'} \subseteq \models_{LFC}$.

Una segunda definición equivalente es $X \models_{LFC} A$ syss $X \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible.

La noción de entrañamiento es el homólogo semántico de la noción sintáctica de derivabilidad. También la noción de teorema tiene un homólogo semántico: una fórmula A es *válida* en LFC syss $\varnothing \models_{LFC} A$, o, lo que es lo mismo, syss todo modelo de $\mathcal{P}$ es un modelo de A.

Aún cuando se trate de una misma relación de consecuencia, su definición como derivabilidad y su definición como entrañamiento tienen características muy distintas. La primera es una definición recursiva y la segunda no; de la primera se sigue trivialmente que es finitaria, pero no de la segunda, etc. de ahí el interés que tiene demostrar la equivalencia de derivabilidad y entrañamiento.

ADECUACIÓN, CORRECCIÓN Y COMPLETITUD.

Sea $SD=<F, \vdash>$ un sistema deductivo y $LF=<F, \models>$ un lenguaje formal que comparten un mismo prolenguaje.

SD es *correcto* con respecto a LF syss para cualesquiera $X \subseteq F$ y $A \in F$, si $X \vdash A$ entonces $X \models A$;

SD es *completo* con respecto a LF syss para cualesquiera $X \subseteq F$ y $A \in F$, si $X \models A$ entonces $X \vdash A$;

SD es *adecuado* con respecto a LF syss SD es correcto y completo con respecto a LF; es decir, syss para cualesquiera $X \subseteq F$ y $A \in F$, $X \vdash A$ syss $X \models A$.

En ocasiones se distingue entre adecuación (corrección, completitud) fuerte y débil. En tal caso las nociones definidas en las líneas anteriores son las de corrección, completitud y adecuación fuertes. Si en ellas se reemplaza «es consecuencia de» por «es una tesis» se obtienen las definiciones de corrección, completitud y adecuación débiles; así:

SD es *débilmente correcto* con respecto a LF syss para cualquier $A \in F$, si $\vdash A$ entonces $\models A$;

SD es *débilmente completo* con respecto a LF syss para cualquier $A \in F$, si $\models A$ entonces $\vdash A$;

SD es *débilmente adecuado* con respecto a LF syss SD es débilmente correcto y completo con respecto a LF.

En las páginas siguientes, pues, se demuestra la adecuación (fuerte) de TC con respecto a LFC. De la adecuación de TC se sigue, teniendo en cuenta la equivalencia de TC con HC y SC, que HC y SC son igualmente adecuados con respecto a LFC.

TEOREMA DE CORRECCIÓN PARA TC.

Si $M=<U,I>$ es un modelo de LFC y g es una asignación sobre U, el *valor de verdad de una fórmula signada* con respecto a M y g viene definido por las ecuaciones $[A\|\vdash]^{M,g}=[A]^{M,g}$, $[\|\vdash A]^{M,g}\neq[A]^{M,g}$. Diremos que un conjunto de fórmulas signadas X es verdadero para M y g cuando para cualquier fórmula *signada* α de X, $[\alpha]^{M,g}=1$, y que una rama Θ de una tabla analítica en TC es verdadera para M y g cuando lo sea el conjunto de sus nodos. Finalmente, una tabla analítica en TC es verdadera para M y g syss lo es una de sus ramas.

Sean **T** y **T'** dos tablas analíticas en TC tales que **T'** resulta de T al aplicar sobre un nodo de una rama de **T** una de las reglas de TC. Diremos entonces que **T'** es una *extensión inmediata* de **T** y escribiremos $\mathbf{T}<_i\mathbf{T}'$ para indicarlo. Además, si hay $\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_n$ tales que $\mathbf{T}<_i\mathbf{T}_1<_i...<_i\mathbf{T}_n<_i\mathbf{T}'$, diremos que **T'** es una *extensión* de **T**, y lo indicaremos con $\mathbf{T}<\mathbf{T}'$.

LEMA 15. Si **T** es verdadera para un modelo M=<U,I> y una asignación g sobre U, y $\mathbf{T}<\mathbf{T}'$ entonces **T'**es verdadera para M y g.

DEMOSTRACIÓN.- Demostramos que se cumple para el caso en el que $\mathbf{T}<_i\mathbf{T}'$; el lema se sigue entonces por inducción sobre la longitud de la secuencia $\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_n$ entre **T** y **T'**.

Si **T** es verdadera para M y g, hay una rama Θ de **T** verdadera para M y g. Si la aplicación de una regla a un nodo de **T** que da lugar a **T'** se efectúa sobre una rama distinta de Θ, se sigue trivialmente que **T'** es verdadera para M y g. Así pues, supóngase que el nodo en cuestión es un nodo de Θ. Si la regla aplicada es &⊩, A&B⊩ es un nodo de Θ y la rama correspondiente de **T'** resulta de añadir tras el nodo terminal de Θ las fórmulas signadas A⊩ y B⊩. Como quiera que $[A\&B⊩]^{M,g}=[A\&B]^{M,g}=1$ syss $[A]^{M,g}=[A⊩]^{M,g}=1$ y $[B]^{M,g}=[B⊩]^{M,g}=1$, y por consiguiente Θ^<A⊩,B⊩> es verdadera para M y g y lo mismo sucede con **T'**. Si, en segundo lugar, la regla aplicada fuera ⊩&, se extendería la rama Θ, uno de cuyos nodos sería ⊩A&B, a dos ramas Θ^<⊩A> y Θ^<⊩B>. $[⊩A\&B]^{M,g}=1$ syss $[A\&B]^{M,g}=0$, y por tanto syss o bien $[A]^{M,g}=0$ o bien $[B]^{M,g}=0$. Así se sigue que $[⊩A]^{M,g}=1$ o $[⊩B]^{M,g}=1$. Así Θ^<⊩A> o Θ^<⊩B> es verdadera para M y g, y puesto que ambas son ramas de **T'**, **T'** es verdadera para M y g. Los casos de las reglas de los demás operadores sentenciales se tratan de forma similar. Pasemos pues a ocuparnos de las reglas cuantificacionales. Si ⊩(∃v)A ocurre en Θ y en el paso a **T'** esta rama se extiende, aplicando ⊩∃, a Θ^<A[t]>, $[⊩(\exists v)A]^{M,g}=1$ syss $[(\exists v)A]^{M,g}=0$. A su vez, ésto último se cumple syss para toda asignación g' sobre U que difiera de g a lo sumo por el valor asignado a v, $[A]^{M,g'}=0$; de aquí se sigue que para todo término t de $\mathcal{P}$, $[A[t]]^{M,g}=0$, ya que $[t]^{M,g}\in U$ y así para algún g´, $g'(v)=[t]^{M,g}$. Por consiguiente, Θ^<A[t]> es verdadera para M y g, y por ende **T'**. Si la regla aplicada es ∃⊩, $[(\exists v)A⊩]^{M,g}=[(\exists v)A]^{M,g}$ y $[(\exists v)A]^{M,g}=1$ syss para toda asignación g' que difiera de g a lo sumo por el valor asignado a v, $[A]^{M,g'}=1$. Así, $[A]^{M,g}=1$ y Θ^<A⊩> es verdadera para M y g, y por ende Θ. Los casos correspondientes a ∀ se tratan de manera análoga.

⊣

TEOREMA 26 (DE CORRECCIÓN). Para todo conjunto de fórmulas X y toda fórmula B de $\wp$, si $X⊢_{TSC}B$ entonces $X⊨_{LFC}B$.

DEMOSTRACIÓN. Según la definición correspondiente, $X⊢_{TSC}A$ syss hay $\{A_1,...,A_n\}\subseteq X$ tal que hay una tabla analítica cerrada en TS para $\{A_1⊩,...,A_n⊩,⊩B\}$. Sea **T** esa tabla analítica y supóngase que no $X⊨_{LFC}B$. Habría entonces un modelo M=<U,I> y una asignación g sobre U tales que para todo i, 1≤i≤n, $[Ai]^{M,g}=1$ y $[B]^{M,g}=0$. Por tanto, para todo i, 1≤i≤n, $[Ai⊩]^{M,g}=1$ y $[⊩B]^{M,g}=0$. Obviamente **T** es una extensión de la tabla

$$\mathbf{T_0}\quad\left\{\begin{array}{c} A_1⊩ \\ \hline . \\ \hline . \\ \hline . \\ \hline A_n⊩ \\ \hline ⊩B \end{array}\right.$$

y supuesto que $\mathbf{T_0}$ es verdadera para M y g, por el lema 10 **T** lo sería igualmente; es decir, habría al menos una rama Θ de **T** verdadera para M y g. Pero todas las ramas de **T** son cerradas, y por tanto Θ contiene dos nodos ⊩C y C⊩. En tal caso, $[C⊩]^{M,g}=[⊩C]^{M,g}=1$. Esto lleva a una contradicción, puesto que se sigue que $[C]^{M,g}=1$ y $[C]^{M,g}=0$ aunque $[\ ]^{M,g}$ es una función (total) del conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$ en {0,1}.

⊣

TEOREMA DE COMPLETITUD PARA TC.

Un conjunto de fórmulas signadas de $\mathcal{P}$, X, es un *conjunto saturado descedente (o de Hintikka)* syss para cualesquiera fórmulas A y B de $\mathcal{P}$ se cumple:

H_0. si c(A)=0 y $A\Vdash\in X$ entonces $\Vdash A\notin X$.
H_1. si $A\&B\Vdash\in X$ entonces $A\Vdash, B\Vdash\in X$.
H_2. si $\Vdash A\&B\in X$ entonces $\Vdash A\in X$ o $\Vdash B\in X$.
H_3. si $AvB\Vdash\in X$ entonces $A\Vdash\in X$ o $B\Vdash\in X$.
H_4. si $\Vdash AvB\in X$ entonces $\Vdash A, \Vdash B\in X$.
H_5. si $\Vdash A\rightarrow B\in X$ entonces $A\Vdash, \Vdash B\in X$
H_6. si $A\rightarrow B\Vdash\in X$ entonces $\Vdash A\in X$ o $B\Vdash\in X$.
H_7. si $\neg A\Vdash\in X$ entonces $\Vdash A\in X$.
H_8. si $\Vdash\neg A\in X$ entonces $A\Vdash\in X$.
H_9. si $(\exists v)A\Vdash\in X$ entonces para algún término t de $\mathcal{P}$, $A[t]\Vdash\in X$
H_{10}. si $\Vdash(\exists v)A\in X$ entonces para todo término t de $\mathcal{P}$ $\Vdash A[t]\in X$
H_{11}. si $(\forall v)A\Vdash\in X$ entonces para todo término t de $\mathcal{P}$, $A[t]\Vdash\in X$
H_{12}. si $\Vdash(\forall v)A\in X$ entonces para algún término t de $\mathcal{P}$ $\Vdash A[t]\in X$.

LEMA 16 (DE HINTIKKA). Para todo conjunto saturado descendente X hay un modelo $M=<U,I>$ de $\mathcal{P}$ y una asignación g sobre U tales que para cualquier $A\in X$, $[A]^{M,g}=1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea U un conjunto cualquiera con el mismo cardinal que el conjunto de términos de $\mathcal{P}$, y sea entonces h una función 1-1 del conjunto de términos de $\mathcal{P}$ en U. La función de interpretación I del modelo y la asignación g se definen de manera que se cumpla, para cualquier término t, $[t]^{M,g}=h(t)$. Es decir, (i) I(c)=h(c) para cualquier letra funcional 0-aria c, (ii) g(v)=h(v) para cualquier variable v, y (iii) para cualquier letra funcional i-aria f^i_j , $I(f^i_j)<[t_1]^{M,g},...,[t_j]^{M,g}>=h(f^i_j t_1,...,t_j)$.. En cuanto a la interpretación de las letras relacionales, $<h(t_1),...,h(t_i)>\in I(R^i_j)$ syss $(R^i_j t_1,...,t_i\Vdash)\in X$.

El siguiente paso es comprobar que el modelo y la asignación especificadas verifican todas las fórmulas (signadas) de X. Para ello se procede por inducción sobre la complejidad de la fórmula signada. Para c(A)=0 es inmediato:

- $(R^i_j t_1,...,t_i\Vdash)\in X \Leftrightarrow <h(t_1),...,h(t_i)>\in I(R^i_j) \Leftrightarrow [R^i_j t_1,...,t_i]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [R^i_j t_1,...,t_i\Vdash]^{M,g}=1$.
- $(\Vdash R^i_j t_1,...,t_i)\in X \Rightarrow (H_0)$ $(R^i_j t_1,...,t_i\Vdash)\notin X \Leftrightarrow <h(t_1),...,h(t_i)>\notin I(R^i_j) \Leftrightarrow [R^i_j t_1,...,t_i]^{M,g}=0 \Leftrightarrow [\Vdash R^i_j t_1,...,t_i]^{M,g}=1$.

Para c(A)=k+1, los casos de los operadores sentenciales no presentan dificultad alguna.

- $\neg A\Vdash\in X \Rightarrow (H_7)$ $\Vdash A\in X \Rightarrow$(hip.ind.) $[\Vdash A]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [A]^{M,g}=0 \Leftrightarrow [\neg A]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [\neg A\Vdash]^{M,g}=1$.
- $\Vdash\neg A\in X \Rightarrow (H_8)$ $A\Vdash\in X \Rightarrow$(hip.ind.) $[A\Vdash]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [A]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [\neg A]^{M,g}=0 \Leftrightarrow [\Vdash\neg A]^{M,g}=1$.

- $(A\&B)\Vdash\in X \Rightarrow (H_1)$ $A\Vdash\in X$ y $B\Vdash\in X \Rightarrow$(hip.ind.) $[A\Vdash]^{M,g}=[B\Vdash]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [A]^{M,g}=[B]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [A\&B]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [(A\&B)\Vdash]^{M,g}=1$.
- $\Vdash(A\&B)\in X \Rightarrow (H_2)$ $\Vdash A\in X$ o $\Vdash B\in X \Rightarrow$(hip.ind.) $[\Vdash A]^{M,g}=1$ o $[\Vdash B]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [A]^{M,g}=0$ o $[B]^{M,g}=0 \Leftrightarrow [A\&B]^{M,g}=0 \Leftrightarrow [\Vdash(A\&B)]^{M,g}=1$.

etc.

El tratamiento de los cuantificadores ofrece mayor interés. Si g' es una asignación sobre U que difiere de g a lo sumo por el valor asignado a la variable v, para toda fórmula A de $\mathcal{P}$ se verifica $[A[v]]^{M,g'}=1$ syss $[A[h^{-1}(g'v)]]^{M,g}=1$ ya que trivialmente $g(h^{-1}(g'v))=g'(v)$. Esto permite reformular las claúsulas de los cuantores como se indica a continuación:

6'. $[(\exists v)A[v]]^{M,g}=1$ syss para algún término t,$[A[t]]^{M,g}=1$.
7'. $[(\forall v)A[v]]^{M,g}=1$ syss para todo término t, $[A[t]]^{M,g}=1$.

El tratamiento del cuantor existencial (el del universal es análogo) es entonces:

- $(\exists v)A\Vdash\in X \Rightarrow (H_9)$ $A[t]\Vdash\in X$ para algún término t de _ $\Rightarrow$(hip.ind.) $[A[t]\Vdash]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [A[t]]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [(\exists v)A[v]]^{M,g}=1 \Leftrightarrow [(\exists v)A[v]\Vdash]^{M,g}=1$.
- $\Vdash(\exists v)A\in X \Rightarrow (H_{10})$ $\Vdash A[t]\in X$ para todo término t de _ $\Rightarrow$(hip.ind.) $[\Vdash A[t]]^{M,g}=1$ para todo término t de _ $\Leftrightarrow [A[t]]^{M,g}=0$ para todo término t $\Leftrightarrow [(\exists v)A[v]]^{M,g}=0 \Leftrightarrow [\Vdash(\exists v)A[v]]^{M,g}=1$.

┤

Las ramas abiertas de una tabla analítica pueden no ser conjuntos de Hintikka (la clave está en H_{10} y H_{11}). Sí lo son si la tabla se construye con arreglo al procedimiento que se detalla a continuación. Dada una enumeración $t_1,t_2,...$ de los términos de $\mathcal{P}$, una *tabla analítica sistemática* **T** para un conjunto de fórmulas signadas $A_1,...,A_n$ se identifica con el límite de la cadena $\mathbf{T}_0<_i\mathbf{T}_1<...<i\mathbf{T}_n<_i...$ tal que

(1) $\mathbf{T}_0=$ $\left\{\begin{array}{l} A_1\Vdash \\ . \\ . \\ . \\ A_1 \end{array}\right.$

(2) Si $\mathbf{T}_k$ es cerrada, $\mathbf{T}_k=\mathbf{T}_{k+1}$, en cuyo caso, además, $\mathbf{T}=\mathbf{T}_k$. Lo mismo sucede cuando todo no-atómico de cada rama abierta de $\mathbf{T}_k$ ya ha sido usado. Si no es así, tómese de entre los nodos no atómicos no usados de las ramas abiertas de $\mathbf{T}_k$ el de menor nivel situado más a la izquierda. Si ese nodo no es de una de las formas $\Vdash(\exists v)A$, $\Vdash(\forall v)A$, $(\exists v)\Vdash$, $(\forall v)A\Vdash$, extiéndase cada rama abierta de $\mathbf{T}_k$ que pase por ese nodo aplicando la regla correspondiente y declárese usado el nodo-premisa. Si el nodo es de la forma $(\exists v)A\Vdash$ o de la forma $\Vdash(\forall v)A$, tómese el primer término de la enumeración que no ocurra en $\mathbf{T}_k$, t_j, y añádase a cada rama abierta que pase por ese nodo $A[t_j]\Vdash$ o $\Vdash A[t_j]$, según el caso, y declárese usado el nodo-premisa. Finalmente, si el nodo es de la forma $(\forall v)A\Vdash$ o de la forma $\Vdash(\exists v)A$, extiéndase cada rama abierta Θ que pase por ese nodo añadiendo sucesivamente $A[t_i]\Vdash$ y $(\forall v)A\Vdash$, en el primer caso, o, en el segundo, $\Vdash A[t_i]$ y $\Vdash(\exists v)A$, donde t_i es el primer término de la enumeración tal que $A[t_i]\Vdash$, o $\Vdash A[t_i]$, no ocurre en Θ, y declárese usada la fórmula-premisa. El resultado de estas manipulaciones es $\mathbf{T}_{k+1}$.

Una tabla analítica sistemática no es, propiamente, una tabla analítica, debido a la iteración de las fórmulas de los tipos $(\forall v)A\Vdash$ y $\Vdash(\exists v)A$ descrita hace un momento. No obstante, si se omiten esas repeticiones el resultado es una tabla analítica *sensu propio*. En lo que sigue hablaremos en ocasiones de una «tabla analítica sistemática» para referirnos, de hecho, a la tabla analítica obtenible del modo indicado.

Una *tabla analítica sistemática* está *acabada* si todos sus nodos no atómicos han sido usados. De la descripción del proceso de construcción de tablas analíticas sistemáticas se desprende:

LEMA 17. Toda rama abierta de una tabla sistemática acabada es un conjunto saturado descendente.

Este lema y el lema 16 llevan a su vez a:

LEMA 18. Para toda rama abierta Θ de una tabla sistemática acabada hay un modelo $M=<U,I>$ de $\wp$ y una asignación g sobre U tales que para cualquier $A\in\Theta$, $[A]^{M,g}=1$.

Para obtener un teorema de completitud para TC hay que introducir una ligera modificación en las definiciones precedentes de «tabla analítica para X» y «tabla analítica sistemática para X», motivada por la necesidad de disponer de definiciones apropiadas cuando X no es finito.

> Una *tabla analítica en TC* para un conjunto de fórmulas signadas X es un árbol cuyos nodos son o bien fórmulas signadas de X o bien resultan de aplicar a nodos que les dominan reglas de TC.
>
> Una *tabla analítica sistemática* **T** para un conjunto de fórmulas signadas X, dada una enumeración $t_0,t_1,...$ de los términos de $\wp$ y una enumeración $A_0,A_1,...$ de las fórmulas de

X, se identifica con el límite de la cadena $\mathbf{T}_0<_i\mathbf{T}_1<...<i\mathbf{T}_n<_i...$ tal que (1) $\mathbf{T}_0=\{A_0\}$ y (2) $\mathbf{T}_{k+1}$ se define como antes si $\mathbf{T}_k$ es cerrada y en otro caso como el resultado de añadir como nodo terminal de cada rama abierta de $\mathbf{T}_k$ la fórmula A_{k+1} (si existe) y proceder entonces como se indicó antes.

Estas alteraciones no afectan a la definición de derivabilidad en TC, ya que, por el lema de König, toda tabla analítica cerrada para X, sea cual sea el cardinal de X, es finita.

LEMA 19 (DE KÖNIG). Todo árbol finitamente ramificado con infinitos nodos contiene al menos una rama infinita.

DEMOSTRACIÓN. Llamemos «fecundos» (y hasta qué punto) a aquellos nodos que dominan a una infinidad de nodos. Por hipótesis el árbol que se está considerando tiene infinitos nodos y todos ellos son dominados por su origen; por tanto el origen del árbol es fecundo. Como el árbol es finitamente ramificado, todo nodo tiene finitos sucesores y por tanto si todos los sucesores de un nodo son infecundos, el propio nodo es infecundo. Así pues, un nodo fecundo siempre tiene un sucesor fecundo. Tomando consecutivamente el origen del árbol, un sucesor fecundo del origen, un sucesor fecundo del nodo anterior, etc. se genera una rama infinita.

⊣

TEOREMA 27 (DE COMPLETITUD). Si $X\models_{LFC}A$ entonces $X\vdash_{TC}A$.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $X\models_{LFC}A$ pero no $X\vdash_{TC}A$. En tal caso toda tabla analítica para $X\Vdash \cup \{\Vdash A\}$ es abierta y *a fortiori* lo es cualquier tabla analítica sistemática para ese conjunto. Sea $\mathbf{T}$ una tabla semejante y Θ una rama abierta de $\mathbf{T}$. Por el lema 18 hay un modelo $M=<U,I>$ y una asignación g sobre U tales que para toda fórmula $B\in X$, $[B]^{M,g}=1$ y $[A]^{M,g}=0$. *Ergo* no $X\models_{LFC}A$, contra la hipótesis de partida.

⊣

CORTE EN TABLAS ANALÍTICAS: TEOREMA DE ELIMINACIÓN.

Una diferencia llamativa entre los sistemas TSS y los sistemas TS es que éstos carecen de reglas estructurales. Como ya se ha señalado, no es necesariamente una ventaja, como se advierte cuando se intenta demostrar directamente la equivalencia de los TS y los HS.

Sabemos que los TS son equivalentes a los SS, los SS^- y los HS: por T7-T9, SS≅HS; por Corolario 5, SS≅SS^-; por T19-21 TSS≅TS; y por las observaciones de páginas anteriores, TSS≅SS. Pero esta demostración de la equivalencia deductiva de los TS y los HS a través de los TSS explota la presencia de la regla de Corte y su ulterior eliminabilidad en los sistemas de cálculo secuencial.

¿Qué sucedería si quisiéramos establecer la equivalencia de los sistemas de tablas analíticas TS y los sistemas hilbertianos HS sin pasar por los sistemas de cálculo secuencial? Para demostrar que si $X\vdash_{HS}A$ entonces $X\vdash_{TS}A$ tendríamos que demostrar, entre otras cosas, que la regla de *modus ponens* preserva la derivabilidad en tablas analíticas. Es decir, que si hay sendas tablas cerradas para $X \cup \{\Vdash A\}$ y para $X \cup \{A\Vdash\}$, donde X es un conjunto de fórmulas signadas, entonces hay una tabla cerrada para X. Cuando hay una tabla cerrada para X si hay una tabla cerrada para $X \cup \{\Vdash A\}$ y otra para $X \cup \{A\Vdash\}$, se dice que A es *eliminable*. El análogo del teorema fundamental de Gentzen puede formularse entonces así: toda fórmula (no signada) es eliminable.

Para demostrar esa proposición hay que introducir alguna terminología adicional. Un conjunto de fórmulas cerradas X es *cerrado* si hay una tabla analítica cerrada para X. Asímismo se dice que X *cierra con peso* $n\in N$ si hay una tabla analítica cerrada para X, $\mathbf{T}$, y card($\mathbf{T}$)-card(X)=n.[3] X *cierra via A con peso n* si hay una tabla cerrada para X con peso n y A es la primera fórmula de X usada en su construcción. Finalmente, A es *n-eliminable* comporta que para todo conjunto finito X, si $X \cup \{A\Vdash\}$ cierra con peso i y $X \cup \{\Vdash A\}$ cierra con peso j, i+j=n, X cierra.

El lema siguiente es el análogo para tablas analíticas del lema 4.

[3] Por card($\mathbf{T}$) se entiende el cardinal del conjunto de sus nodos.

LEMA 20. Sean n,k∈N tales que para toda fórmula A, (1) si c(A)<n, A es eliminable, y (2) si c(A)=n, para todo j<k, A es j-eliminable. Entonces toda fórmula B, c(B)=n, es eliminable.

DEMOSTRACIÓN. Sea B una fórmula cualquiera de complejidad n y supóngase que X ∪ {B⊩} cierra con peso i y X ∪ {⊩B} cierra con peso j. Para demostrar que X cierra procedemos por inducción sobre n=i+j. En primer lugar, si i=0 o j=0, X cierra. Si, por ejemplo, j=0, o hay una fórmula C, ⊩C,C⊩∈X, en cuyo caso X cierra con peso 0, o B⊩∈X, en cuyo caso X ∪ {⊩B}=X, que por hipótesis cierra con peso i. Así pues, asúmase que i,j>0. Si X ∪ {B⊩} cierra via C con peso i y X ∪ {⊩B} cierra via D con peso j, hay que considerar dos grupos de casos:

[a] B⊩≠C o ⊩B≠D,
[b] B⊩=C y B⊩=D.

[a] Considérese para simplificar que B⊩≠C (el otro subcaso se trata de manera análoga). Aunque habría que considerar tantos casos como reglas de TC, aquí se considerarán explícitamente los cuatro siguientes: (a.1) C=C'&C"⊩, (a.2) C=⊩C'&C", (a.3) C=(∀v)C'⊩, y (a.4) C=⊩(∀v)C', encomendándose al lector los casos restantes.

[a.1] Si X ∪ {B⊩} cierra via C'&C"⊩ con peso i entonces X ∪ {B⊩,C'⊩} o X ∪ {B⊩,C"⊩} cierra con peso <i. Por otra parte, X ∪ {⊩B,C'&C"⊩} cierra con peso j, puesto que C'&C"⊩∈X, y lo mismo vale para X ∪ {⊩B,C'⊩} y X ∪ {⊩B,C"⊩}. Así, o bien X ∪ {B⊩,C'⊩} y X ∪ {⊩B,C'⊩} cierran con peso combinado <i+j o bien X ∪ {B⊩,C"⊩} y X ∪ {⊩B,C"⊩} cierran con peso combinado <i+j, y como c(B)=n, por la segunda condición del enunciado del lema, B es eliminable. Por tanto, X ∪ {C'⊩} o X ∪ {C"⊩} cierra. Evidentemente en cualquiera de los dos casos X ∪ {C'&C"⊩} cierra.

[a.2] Si X ∪ {B⊩} cierra via ⊩C'&C" con peso i entonces X ∪ {B⊩,⊩C'} y X ∪ {B⊩,⊩C"} cierran con peso <i. Además, X ∪ {⊩B,⊩C'&C"} cierra con peso j, puesto que ⊩C'&C"∈X, y lo mismo vale para X ∪ {⊩B,⊩C'} y X ∪ {⊩B,⊩C"}. Por tanto, X ∪ {B⊩,⊩C'} y X ∪ {⊩B,⊩C'} cierran con peso combinado <i+j al igual que X ∪ {B⊩,⊩C"} y X ∪ {⊩B,⊩C"}. Por la segunda condición del enunciado del lema, se sigue que X ∪ {⊩C'} y X ∪ {⊩C"} cierran, y ulteriormente que X ∪ {⊩C'&C"}=X cierra. [a.3] Si X ∪ {B⊩} cierra via (∀v)C'⊩ con peso i entonces X ∪ {B⊩,C´[t]⊩} cierra con peso <i para algún término t. X ∪ {⊩B,(∀v)C'⊩} cierra con peso j ya que (∀v)C'⊩∈X, lo mismo que X ∪ {⊩B,C´[t]⊩}. Así X ∪ {B⊩,C´[t]⊩} y X ∪ {⊩B,C'[t]⊩} cierran con peso combinado <i+j, y como c(B)=n, de nuevo por la segunda condición, B es eliminable y X ∪ {C'[t]⊩} cierra y entonces también lo hace X ∪ {(∀v)C'⊩}=X.

[a.4] Si X ∪ {B⊩} cierra via ⊩(∀v)C' con peso i, X ∪ {B⊩,⊩C´[w]} cierra con peso <i para alguna variable «nueva» w (cfr. página 44) y X ∪ {⊩B,⊩C'[w]} cierra con peso j. Como X ∪ {B⊩,⊩C´[w]} y X ∪ {⊩B,⊩C'[w]} cierran con peso combinado <i+j, y como c(B)=n, B es eliminable y X ∪ {⊩C'[w]} cierra. Pero si es así, también lo hace X ∪ {⊩(∀v)C'}=X.

b] X ∪ {B⊩} cierra via B⊩ con peso i y X ∪ {⊩B} cierra via ⊩B con peso j. Seleccionando como casos representativos los mismos que en a, se tiene que o bien B⊩=C'&C"⊩ y ⊩B=⊩C'&C" o bien B⊩=(∀v)C'⊩ y ⊩B=⊩(∀v)C'.

[b.1] Empleando el mismo razonamiento que en a.1 se concluye que X ∪ {C'&C"⊩,C'⊩} o X ∪ {C'&C"⊩,C"⊩} cierra con peso m<i. Supongamos por comodidad que X ∪ {C'&C"⊩,C'⊩} cierra conm peso <i. Si X ∪ {⊩C'&C"} cierra con peso j, lo mismo sucede con su superconjunto X ∪ {⊩C'&C",C'⊩}. Como m+j<i+j y c(C'&C")=n, X ∪ {C´⊩} cierra. Razonando ahora como en a.2 se concluye que X ∪ {⊩C'&C",⊩C'} cierra con peso k<j y X ∪ {C'&C"⊩,⊩C'} con peso j. p+j<i+j y así X ∪ {⊩C'} cierra. Finalmente, c(C´)<n, de manera que por la primera condición del lema C´ es eliminable, de donde se desprende que X cierra.

[b.2] Aplicando el razonamiento de a.3 se llega a X ∪ {(∀v)C'⊩,C'[t]⊩} cierra con peso <i para algún término t, y como por lo demás X ∪ {⊩(∀v)C',C'[t]⊩} cierra con peso j, X ∪ {C'[t]⊩} cierra. Una argumentación análoga a la de a.4 permite inferir que X ∪ {⊩C'[w]} también cierra. Manipulando las aplicaciones de ⊩∀ y ∀⊩ en las tablas correspondientes según las convenciones

expuestas en el epígrafe *Convenciones sobre el uso de las variables*… del capítulo3, se consigue «igualar» w y t. Como c(C´[w])<n, X cierra por la primera condición del lema.

⊣

TEOREMA 28 (DE ELIMINACIÓN PARA TC). Toda fórmula de $\wp$ es eliminable en TC.
DEMOSTRACIÓN. Si hubiera fórmulas ineliminables, habría un n para el que se cumpliría que existe una fórmula A, c(A)=n, ineliminable y, al mismo tiempo, que para todo m<n, si c(B)=m entonces B es eliminable. Decir que una fórmula es eliminable es decir que lo es para todo entero k. Por tanto, si A fuera ineliminable habría un entero k tal que A no sería k-eliminable aunque sí lo sería para todo j<k. En suma, (1) toda fórmula B de complejidad <n sería eliminable y (2) toda fórmula B de complejidad n sería j-eliminable para cualquier j<k. Del lema 16 se desprende entonces que A sería k-eliminable, contra la hipótesis inicial.

⊣

EJERCICIOS.

(1) Demostrar, usando el lema de König (L19), que toda tabla analítica cerrada es finita.
(2) Demostrar directamente (es decir, sin pasar por SS y empleando el teorema 28) que para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula A de $\wp$, si $X \vdash_{HC} A$ entonces $X \vdash_{TC} A$.
(3) Demostrar los análogos del lema 20 y el teorema 28 para TI.
(4) Demostrar que para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula A de $\wp$ se cumple que si $X \vdash_{TC} A$ entonces $X \vdash_{HC} A$.
Pista.- Sea ' la función de fórmulas signadas en fórmulas de $\wp$ definida por las estipulaciones $(A\Vdash)' = A$ y $(\Vdash A)' = \neg A$. Demuéstrese a continuación que si hay una tabla analítica cerrada para X entonces $X' \vdash_{HC} B$ para cualquier fórmula B (X' está formado por las imágenes de las fórmulas de X bajo la función '). El siguiente paso es establecer el lema: si $X, \neg A \vdash_{HC} \neg B$ y $X \vdash_{HC} B$ entonces $X \vdash_{HC} A$. Finalmente, mostrar que si hay una tabla analítica cerrada para $X \cup \{\Vdash A\}$ -donde todas las fórmulas de X son signadas y de la forma $B\Vdash$- entonces $X \vdash_{HC} A$.