

Parece, entonces, que el papel de la regla de Corte es asegurar la transitividad de \vdash_{SS} . Sucede sin embargo que los axiomas, reglas de datos y reglas operacionales de SM, SI y SC definen de hecho una relación de consecuencia que es transitiva, y por consiguiente la regla de Corte es eliminable: si hay en SS (=SM, SI, SC) una demostración de un secuyente $X \Vdash Y$, hay una demostración de $X \Vdash Y$ sin regla de Corte.

Para demostrar lo enunciado en el párrafo anterior hay que establecer algunas nociones y una convención notacional.

- [1] El *grado de una aplicación de Corte* es igual a la complejidad o grado lógico de su fórmula de corte + 1.
- [2] El *grado de una demostración π* , $g(\pi)$, es el mayor de entre los grados de las aplicaciones de Corte en π .

Se dirá indistintamente que una demostración π no contiene aplicaciones de la regla de Corte o que $g(\pi)=0$. Si X es una secuencia de (ocurrencias de) fórmulas y A es una fórmula, escribiremos 'X-A' para indicar la secuencia resultante de eliminar de X algunas ocurrencias de A.

La demostración de la eliminabilidad de Corte es algo farragosa y es fácil que los árboles no nos dejen ver el bosque (y nunca mejor dicho). Por eso antes de acometer la demostración propiamente dicha, veamos un esbozo que destaca sus aspectos fundamentales. Pueden distinguirse dos etapas en la eliminación de la regla de Corte:

- (1) *Reducción del grado de las demostraciones*: para toda demostración de grado $k > 1$ de un secuyente hay una demostración de grado $< k$ de ese mismo secuyente; por consiguiente, todo secuyente demostrable tiene una demostración de grado ≤ 1 .
- (2) *Eliminación de cortes de grado 1*: si hay una demostración de grado ≤ 1 de un secuyente, hay una demostración libre de Corte.

Una demostración de un secuyente $X, W \Vdash Y, Z$ que termina con una aplicación de Corte puede esquematizarse como sigue:

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \pi_1 \\ \frac{\frac{X' \Vdash Y'}{X'' \Vdash A, Y} [R] \quad \frac{W' \Vdash Z'}{W'', A \Vdash Z''} [R']}{X, W \Vdash Y, Z} \end{array}$$

$$\lambda_2 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \pi_2$$

$$\frac{X \Vdash A, Y \quad W, A \Vdash Z}{X, W \Vdash Y, Z}$$

Las subdemostraciones λ_1 y π_1 concluyen aplicando las reglas R y R', respectivamente, que introducen la fórmula de corte A de la aplicación final de esta regla. Si $c(A) > 1$, la clave está en aquellos casos en los que R es la regla de introducción en el consecuente del símbolo lógico principal de A y R' la regla de introducción den el antecedente del símbolo lógico principal de A. Por ejemplo,

(a)

$$\lambda_1 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \pi_1$$

$$\frac{[\Vdash \neg] \quad \frac{X', B \Vdash Y'}{X' \Vdash \neg B, Y'} \quad \frac{W' \Vdash B, Z'}{W', \neg B \Vdash Z'} [\neg \Vdash]}{\quad}$$

(b)

$$\lambda_1 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \pi_1$$

$$\frac{\& \Vdash \quad \frac{X' \Vdash B, Y' \quad X' \Vdash C, Y'}{X' \Vdash B \& C, Y'} \quad \frac{W', B \Vdash Z'}{W', B \& C \Vdash Z'}}{\& \Vdash}$$

(c)

$$\lambda_1 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \pi_1$$

$$\frac{\frac{X' \Vdash B[v], Y'}{X' \Vdash (\forall v) B[v], Y'} \quad \frac{W', B[v] \Vdash Z'}{W', (\forall v) B[v] \Vdash Z'} \quad \forall \Vdash}{\Vdash \forall} \quad \forall \Vdash$$

Para obtener una nueva demostración de $X, W \Vdash Y, Z$ se aplica Corte sobre las premisas de R y R'; es decir (con una buena dosis de simplificación), se reemplaza la derivación original por

$$\lambda_1 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \pi_1$$

$$\frac{\frac{X' \Vdash Y'}{X'', W''-A \Vdash Y''-A, Z''} \quad \frac{W' \Vdash Z'}{W', (\forall v) B[v] \Vdash Z'}}{X'', W''-A \Vdash Y''-A, Z''} \quad \text{Corte}$$

$$\lambda_2 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X, W''-A \Vdash Y-A, Z'' \end{array} \right\}$$

$$\pi_2 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X, W \Vdash Y, Z \end{array} \right\}$$

Así, en los ejemplos arriba considerados, se tendría:

(a)

$$\lambda_1 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \pi_1$$

$$\frac{\frac{X', B \Vdash Y'}{X', W' \Vdash Y', Z'} \quad \frac{W' \Vdash B, Z'}{W', B, Z'}}{X', W' \Vdash Y', Z'} \quad \text{Corte}$$

(b)

$$\lambda_1 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \pi_1$$

$$\frac{\frac{X' \Vdash B, Y'}{X', W' \Vdash Y', Z'} \quad \frac{W', B \Vdash Z'}{W', B, Z'}}{X', W' \Vdash Y', Z'} \quad \text{Corte}$$

(c)

$$\lambda_1 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \pi_1$$

$$\frac{\frac{X' \Vdash B[v], Y'}{X', W' \Vdash Y', Z'} \quad \frac{W', B[v] \Vdash Z'}{W', B[v], Z'}}{X', W' \Vdash Y', Z'} \quad \text{Corte}$$

¿Qué se gana «adelantando» la aplicación de Corte? La complejidad de la fórmula de Corte de la nueva aplicación es, en todos los casos, estrictamente menor que la de la aplicación original, así que iterando el procedimiento las veces que sea preciso se llegaría a una demostración de $X, W \Vdash Y, Z$ de grado 1 (es decir, en la que las fórmulas de corte son fórmulas atómicas). La moraleja es que la transitividad de la relación de consecuencia se expresa en los sistemas secuenciales, al menos en parte y dadas ciertas condiciones mínimas, a través de la simetría de las reglas de introducción en el antecedente y el consecuente de un símbolo lógico. Esa simetría permite retroaer a las premisas una aplicación no atómica de la regla de corte.

Vayamos con la segunda etapa. ¿Cómo aparece una fórmula atómica en un secuyente que es un nodo de una demostración? La conclusión a la que se llega inspeccionando las reglas de los sistemas secuenciales es que o figura en un axioma o resulta de aplicar debilitamiento. Por tanto, si 'A' es una fórmula atómica en

$$\begin{array}{c}
 \lambda_1 \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \pi_1 \\
 \text{[R]} \frac{\frac{X' \Vdash Y'}{X'' \Vdash A, Y''}}{\quad} \quad \frac{W' \Vdash Z'}{W'', A \Vdash Z''} \text{[R']} \\
 \lambda_2 \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \pi_2 \\
 \frac{X \Vdash A, Y \quad W, A \Vdash Z}{X, W \Vdash Y, Z}
 \end{array}$$

hay tres posibilidades, según las convenciones de representación acordadas: R es \Vdash D (SI y SC), R' es \Vdash D, o $X'' \Vdash A, Y''$ y $W'', A \Vdash Z''$ son axiomas. En este último supuesto, la demostración puede reescribirse más apropiadamente como

$$\begin{array}{c}
 \lambda_1 \quad A \Vdash A \quad \text{Axioma} \quad \quad A \Vdash A \quad \text{Axioma} \quad \pi_1 \\
 \lambda_2 \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \pi_2 \\
 \frac{X \Vdash A, Y \quad W, A \Vdash Z}{X, W \Vdash Y, Z}
 \end{array}$$

que se transformaría en

$$\begin{array}{c}
 \lambda_1 = \pi_1 \quad \quad \quad A \Vdash A \quad \text{Axioma} \\
 \lambda_2 \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \\
 \pi_2 \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \\
 \frac{\frac{X \Vdash A, Y}{\quad}}{\quad} \\
 \frac{\quad}{X, W \Vdash Y, Z}
 \end{array}$$

Como los dos casos restantes son similares, se expone únicamente el primero. Si R es \Vdash D, la demostración obtenida es

$$\begin{array}{c}
 \lambda_1 \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \\
 \lambda_2 \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \\
 \text{D} \Vdash \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \\
 \Vdash \text{D} \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \\
 \frac{\frac{X' \Vdash Y'}{\quad}}{\quad} \\
 \frac{\quad}{X \Vdash Y} \\
 \frac{\quad}{\quad} \\
 \frac{\quad}{X, W \Vdash Y} \\
 \frac{\quad}{\quad} \\
 \frac{\quad}{X, W \Vdash Y, Z}
 \end{array}$$

En las demostraciones de la eliminabilidad de la regla de Corte para SM, SI y SC intervienen los mismos mecanismo, aunque el enunciado del lema fundamental para SC difiere de su enunciado para SM y SI. Por ello, la eliminabilidad de Corte se demuestra para SC, indicándose después la formulación del lema fundamental para los sistemas restantes.

LEMA 4. Sean λ una demostración en SC de un secuyente $X \Vdash Y$ y π una demostración en SC de un secuyente $W \Vdash Z$ tales que $g(\lambda), g(\pi) < c(A)$. Entonces existe una demostración μ en SC de $X, W-A \Vdash Y-A, Z, g(\mu) < c(A)$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre $\text{alt}(\lambda) + \text{alt}(\pi) = n$; así, la demostración se articula como sigue:

BASE, $n=2$; se procede por (sub)inducción sobre $\text{long}(\lambda) + \text{long}(\pi) = m$. 1.1 Si $m=2$, $X \Vdash Y$ y $W \Vdash Z$ son axiomas; 1.2 si $m > 2$ λ o π termina con una aplicación de una regla de datos...

DE k A $k+1$; hay que considerar los casos en los que λ y π concluyen aplicando una regla operacional o Corte (2.1, 2.2,...).

1.1 λ y π son axiomas, $B \Vdash B$ y $C \Vdash C$, respectivamente. Si $B=C=A$, $X, W-A \Vdash Y-A, Z$ es $A \Vdash A$. Si $B \neq A$, $X, W-A \Vdash Y-A, Z$ es $B, \{C\}-A \Vdash B, C$; en cuyo caso,

$$\frac{\frac{\frac{B \Vdash B}{B, \{C\}-A \Vdash B} \quad [D \Vdash]}{B, \{C\}-A \Vdash C, B} \quad [\Vdash D]}{B, \{C\}-A \Vdash B, C} \quad [\Vdash P]$$

Finalmente, si $C \neq A$ y por consiguiente $X, W-A \Vdash Y-A, Z$ es $B, C \Vdash \{B\}-A, C$:

$$\frac{\frac{\frac{C \Vdash C}{C, B \Vdash C} \quad [D \Vdash]}{B, C \Vdash C} \quad [P \Vdash]}{B, C \Vdash \{B\}-A, C} \quad [\Vdash P]$$

1.2 Al menos una de las dos λ o π es de la forma

$$\frac{\cdot}{\frac{\cdot}{\Sigma} \quad [R]} \quad \Sigma'$$

donde R es una regla de datos. El esquema de razonamiento es en todos los casos el mismo: se aplica la hipótesis de (sub)inducción sobre Σ y R sobre el secuyente resultante. Por ejemplo,

$$\frac{\frac{\lambda}{\cdot} \quad \cdot}{\frac{X' \Vdash Y}{X', B \Vdash Y} \quad [D \Vdash]}$$

La hipótesis de (sub)inducción da

$$[P \Vdash] \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{X', W-A \Vdash Y-A, Z}{X', W-A, B \Vdash Y-A, Z} \quad [D \Vdash] \\ \cdot \\ \cdot \\ X', B, W-A \Vdash Y-A, Z \end{array} \right.$$

2. Convergamos en representar λ y π como sigue:

$$\frac{\frac{\lambda}{\cdot} \quad \cdot}{\frac{X \Vdash Y}{X \Vdash Y} \quad [R]} \quad \frac{\frac{\pi}{\cdot} \quad \cdot}{\frac{W \Vdash Z}{W \Vdash Z} \quad [R']}$$

Se consideran entonces cinco (grupos de) casos: 2.1 R o R' es una regla de datos, 2.2 R o R' es la regla de Corte, 2.3 R es una regla operacional que no se aplica para introducir el símbolo lógico

2.5 Estos son los casos claves que, como se verá, sacan a la luz la simetría de las reglas operacionales de introducción por la izquierda y por la derecha de cada operador. El quid consiste, en todos los subcasos a considerar, en aplicar Corte con una fórmula de corte B tal que $c(B) < c(A)$.
 [∧]

$$\begin{array}{c} \lambda \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{X \Vdash B, Y' \quad X \Vdash C, Y'}{X \Vdash B \& C, Y'} \\ \& \Vdash \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{W', B \Vdash Z}{W', B \& C \Vdash Z} \\ \& \Vdash \end{array}$$

Aplicando la hipótesis de inducción a $X \Vdash B, Y'$ y $W', B \& C \Vdash Z$, por una parte, y a $X \Vdash B \& C, Y'$ y $W', B \Vdash Z$, por la otra, se tiene (advíertase que $X, (W', B) \text{-} A \Vdash (B \& C, Y') \text{-} A, Z$ es $X, W' \text{-} A, B \Vdash Y' \text{-} A, Z$),

$$\begin{array}{c} \mu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{X, W' \text{-} A \Vdash (B, Y') \text{-} A, Z \quad X, W' \text{-} A, B \Vdash Y' \text{-} A, Z}{X, W' \text{-} A, X, W' \text{-} A \Vdash Y' \text{-} A, Z, Y' \text{-} A, Z} \text{ hip.ind.} \\ \text{[Corte]} \\ \{ \cdot \\ \text{R. de datos} \cdot \\ \cdot \\ X, W' \text{-} A \Vdash Y' \text{-} A, Z \end{array}$$

[∨]

$$\begin{array}{c} \lambda \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{X \Vdash B, Y' \quad \cdot}{X \Vdash B \vee C, Y'} \\ \Vdash \vee \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{W', B \Vdash Z \quad W', C \Vdash Z}{W', B \vee C \Vdash Z} \\ \vee \Vdash \end{array}$$

Aplicando la hipótesis de inducción a $X \Vdash B, Y'$ y $W', B \vee C \Vdash Z$, por una parte, y a $X \Vdash B \vee C, Y'$ y $W', B \Vdash Z$, por la otra, se tiene

$$\begin{array}{c} \mu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{X, W' \text{-} A \Vdash B, Y' \text{-} A, Z \quad X, W' \text{-} A, B \Vdash Y' \text{-} A, Z}{X, W' \text{-} A, X, W' \text{-} A \Vdash Y' \text{-} A, Z, Y' \text{-} A, Z} \text{ hip.ind.} \\ \text{Corte} \\ \{ \cdot \\ \text{R. de datos} \cdot \\ \cdot \\ X, W' \text{-} A \Vdash Y' \text{-} A, Z \end{array}$$

[¬]

$$\begin{array}{c} \lambda \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{X, B \Vdash Y'}{X \Vdash \neg B, Y'} \\ \Vdash \neg \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{W' \Vdash B, Z}{W', \neg B \Vdash Z} \\ \neg \Vdash \end{array}$$

Aplicando la hipótesis de inducción a $X, B \Vdash Y'$ y $W', \neg B \Vdash Z$, por una parte, y a $X \Vdash \neg B, Y'$ y $W' \Vdash B, Z$, por la otra, y sirviéndose de reglas de datos se obtiene

$$\begin{array}{c}
 \mu \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \frac{X, W'-A, B \Vdash Y'-A, Z \quad X, W'-A \Vdash B, Y'-A, Z}{X, W'-A, X, W'-A \Vdash Y'-A, Z, Y'-A, Z} \text{ hip.ind.} \\
 \text{[Corte]} \\
 \text{R. de datos } \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X, W'-A \Vdash Y'-A, Z \end{array} \right.
 \end{array}$$

[→]

$$\begin{array}{c}
 \lambda \qquad \qquad \qquad \pi \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \frac{X, B \Vdash C, Y'}{X \Vdash B \rightarrow C, Y'} \Vdash \rightarrow \quad \frac{W' \Vdash B, Z \quad W', C \Vdash Z}{W', B \rightarrow C \Vdash Z} \Vdash \rightarrow
 \end{array}$$

Aplicando la hipótesis de inducción a la premisa de [$\Vdash \rightarrow$] en λ y al último secuyente de π , por una parte, y a la premisa izquierda de [$\rightarrow \Vdash$] en π y a la última fórmula de λ , por la otra, se tiene, no sin el inevitable concurso de reglas de datos,

$$\begin{array}{c}
 \mu \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \frac{X, W'-A, B \Vdash C, Y'-A, Z \quad X, W'-A \Vdash B, Y'-A, Z}{X, W'-A, X, W'-A \Vdash C, Y'-A, Z, Y'-A, Z} \text{ hip.ind.} \\
 \text{Corte} \\
 \text{R. de datos } \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X, W'-A \Vdash C, Y'-A, Z \end{array} \right.
 \end{array}$$

La demostración prosigue recurriendo ahora a la hipótesis de inducción para la premisa derecha de [$\rightarrow \Vdash$] en π y a la última fórmula de λ :

$$\begin{array}{c}
 \frac{X, W'-A \Vdash C, Y'-A, Z \quad X, W'-A, C \Vdash Y'-A, Z}{X, W'-A, X, W'-A \Vdash C, Y'-A, Z, Y'-A, Z} \text{ Hip.ind.} \\
 \text{Corte} \\
 \text{R. de datos } \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ X, W'-A \Vdash Y'-A, Z \end{array} \right.
 \end{array}$$

[∀]

$$\begin{array}{c}
 \lambda \qquad \qquad \qquad \pi \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \frac{X \Vdash B, Y'}{X \Vdash (\forall v) B, Y'} \quad \forall \Vdash \frac{W', B[v] \Vdash Z}{W', (\forall v) B[v] \Vdash Z} \quad \forall \Vdash
 \end{array}$$

Donde, en λ , la variable 'v' no está libre en X, Y. Aplicando la hipótesis de inducción a la premisa de [$\Vdash \forall$] en λ y al último secuyente de π , por una parte, y a la premisa de [$\forall \Vdash$] en π y a la última fórmula de λ , por la otra, se obtendrían, utilizando de reglas de datos, senda demostraciones

$$\begin{array}{ccc} \mu' & & \mu'' \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ X, W'-A \Vdash B[v], Y'-A, Z & & X, W'-A, B[t] \Vdash Y'-A, Z \end{array}$$

La dificultad reside en que siendo $B[v]$ y $B[t]$ distintas no puede aplicarse la regla de Corte.

Veamos cómo obtener a partir de λ una demostración de $X \Vdash B[t], Y'$ -o de un seciente equivalente. Las convenciones establecidas en su momento permiten suponer que λ cumple las condiciones:

- (1) ningún seciente en λ contiene ocurrencias libres y ligadas de una misma variable,
- (2) las variables dependientes de las aplicaciones de las reglas $\Vdash \forall$ y $\Vdash \exists$ en λ son distintas entre sí,
- (3) todas las ocurrencias de una variable ligada de una fórmula B en un seciente de λ caen bajo el alcance de una misma ocurrencia de un cuantificador.

Sean x_1, \dots, x_j las variables de t . Constrúyase una demostración λ' que, además de 1-3, satisfaga el requisito de que las x_i , $1 \leq i \leq j$, no ocurren ligadas en ninguna fórmula de un seciente de λ' ni como variables dependientes en la aplicación de las reglas $\Vdash \forall$ y $\Vdash \exists$. Sustituyendo v por t en λ' se obtiene entonces una demostración λ'' de $X \Vdash B[t], Y'$. Esta demostración permite el usual corte «cruzado»:

$$\begin{array}{ccc} \mu' & & \mu'' \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{X, W'-A \Vdash B[t], Y'-A, Z \quad X, W'-A, B[t] \Vdash Y'-A, Z}{X, W'-A, X, W'-A \Vdash Y'-A, Z, Y'-A, Z} & & \text{Corte} \\ \text{R. de datos } \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X, W'-A \Vdash C, Y'-A, Z \end{array} \right. & & \end{array}$$

[\exists]

$$\begin{array}{ccc} \lambda & & \pi \\ X \Vdash B[t], Y' & & W', B[v] \Vdash Z \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \Vdash \exists \quad X \Vdash (\exists v) B[v], Y' & & W', (\exists v) B[v] \Vdash Z \quad \Vdash \exists \end{array}$$

Reemplazando $W', B[v] \Vdash Z$ por $W', B[t] \Vdash Z$ como en el caso precedente, y aplicando la hipótesis de inducción, por una parte, a $X \Vdash B[t], Y'$ y $W', (\exists v) B[v] \Vdash Z$, y, por la otra, a $W', B[t] \Vdash Z$ y $X \Vdash (\exists v) B[v], Y'$, se llega a

$$\begin{array}{ccc} \mu' & & \mu'' \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{X, W'-A \Vdash B[t], Y'-A, Z \quad X, W'-A, B[t] \Vdash Y'-A, Z}{X, W'-A, X, W'-A \Vdash Y'-A, Z, Y'-A, Z} & & \text{[Corte]} \\ \left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X, W'-A \Vdash C, Y'-A, Z \end{array} \right\} & & \text{R. de datos} \end{array}$$

†

TEOREMA 11. Si hay una demostración λ en SC de $X \Vdash Y$, $g(\lambda) > 0$ entonces hay una demostración π de $X \Vdash Y$ en SC, $g(\pi) = g(\lambda) - 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea pues λ una demostración en SC del seciente $X \Vdash Y$, $g(\lambda) = k$. Búscuese la primera aplicación de Corte en λ de grado k . Por tanto, λ puede representarse como

$$\mu \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{U \Vdash V \quad W \Vdash Z}{U, W-A \Vdash V-A, Z} \text{ [Corte]} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$v \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X \Vdash Y \end{array} \right.$$

donde 'A' es la fórmula de corte, $c(A) = k$, y las subdemostraciones de $U \Vdash V$ y $W \Vdash Z$ son de grado menor que k . Por el lema 4, hay una demostración ξ en SC de $U, W-A \Vdash V-A, Z$, $g(\xi) < k$. Reemplácese entonces λ por

$$\xi \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U, W-A \Vdash V-A, Z \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$v \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X \Vdash Y \end{array} \right.$$

Si no hay ninguna aplicación de Corte de grado k , esta demostración es π . En caso contrario, búscuese la primera aplicación de Corte de grado k en esta demostración y procédase como antes. Iterando el procedimiento tantas veces como sea preciso se obtiene una demostración π , $g(\pi) < k$. \dagger

Usando reiteradamente el teorema 11 se demuestra el teorema de eliminación de la regla de Corte:

COROLARIO 5. Si $X \Vdash Y$ es demostrable en SC entonces existe una demostración π de $X \Vdash Y$ en SC, $g(\pi) = 0$.

En lo sucesivo designaremos por medio de la expresión SC al sistema de cálculo secuencial resultante de omitir en SC la regla de Corte. El corolario 5 establece que los secientes demostrables en SC y SC son exactamente los mismos.

No obstante, la eliminación de la regla de Corte -ventajosa a otros respectos -puede tener un coste en términos de complejidad. Dadas dos demostraciones λ de $X \Vdash A, Y$ y π de $W, A \Vdash Z$, la regla de Corte proporciona una demostración de $X, W \Vdash Y, Z$ cuya altura es $\max(\text{alt}(\lambda), \text{alt}(\pi)) + 1$ y su grado $n + 1 \geq c(A)$. Defínase $4[n](k)$ como sigue: $4[0](k) = k$; $4[p+1](k) = 4^{4^p k}$. La demostración de $X, W \Vdash Y, Z$ obtenida a través de la eliminación de Corte tiene altura $\leq 4[n](k)$.

La eliminación de la regla de Corte para los sistemas SM y SI (y así la génesis de los sistemas SM $\bar{}$ y SI $\bar{}$) se ajusta al patrón que acabamos de ver. Las únicas novedades son que en su demostración habrá que considerar menos reglas de datos y la formulación del lema principal:

LEMA 5. Sean λ una demostración en SM/SI de un seciente $X \Vdash A$ y π una demostración en SM/SI de un seciente (i) $W \Vdash B$ o (ii) $W \Vdash$, tales que $g(\lambda), g(\pi) < c(A)$. Entonces existe una demostración μ en SM/SI de (i) $X, W-A \Vdash B$ o (ii) $X, W-A \Vdash$, $g(\mu) < c(A)$.

COROLARIO 6. Si $X \Vdash Y$ es demostrable en SM/SI entonces existe una demostración π de $X \Vdash Y$ en SM/SI, $g(\pi) = 0$.

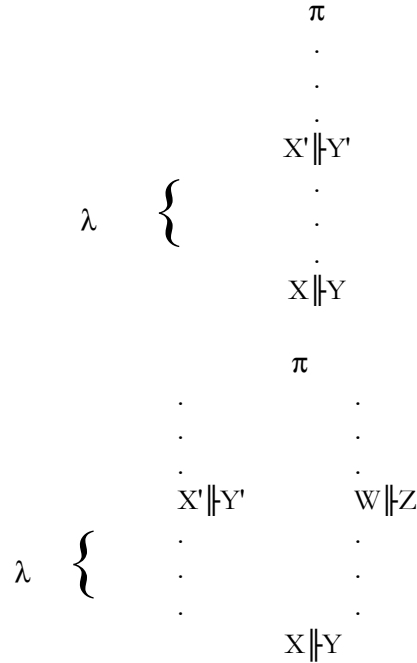
Los teoremas de eliminación (corolarios 5 y 6) pueden verse de dos modos levemente distintos:
 [A] con respecto a los SS, establecen que la regla Corte es *eliminable*: si hay una demostración de $X \Vdash Y$ en SS, hay una demostración sin regla de corte;
 [B] con respecto a los SS, establecen que la regla Corte es *admisibile*: si $X \Vdash A, Y$ y $W, A \Vdash Z$ son SC-demostrables, también lo es $X, W \Vdash Y, Z$; si $X \Vdash A$ y $W, A \Vdash Z$ son SM-/SI-demostrables, también lo es $X, W \Vdash Z$.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS SS.

Ya se ha señalado que lo que priva a los sistemas de cálculo de secuentes con regla de Corte de la propiedad de subfórmulas es justamente la presencia de esa regla. Por consiguiente,

TEOREMA 12. Si un secuyente $X \Vdash Y$ domina a un secuyente $X' \Vdash Y'$ en una demostración π en SS entonces para toda fórmula A que ocurre en $X' \Vdash Y'$ hay una fórmula B que ocurre en $X \Vdash Y$ y $A \in \text{SFG}(B)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $X \Vdash Y$ domina a $X' \Vdash Y'$ en π , ésta es de una de las formas:



La demostración procede entonces por inducción sobre la longitud de la subdemostración π . Como no ofrece dificultad alguna, queda para el lector.

Dos propiedades de los sistemas secuenciales asociadas a la ausencia de una regla de contracción generalizada en el consecuente son:

- 1] SS tiene la *propiedad de disyunción* syss, para cualesquiera fórmulas A y B de \mathcal{P} , si $\Vdash A \vee B$ es demostrable en SS entonces $\Vdash A$ o $\Vdash B$ es demostrable en SS;
- 2] SS tiene la *propiedad de existencia* syss, para cualquier fórmula A de \mathcal{P} , si $\Vdash (\exists v)A$ es demostrable en SS entonces para algún término t de \mathcal{P} , $\Vdash A[t]$ es demostrable en SS.

TEOREMA 13. SM- y SI- tienen las propiedades de disyunción y existencia.
DEMOSTRACIÓN. Para la lógica mínima, el resultado es una consecuencia inmediata de la ausencia de reglas de contracción en el consecuente. Para la lógica intuicionista, la presencia de una forma debilitada de contracción en el consecuente obliga establecer la no-derivabilidad del secuyente \Vdash (con antecedente y consecuente vacío). Adviértase a este respecto que (1) el secuyente vacío \Vdash no es un axioma de SI-, (2) el secuyente vacío no puede dominar a ningún secuyente no-vacío (es una consecuencia del teorema 12).

El cálculo de secuentes clásico, SC, carece de estas propiedades, debido a la presencia de la regla \vdash
 \vdash D, como ilustran los ejemplos siguientes.

$p \Vdash p$	Axioma
$\Vdash \neg p, p$	$[\vdash \neg]$
$\Vdash p \vee \neg p, p$	$[\vdash \vee]$
$\Vdash p, p \vee \neg p$	$[\vdash \vee]$
$\Vdash p \vee \neg p, p \vee \neg p$	$[\vdash \vee]$
$\Vdash p \vee \neg p$	$[\vdash C]$
$P^1x \Vdash P^1x$	Axioma
$P^1x, P^1a \Vdash P^1x$	$[D \Vdash]$
$P^1x, P^1a \Vdash P^1x, (\forall y)P^1y$	$[\vdash D]$
$P^1a, P^1x \Vdash P^1x, (\forall y)P^1y$	$[P \Vdash]$
$P^1a, P^1x \Vdash (\forall y)P^1y, P^1x$	$[\vdash P]$
$P^1a \Vdash P^1x \rightarrow (\forall y)P^1y, P^1x$	$[\vdash \rightarrow]$
$P^1a \Vdash (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y), P^1x$	$[\vdash \exists]$
$P^1a \Vdash P^1x, (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y)$	$[\vdash P]$
$P^1a \Vdash (\forall x)P^1x, (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y)$	$[\vdash \forall]$
$\Vdash P^1a \rightarrow (\forall x)P^1x, (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y)$	$[\vdash \forall]$
$\Vdash (\exists y)(P^1y \rightarrow (\forall x)P^1x), (\exists z)(P^1z \rightarrow (\forall y)P^1y)$	$[\vdash \exists]$
$\Vdash (\exists y)(P^1y \rightarrow (\forall x)P^1x)$	$[\vdash C]$

Como se advertirá, ambas demostraciones terminan, y no por casualidad, con una aplicación de la regla de contracción en el consecuente.

Lo más parecido a la propiedad de la disyunción que puede demostrarse para SC es la razonabilidad en el sentido de Hallden. Una relación de consecuencia \vdash es razonable en el sentido de Hallden syss para cualesquiera fórmulas A y B, si $\vdash AVB$ y A y B no tienen letras relacionales en común entonces $\vdash A$ o $\vdash B$.

LEMA 6. Sea $X \Vdash Y$ un secuente demostrable en SC y sean X_1 y X_2 sendos conjuntos de fórmulas tales que para toda fórmula A que ocurre en la secuencia X, $A \in X_1$ o $A \in X_2$; análogamente, sean Y_1 e Y_2 dos conjuntos de fórmulas tale que para toda fórmula B de la secuencia Y, $B \in Y_1$ o $B \in Y_2$. Si Z es un conjunto de fórmulas, $R(Z)$ designa al conjunto de las letras relacionales con ocurrencias en fórmulas de Z. Si $R(X_1 \cup Y_1) \cap R(X_2 \cup Y_2) = \emptyset$ entonces uno de los secuentes $X_1 \Vdash Y_1$ o $X_2 \Vdash Y_2$ es demostrable en SC.

DEMOSTRACIÓN. Adviértase antes de emprender la demostración, que para construir un secuente a partir de los *conjuntos* X_i , Y_i hay que construir sendas secuencias con sus elementos, y por ello que el enunciado del lema no es totalmente preciso. La demostración se realiza por inducción sobre la longitud de la demostración π de $X \Vdash Y$. Si $l(\pi) = 1$ $X \Vdash Y$ es $A \Vdash A$, lo mismo que $X_1 \Vdash Y_1$. Sea pues $l(\pi) = n + 1$ y asúmase que el lema vale para secuentes con demostraciones de longitud $\leq n$. Hay que considerar tantos subcasos como reglas. En los casos de las reglas de permutación y contracción, la demostración es inmediata, puesto que al tratar con conjuntos el número de ocurrencias de las fórmulas y el orden dentro del antecedente y del consecuente es irrelevante. Para las reglas de debilitamiento y las reglas operacionales, úsese la hipótesis de inducción y aplíquese entonces la regla correspondiente. A título de ejemplo se desarrollan los casos de las reglas del negador.

$$\vdash \neg \frac{X, A \Vdash Y}{X \Vdash \neg A, Y}$$

Para mayor concreción, supóngase que $\neg A \in Y_1$. Si $R(X_1 \cup Y_1 \cup \{\neg A\}) \cap R(X_2 \cup Y_2) = \emptyset$ entonces $R(X_1 \cup Y_1 \cup \{A\}) \cap R(X_2 \cup Y_2) = \emptyset$. Por hipótesis de inducción, $X_1, A \Vdash Y_1$ o $X_2 \Vdash Y_2$ es demostrable, y así, por $\vdash \neg$, $X_1 \Vdash \neg A, Y_1$ o $X_2 \Vdash Y_2$ es demostrable.

$$\neg \Vdash \frac{X \Vdash A, Y}{X, \neg A \Vdash Y}$$

Supóngase, tanto da, que $\neg A \in X_1$. Si $R(X_1 \cup Y_1 \cup \{\neg A\}) \cap R(X_2 \cup Y_2) = \emptyset$ entonces $R(X_1 \cup Y_1 \cup \{A\}) \cap R(X_2 \cup Y_2) = \emptyset$. Por hipótesis de inducción, uno de los secuentes $X_1 \Vdash A, Y_1$ o $X_2 \Vdash Y_2$ es demostrable y entonces por $\neg \Vdash X_1, \neg A \Vdash Y_1$ o $X_2 \Vdash Y_2$ es demostrable.

⊥

COROLARIO 6. Si $\Vdash A, B$ es demostrable en SC y $R(A) \cap R(B) = \emptyset$ entonces $\Vdash A$ es demostrable en SC o $\Vdash B$ es demostrable en SC.

DEMOSTRACIÓN. Empleando las metavariables como en el lema 6, tómesese $X_1 = X_2 = \emptyset$, $Y_1 = \{A\}$, $Y_2 = \{B\}$.

⊥

Para llegar a la conclusión de que SC- es razonable en el sentido de Hallden, aún se necesita un lema adicional. Escribiremos $X(A_1, \dots, A_n)$ para indicar que las fórmulas A_1, \dots, A_n ocurren en la estructura X , sin precisar su posición dentro de esa estructura.

LEMA 7. $X \Vdash Y(A_1 \vee B_1, \dots, A_n \vee B_n)$ es demostrable en SC- syss $X \Vdash Y(A_1, B_1, \dots, A_n, B_n)$ es demostrable en SC-.

DEMOSTRACIÓN. De derecha a izquierda basta con iterar las veces que sea preciso el siguiente esquema derivacional:

$$\begin{array}{c} X \Vdash Y \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline X \Vdash A, B, Z \\ \hline X \Vdash A \vee B, B, Z \\ \hline X \Vdash B, A \vee B, Z \\ \hline X \Vdash A \vee B, A \vee B, Z \\ \hline X \Vdash A \vee B, Z \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Hipótesis} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Vdash P \\ \\ \Vdash V \\ \Vdash P \\ \Vdash V \\ \Vdash C \end{array}$$

De izquierda a derecha se procede una vez más por inducción sobre la longitud de la demostración π de $X \Vdash Y$. Si $l(\pi) = 1$, $X \Vdash Y$ es $A \vee B \Vdash A \vee B$. La demostración correspondiente es:

$$\begin{array}{c} A \Vdash A \quad \text{axioma} \\ \hline A \Vdash B, A \quad \Vdash D \\ \hline A \Vdash A, B \end{array} \quad \begin{array}{c} B \Vdash B \quad \text{axioma} \\ \hline B \Vdash A, B \quad \Vdash D \\ \hline A \vee B \Vdash A, B \quad \Vdash V \end{array}$$

En el paso de n a $n+1$, las demostraciones para los casos de reglas que manipulan los antecedentes son inmediatas, y lo mismo sucede con las regla de permutación en el consecuente y las de los operadores distintos de \vee . Por tanto, restan por analizar tres casos: $\Vdash D$, $\Vdash C$ y $\Vdash V$.

$$\frac{X \Vdash Y}{X \Vdash A \vee B, Y} \quad \Vdash D \quad \text{es reemplazada por} \quad \frac{X \Vdash Y}{X \Vdash B, Y} \quad \Vdash D$$

$$\frac{X \Vdash A, B, Y}{X \Vdash A, B, Y} \quad \Vdash D$$

$$\frac{X \Vdash A \vee B, A \vee B, Y}{X \Vdash A \vee B, Y} \quad \Vdash C \quad \text{es reemplazada por} \quad \begin{array}{c} X \Vdash A, B, A, B, Y \quad \text{hip.ind.} \\ \hline X \Vdash A, A, B, B, Y \quad \Vdash P \\ \hline X \Vdash A, B, B, Y \quad \Vdash C \\ \hline X \Vdash B, A, B, Y \quad \Vdash P \\ \hline X \Vdash B, B, A, Y \quad \Vdash P \\ \hline X \Vdash B, A, Y \quad \Vdash C \\ \hline X \Vdash A, B, Y \quad \Vdash P \end{array}$$

$$\frac{X \Vdash B, Y}{X \Vdash A \vee B, Y} \quad \Vdash V \quad \text{es reemplazada por} \quad \frac{X \Vdash B, Y}{X \Vdash A, B, Y} \quad \Vdash D$$

⊥

se convertiría en

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\text{SM-D} \Vdash d}{\cdot}}{\cdot}}{\cdot}}{\cdot}}{X \Vdash A, Y}}{X, \neg A \Vdash Y} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} [\text{hip.ind.}] \\ \\ \\ [\neg \Vdash] \end{array}$$

y análogamente,

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\text{SM} \cdot}{\cdot}}{\cdot}}{\cdot}}{X \Vdash Y}}{X, A \rightarrow B \Vdash Y} \quad [\text{D} \Vdash]$$

se convertiría en

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\cdot}{\cdot}}{\cdot}}{\cdot}}{X \Vdash A, Y} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\cdot}{\cdot}}{\cdot}}{\cdot}}{X, B \Vdash Y}}{X, A \rightarrow B \Vdash Y} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} [\text{hip.ind.}] \\ \\ \\ [\rightarrow \Vdash] \end{array}$$

Pero la premisa de $[\neg \Vdash]$, en el primer caso, y la premisa izquierda de $[\rightarrow \Vdash]$, en el segundo, pueden no ser secuentes mínimos/intuicionistas (i.e., si $Y \neq \emptyset$).

SISTEMAS DE POST.

Si Σ es un conjunto de secuentes de \mathcal{P} y SS es cualquiera de los sistemas de cálculo de secuentes con regla de Corte descritos, designamos con 'SS \cup Σ ' al sistema resultante de incorporar a SS como axiomas los *secuentes* de Σ (y no los esquemas de secuyente correspondientes). Se dice entonces que los elementos de Σ son los *axiomas propios* de SS \cup Σ . Si

- (1) Σ es cerrado bajo sustitución -es decir, se cumple que si $X[v] \Vdash Y[v] \in \Sigma$ entonces para cualquier término t, $X[t] \Vdash Y[t] \in \Sigma$, y
- (2) si $X \Vdash Y \in \Sigma$ entonces $c(X \Vdash Y) = 0$ -es decir, el secuyente contiene únicamente fórmulas atómicas,

se dice que SS \cup Σ es un *sistema de Post* para SS.

EJEMPLOS.

[1] *Identidad*. Prolenguaje: se añade a \mathcal{P} el símbolo relacional binario '='.

$$SC^= = SC \cup \dots$$

$$\frac{}{\Vdash t=t} \\ t=s, A[t] \Vdash A[s], \text{ si } c(A)=0$$

[2] *Aritmética elemental*². Prolenguaje: *variables individuales*: x,y,z,...; *letras relacionales binarias*: =,<; *letras funcionales*: 0 (0-aria), s¹ (unaria), +,• (binarias).

$$SC^{AE} = SC^= \cup \dots$$

$$\frac{}{\Vdash t+0=t} \\ \Vdash t+s^1(t)=s^1(t+t)$$

² Es una práctica común identificar la aritmética elemental, AE, con el conjunto de las *fórmulas demostrables* en SC^{AE}.

$$\begin{aligned}
 & \Vdash t \bullet 0 = 0 \\
 & \Vdash t \bullet s^1(t') = t \bullet (t' + t) \\
 & t < 0 \Vdash \perp \\
 & t < t' \Vdash t < s^1(t') \\
 & t = t' \Vdash t < s^1(t') \\
 & t < s^1(t') \Vdash t < t', t = t' \\
 & \Vdash t < t', t = t', t' < t \\
 & s^1(t) < 0 \Vdash \perp \\
 & s^1(t) = s^1(t') \Vdash t = t'
 \end{aligned}$$

En general, hay que esperar que el teorema de eliminación de Corte falle para sistemas con axiomas propios: si $\Vdash A \rightarrow B$ y $\Vdash A$ son axiomas propios, $\Vdash B$ es demostrable,

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \Vdash A \quad B \Vdash B}{\text{Axiomas}} \\
 \frac{\Vdash A \rightarrow B \quad \frac{A, A \rightarrow B \Vdash B}{[\rightarrow \Vdash]}}{\Vdash A \quad A \Vdash B} \text{ [Corte]} \\
 \frac{\Vdash A \quad A \Vdash B}{\Vdash B} \text{ [Corte]}
 \end{array}$$

aunque no sin el concurso de la regla de Corte.

TEOREMA 15. Si $SS \cup \Sigma$ es un sistema de Post ($SS=SM, SI, SC$) entonces todo seciente demostrable en $SS \cup \Sigma$ tiene una demostración de grado ≤ 1 .

DEMOSTRACIÓN. Por definición, los axiomas propios de un sistema de Post son atómicos, y por eso lo que hay que establecer es que si un seciente es demostrable entonces hay una demostración de ese seciente en la que todas las fórmulas de Corte aparecen en algún seciente de ρ . Para ello redefínase el grado de una demostración en $SS \cup \Sigma$ del siguiente modo: el grado de π es el mayor de entre los grados de las aplicaciones de Corte cuya fórmula de Corte no ocurre en ningún axioma propio. Demuéstrese entonces el análogo del lema 4 (cuando A no ocurre en ningún axioma propio).

⊥

TEOREMA DEL SECIENTE MEDIO.

Una *fórmula prenexa* A es una fórmula de \mathcal{P} de la forma $(Q_1 v_1), \dots, (Q_i v_i) B$ donde los $Q_i, 1 \leq i \leq j$, son cuantificadores y $RQ(B) = 0$. Dos fórmulas A y B de \mathcal{P} son SS-equivalentes *sys* los secientes $A \Vdash B$ y $B \Vdash A$ son demostrables en SS.

TEOREMA 16. Toda fórmula A tiene una fórmula prenexa SC-equivalente.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, se comprueba la equivalencia de los siguientes pares de fórmulas:

$A \circ B$	$B \circ A$
$(\forall v) A \circ B$	$(\forall v) (A \circ B)^*$
$(\exists v) A \circ B$	$(\exists v) (A \circ B)^*$
$\neg \neg A$	A
$\neg (\forall v) A$	$(\exists v) \neg A$
$\neg (\exists v) A$	$(\forall v) \neg A$
$\neg (A \& B)$	$\neg A \vee \neg B$
$\neg (A \vee B)$	$\neg A \& \neg B$
$\neg (A \rightarrow B)$	$A \& \neg B$
$(\forall v) A \rightarrow B$	$(\exists v) (A \rightarrow B)^{**}$
$(\exists v) A \rightarrow B$	$(\forall v) (A \rightarrow B)^{**}$
$A \rightarrow (\exists v) B$	$(\exists v) (A \rightarrow B)^*$
$A \rightarrow (\forall v) B$	$(\forall v) (A \rightarrow B)^*$

donde ' \circ ' ha de reemplazarse (uniformemente) en los tres primeros casos por ' $\&$ ' o por ' \vee ', (*) ' v ' no está libre en A , y (**) ' v ' no está libre en B .

A continuación se demuestra la siguiente versión de la admisibilidad de [EQ] (cfr. Cap.4):

Si A y A' son SC-equivalentes y la fórmula B' resulta de la fórmula B al sustituir algunas ocurrencias de A en B por ocurrencias de A' , entonces B y B' son SC-equivalentes.

La demostración, como la de su análogo hilbertiano, se efectúa por inducción sobre $c(B)$, y no ofrece especial dificultad. El paso siguiente es demostrar: Si A y A' son SC-equivalentes y el secunte $X_1AX_2 \Vdash Y$ ($X \Vdash Y_1AY_2$) es demostrable en SC entonces $X_1A'X_2 \Vdash Y$ ($X \Vdash Y_1A'Y_2$) es demostrable en SC, que es una consecuencia más o menos inmediata de la (admisibilidad de la) regla de Corte:

$$\begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 X_1AX_2 \Vdash Y \quad X \Vdash Y_1AY_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \text{R.Dat. } \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \text{ R.Dat.} \\
 \text{Hip. } \frac{A' \Vdash A \quad X_1X_2, A \Vdash Y}{A', X_1X_2 \Vdash Y} \quad \text{Cort } \frac{X \Vdash A, Y_1Y_2 \quad A \Vdash A'}{X \Vdash Y_1, Y_2, A'} \text{ Hip.} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \text{R.Dat. } \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \text{ R.Dat.} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 X_1A'X_2 \Vdash Y \quad X \Vdash Y_1A'Y_2
 \end{array}$$

Así las cosas, el uso reiterado de la regla de Corte permite «convertir» cualquier fórmula en una fórmula prenexa equivalente.

COROLARIO 9. Toda fórmula A tiene una fórmula prenexa SC*-equivalente.

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia inmediata de los teoremas 14 y 16 y del corolario 5.

⊥

En vez de decir que A' es una fórmula prenexa equivalente a A , suele decirse simplemente que A' es una forma prenexa de A .

LEMA 8. Si en $X \Vdash Y$ ocurren únicamente fórmulas prenexas y es demostrable en SC, entonces hay una demostración π de $X \Vdash Y$ en SC tal que

- (1) todos los axiomas de π son de complejidad 0,
- (2) todas las fórmulas principales de las aplicaciones de las reglas de debilitamiento son atómicas, y
- (3) si $[R]$ es una regla aplicada después de una aplicación de una regla operacional cuantificacional, entonces $[R]$ es una regla estructural distinta de $D \Vdash$ y $\Vdash D$ o una regla operacional cuantificacional.

DEMOSTRACIÓN. Del teorema 14 se desprende la existencia de una demostración de $X \Vdash Y$ que cumple las dos primeras condiciones del lema. Además, el corolario 5 permite suponer que esa demostración está libre de aplicaciones de Corte. Sea en lo sucesivo λ una demostración de $X \Vdash Y$ que satisface todas estas exigencias. La demostración procede ahora por inducción sobre $\text{long}(\lambda)$. Si λ es un axioma, $\lambda = \pi$. Para tratar los casos en los que $\text{long}(\lambda) > 1$, convengamos en representar λ como

$$\begin{array}{c}
 \Theta \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 W \Vdash Z \\
 \hline
 X \Vdash Y \quad [R] \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} \Theta' \quad \Theta'' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ W' \Vdash Z' \quad W'' \Vdash Z' \\ \hline X \Vdash Y \quad [R] \end{array}
 \end{array}$$

según el número de premisas de $[R]$. *Caso 1:* $[R]$ es una regla estructural distinta de las debilitamiento o una regla operacional cuantificacional y por tanto una regla con una premisa. Por hipótesis de inducción, hay una demostración ξ de la premisa $W \Vdash Z$ de $[R]$ que cumple las

condiciones 1-3; π resulta de ξ aplicando [R]. *Caso 2:* [R] es una regla de debilitamiento. Así, por ejemplo, para $D \Vdash$, se tendría

$$\frac{\begin{array}{c} \Theta \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ W \Vdash Z \end{array}}{W, A \Vdash Z} [D \Vdash]$$

donde $C(A)=0$. Por hipótesis de inducción, hay una demostración de $W \Vdash Z$ de la forma

$$\xi \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ U \Vdash V \end{array} \right. \\ \mu \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ W \Vdash Z \end{array} \right.$$

donde ξ no contiene aplicaciones de reglas operacionales cuantificacionales y μ no contiene aplicaciones de reglas operacionales no cuantificacionales ni de $D \Vdash$ o $\Vdash D$. π se construye del siguiente modo:

$$\xi \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \frac{U \Vdash V}{U, A \Vdash V} [D \Vdash] \end{array} \right. \\ \mu \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ W \Vdash Z \end{array} \right.$$

ya que si se examinan las reglas se constata que si un secuyente $W \Vdash Z$ domina a un secuyente $U \Vdash V$ en una demostración v puede construirse una segunda demostración v' en la que $W, A \Vdash Z$ domina al secuyente $U, A \Vdash V$. *Caso 3:* [R] es una regla operacional no cuantificacional. Si A es su fórmula principal, sus subfórmulas inmediatas son de rango cuantificacional 0, puesto que el símbolo lógico principal de A es un operador oracional y A es prenexa. Puesto que todos los casos se tratan de manera similar, se considera únicamente la regla $[\rightarrow \Vdash]$ a título de ejemplo. Si λ es de la forma

$$\frac{\begin{array}{c} \Theta' \\ \vdots \\ \vdots \\ W' \Vdash A, Z' \end{array} \quad \begin{array}{c} \Theta'' \\ \vdots \\ \vdots \\ W'', B \Vdash Z'' \end{array}}{W', W'', A \rightarrow B \Vdash Z', Z''} [\rightarrow \Vdash]$$

entonces por hipótesis de inducción

$$\xi \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ U' \Vdash V' \end{array} \right\} \xi' \\ \mu \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ W' \Vdash A, Z' \end{array} \right\} \mu'$$

donde ξ y ξ' no contienen aplicaciones de reglas operacionales cuantificacionales y μ y μ' no contienen aplicaciones de reglas operacionales no cuantificacionales ni de $D \Vdash$ o $\Vdash D$. Como A y B no contienen cuantificadores y μ y μ' no contienen aplicaciones de debilitamiento, $U' \Vdash V'$ puede reescribirse como $U' \Vdash A, V^*$ y $U'' \Vdash V''$ como $U^*, B \Vdash V''$ y las posibles aplicaciones de contracción en el antecedente con A como fórmula principal y de contracción en el consecuente con B como fórmula principal situarse en ξ y ξ' , respectivamente. π se construye entonces así:

$$\begin{array}{c}
 \xi \qquad \qquad \qquad \xi' \\
 \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 \hline
 U' \Vdash A, V^* \qquad \qquad U^*, B \Vdash V'' \\
 \hline
 U', U^*, A \rightarrow B \Vdash V^*, V \\
 \text{"} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \mu^* \qquad \qquad \qquad W', U^*, A \rightarrow B \Vdash Z', V \\
 \text{"} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \mu'^* \qquad \qquad \qquad W', W'', A \rightarrow B \Vdash Z', \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad Z''
 \end{array}$$

donde μ^* y μ'^* son subdemostraciones análogas a μ y μ' , respectivamente.

⊢

Sea π una demostración en SC, sin aplicaciones de Corte, del secuyente $X \Vdash Y$ que cumple las condiciones 1-3 SC del lema 8. Si π no contiene aplicaciones de reglas operacionales cuantificacional, su *secuyente medio* es $X \Vdash Y$, y en otro caso aquel secuyente que siendo la premisa de una aplicación en π de una regla cuantificacional no domina a ningún otro secuyente que actúe como premisa de una aplicación de una regla cuantificacional. Lo que garantiza la existencia de un secuyente medio de π es que, una vez eliminada la regla de Corte, todas las reglas estructurales y cuantificacionales son reglas de una premisa. Por consiguiente, una demostración de este tipo puede representarse como se indica a continuación

$$\begin{array}{c}
 \lambda \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ W \Vdash Z \end{array} \right. \\
 \mu \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X \Vdash Y \end{array} \right.
 \end{array}$$

donde λ es la «parte proposicional» de la demostración, en la que sólo se usan regla proposicionales, estructurales y axiomas atómicos, $W \Vdash Z$ es el secuyente medio (que no contendrá ocurrencias de cuantificadores), y μ es la «parte cuantificacional», en la que las únicas reglas aplicadas son las cuantificacionales, las de contracción y las de permutación.

Un corolario de la existencia del secuyente medio es el siguiente trasunto de la propiedad de existencia para SC:

COROLARIO 10. Si una fórmula $A = (\exists v_1), \dots, (\exists v_n)B$, $RQ(B)=0$ es demostrable en SC entonces pueden encontrarse términos $t_1^1, \dots, t_1^n, t_m^1, \dots, t_m^n$ tales que la fórmula $A[t_1^1, \dots, t_1^n] \vee \dots \vee A[t_m^1, \dots, t_m^n]$ es demostrable en SC.

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el lema 8 al secuyente $\Vdash A$, se sigue la existencia de una demostración π del mismo con las propiedades arriba descritas y en la que existe, por tanto, un secuyente medio. El secuyente medio de π será de la forma $\Vdash A[t_1^1, \dots, t_1^n] \vee \dots \vee A[t_m^1, \dots, t_m^n]$, puesto que $\Vdash A$ se sigue de él mediante aplicaciones de $\Vdash \exists$ y reglas estructurales (especialmente $\Vdash C$). Ahora bien, si $\Vdash A[t_1^1, \dots, t_1^n] \vee \dots \vee A[t_m^1, \dots, t_m^n]$ es demostrable, m² aplicaciones de $\Vdash \vee$ permiten obtener una demostración de $\Vdash A[t_1^1, \dots, t_1^n] \vee \dots \vee A[t_m^1, \dots, t_m^n], \dots, A[t_1^1, \dots, t_1^n] \vee \dots \vee A[t_m^1, \dots, t_m^n]$, y entonces m aplicaciones de $\Vdash C$ llevan a una demostración del secuyente $\Vdash A[t_1^1, \dots, t_1^n] \vee \dots \vee A[t_m^1, \dots, t_m^n]$. ┆

TEOREMA DE HERBRAND.

El teorema que se enuncia y demuestra en esta sección presenta algunas semejanzas con el teorema del secuyente medio que acaba de exponerse y que se debe a Gentzen. La importancia del teorema de Herbrand reside en que constituye la base teórica de los modernos métodos de demostración automática de teoremas en el cálculo de predicados.

Si $A = (Q_1 v_1) \dots (Q_n) B$ es una fórmula prenexa y g^i es una letra funcional i-aria que no ocurre en A, para cada $i \in \mathbb{N}$, la *forma de Herbrand* de A con respecto a $\{g^i / i \in \mathbb{N}\}$, A_H , se define por inducción sobre el número de ocurrencias de \forall en A:

- (1) $A_H = (\exists_1 v_1) \dots (\exists_n) B$, si $A = (\exists_1 v_1) \dots (\exists_n) B$;
- (2) $A_H = (\exists_1 v_1) \dots (\exists_m) B[-, v, g^m(-, v), -u]_H$, si $A = (\exists_1 v_1) \dots (\exists_m) (\forall w) B[-, v, w, -u]$, donde $-v = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

En la práctica se omite la referencia a $\{g^i / i \in \mathbb{N}\}$ y se habla de una forma de Herbrand de A o de formas de Herbrand de A. Por el teorema 16, toda fórmula tiene una fórmula equivalente en forma prenexa, y en esa medida se habla de formas de Herbrand de una fórmula A sin suponer que ésta es prenexa -en tal caso sus formas de Herbrand serán las de sus fórmulas prenexas equivalentes. Por ejemplo, se dice que la fórmula $(\exists x)(\exists z)(R^2 x f^1(x) \rightarrow R^2 z g^2(x, z))$ es una forma de Herbrand de $(\forall x)(\exists y) R^2 x y \rightarrow (\exists z)(\forall w) R^2 z w$.

TEOREMA 17 (T. de Herbrand). Sea $A = (Q_1 v_1) \dots (Q_n v_n) B$ una fórmula prenexa. Si Q_i es una ocurrencia de ' \forall ', sea g^k una letra funcional k-aria, $k = \lfloor \{j / j < i, Q_j \text{ es una ocurrencia de } '\exists'\} \rfloor$, que no ocurre en A. Entonces $\Vdash A$ es demostrable en SC- syss lo es $\Vdash B[t_1^1, \dots, t_n^1], \dots, B[t_1^p, \dots, t_n^p]$, donde cada $B[t_1^p, \dots, t_n^p]$ es la matriz cuantificacional de la forma de Herbrand con respecto al conjunto de los g^k de una fórmula $(Q_1 u_1) \dots (Q_n u_n) B$ que difiere de A únicamente por los «nombres» de sus variables ligadas (y es, por tanto, deductivamente equivalente a A).

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow Si $\Vdash A$ es demostrable en SC, por el lema 8 (teorema del secuyente medio) hay una demostración de la forma

$$\Theta \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Vdash B[s_1^1, \dots, s_n^1], \dots, B[s_1^p, \dots, s_n^p] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\pi \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Vdash A \end{array} \right.$$

donde Θ consta de aplicaciones de reglas proposicionales y estructurales y π de aplicaciones de reglas cuantificacionales y estructurales distintas de las de debilitamiento. Repárese en que si Q_i es una ocurrencia de ' \forall ' cada s_i^q es la variable dependiente de una aplicación de $\Vdash \forall$, de manera que si Q_i y Q_j cumplen esta condición $s_i^q \neq s_j^m$. Además, hay que tener en cuenta a lo largo de toda la demostración que el orden de la secuencia s_1^q, \dots, s_n^q refleja el orden del prefijo cuantificacional de A. Así, en la parte π nos encontraremos con

veces) y después $\Vdash \forall$. [k+1a] Si, en el secuento generado tras el k-ésimo paso, hay una fórmula $(Q_i v_i), \dots, (Q_n v_n) B[v_1^q, \dots, v_n^q]$, siendo Q_{i-1} una ocurrencia de \exists , aplíquese $\Vdash \exists$, reemplazándola por $(\exists_{i-1} v_{i-1})(Q_i v_i), \dots, (Q_n v_n) B[v_1^q, \dots, v_n^q]$. [k+1b] En caso contrario empléese, *mutatis mutandis*, el mismo razonamiento que en 1b.

⊥

¿Ha entendido la demostración precedente? En cualquier caso es lo suficientemente alambicada, por la profusión de subíndices, superíndices y sustituciones, como para que no estén de más un par de ilustraciones, a modo de *ecthesis*, de las sucesivas transformaciones que conlleva (cfr. Apéndice Teorema de Herbrand. Ejemplos).

TEOREMA DE INTERPOLACIÓN.

Por comodidad se extiende el prologuaje \mathcal{P} incorporando el operador oracional ceroario \perp , conocido como «operador de absurdo». Por consiguiente, por lo que hace a la gramática lógica, \perp es una fórmula bien formada. En cuanto al sistema deductivo, SS^\perp ($SS=SI, SC$) resulta de añadir a SS el axioma $\perp \Vdash$. En los sistemas mencionados \perp y $A \& \neg A$, para cualquier fórmula A , son deductivamente equivalentes.

$\frac{A \Vdash A}{A, \neg A \Vdash}$	$\frac{Ax.}{[\neg \Vdash]}$	$\frac{\perp \Vdash}{\perp \Vdash A \& \neg A}$	$\frac{Ax.}{[\Vdash D]}$
$\frac{A \& \neg A, \neg A \Vdash}{A \& \neg A, A \& \neg A \Vdash}$	$\frac{[\& \Vdash]}{[\& \Vdash]}$		
$\frac{A \& \neg A \Vdash}{A \& \neg A \Vdash \perp}$	$\frac{[C \Vdash]}{[\Vdash D]}$		

Asimismo, en SI y SC $\neg A$ y $A \rightarrow \perp$ son deductivamente equivalentes, de manera que podría prescindirse de ' \neg ' en beneficio de ' \perp '.

$\frac{A \Vdash A \quad \perp \Vdash}{A \rightarrow \perp, A \Vdash}$	$\frac{Axs.}{[\rightarrow \Vdash]}$	$\frac{A \Vdash A}{A, \neg A \Vdash}$	$\frac{Ax.}{[\neg \Vdash]}$
$\frac{A \rightarrow \perp \Vdash \neg A}{A \rightarrow \perp \Vdash \neg A}$	$[\Vdash \neg]$	$\frac{A, \neg A \Vdash \perp}{\neg A \Vdash A \rightarrow \perp}$	$[\Vdash D]$
		$[\Vdash \rightarrow]$	

(Adviértase que, siguiendo la costumbre, en estas demostraciones se no se han consignado las aplicaciones pertinentes de la regla de permutación).

Teniendo en cuenta el uso en estas derivaciones de la regla $[\Vdash D]$, no sucederá lo mismo con $SM^\perp = SM + \perp \Vdash$.

A continuación se define una relación ζ entre pares de fórmulas $\langle A, B \rangle$ tales que $A \in SFG(B)$ y $c(A) = 0$ y $\{+, -\}$. Si $\langle A, B, + \rangle \in \zeta$ se dice que A ocurre positivamente en B y si $\langle A, B, - \rangle \in \zeta$ que A ocurre negativamente en B .

DEFINICIÓN. (1) si $C(B) = 0$, en cuyo caso $A = B$, $\langle A, B, + \rangle \in \zeta$; (2) si $\langle A, B, + \rangle \in \zeta$ entonces $\langle A, B \& C, + \rangle \in \zeta$, $\langle A, C \& B, + \rangle \in \zeta$, $\langle A, B \vee C, + \rangle \in \zeta$, $\langle A, C \vee B, + \rangle \in \zeta$, $\langle A, C \rightarrow B, + \rangle \in \zeta$, $\langle A, (Qv)B, + \rangle \in \zeta$; (3) si $\langle A, B, + \rangle \in \zeta$ entonces $\langle A, B \rightarrow C, - \rangle \in \zeta$, $\langle A, \neg B, - \rangle \in \zeta$; (4) si $\langle A, B, - \rangle \in \zeta$ entonces $\langle A, B \& C, - \rangle \in \zeta$, $\langle A, C \& B, - \rangle \in \zeta$, $\langle A, B \vee C, - \rangle \in \zeta$, $\langle A, C \vee B, - \rangle \in \zeta$, $\langle A, C \rightarrow B, - \rangle \in \zeta$, $\langle A, (Qv)B, - \rangle \in \zeta$; (5) si $\langle A, B, - \rangle \in \zeta$ entonces $\langle A, B \rightarrow C, + \rangle \in \zeta$, $\langle A, \neg B, + \rangle \in \zeta$.

Esta relación se convierte fácilmente en una segunda relación Σ entre pares $\langle A, X \Vdash Y \rangle$ de fórmulas atómicas y secuentes y «polaridades» ('+' o '-'), bajo el supuesto de que para alguna fórmula B de $X \Vdash Y$, $\langle A, B, + \rangle \in \zeta$ o $\langle A, B, - \rangle \in \zeta$.

DEFINICIÓN. (1) Si $\langle A, B, + \rangle \in \zeta$ y B ocurre en el consecuente Y , $\langle A, X \Vdash Y, + \rangle \in \Sigma$; (2) si $\langle A, B, - \rangle \in \zeta$ y B ocurre en el consecuente Y , $\langle A, X \Vdash Y, - \rangle \in \Sigma$; (3) si $\langle A, B, + \rangle \in \zeta$ y B ocurre en el antecedente X , $\langle A, X \Vdash Y, - \rangle \in \Sigma$; (4) si $\langle A, B, - \rangle \in \zeta$ y B ocurre en el antecedente X , $\langle A, X \Vdash Y, + \rangle \in \Sigma$.

Si $\langle A, X \Vdash Y, + \rangle \in \Sigma$, A ocurre positivamente en $X \Vdash Y$ y si $\langle A, X \Vdash Y, - \rangle \in \Sigma$, A ocurre negativamente en $X \Vdash Y$.

LEMA 9. Si $X, X' \Vdash Y, Y'$ es demostrable en $SS^\perp (=SI^\perp, SC^\perp)$ hay una fórmula A tal que

- 1] $X \Vdash A, Y$ y $X', A \Vdash Y'$ son demostrables en SS^\perp ;
- 2] para toda fórmula atómica B , si $\langle B, A, + \rangle \in \zeta$ entonces $\langle B, X' \Vdash Y', + \rangle \in \Sigma$ y $\langle B, X \Vdash Y, - \rangle \in \Sigma$;
- 3] para toda fórmula atómica B , si $\langle B, A, - \rangle \in \zeta$

Entonces $\langle B, X' \Vdash Y', - \rangle \in \Sigma$ y $\langle B, X \Vdash Y, + \rangle \in \Sigma$.

DEMOSTRACIÓN. Adviértase que la formulación del lema para SI^\perp es «si $X, X' \Vdash Y'$ es demostrable en $SI^\perp \dots$ », donde $Y' = \{B\}$ o $Y' = \emptyset$. En ambos casos el lema se demuestra por inducción sobre la longitud de una demostración π libre de corte de $X, X' \Vdash Y, Y'$. Si $\text{long}(\pi) = 1$, $X, X' \Vdash Y, Y'$ es un axioma $B \Vdash B$ y hay que considerar cuatro subcasos. *Subcaso 1:* $X = Y = \{B\}$ y $X' = Y' = \emptyset$. Sea entonces $A = \perp$; en tal caso $\perp \Vdash$ y $B \Vdash B$ son axiomas y aplicando $[D \Vdash]$ a este último se obtiene $B \Vdash B, \perp$. *Subcaso 2:* $X = Y = \{B\}$ y $X' = Y' = \emptyset$. Tómese entonces $A = B$, en cuyo caso $B \Vdash A$ y $A \Vdash B$ son axiomas y se comprueba fácilmente que se cumplen las condiciones 2-3 del lema. *Subcaso 3:* $X' = Y' = \{B\}$ y $X = Y = \emptyset$. Tómese ahora $A = \neg B$. Partiendo del axioma $B \Vdash B$ y aplicando $[\neg \Vdash]$ y $[\Vdash \neg]$ se llega, respectivamente, a $B, \neg B \Vdash$ y $\Vdash B, \neg B$. Si $\langle C, A, + \rangle \in \zeta$, $\langle C, \Vdash A, B, + \rangle \in \Sigma$ y $\langle C, A, B, \Vdash, - \rangle \in \Sigma$, y $\langle C, A, - \rangle \in \zeta$, $\langle C, \Vdash A, B, - + \rangle \in \Sigma$ y $\langle C, A, B, \Vdash, + \rangle \in \Sigma$. *Subcaso 4.* $X = Y = \emptyset$ y $X' = Y' = \{B\}$. Sea $A = \neg \perp$; aplíquese $[\Vdash \neg]$ al axioma $\perp \Vdash$ para obtener $\Vdash \neg \perp$, y $[D \Vdash]$ a $B \Vdash B$ para concluir $B, \perp \Vdash B$.

Sea pues $\text{long}(\pi) = k + 1$. *Subcaso 1.* π termina con una aplicación de una regla estructural. El esquema es el mismo para todas las reglas estructurales: aplíquese la hipótesis de inducción sobre la premisa de la regla y la propia regla sobre el secuyente resultante. Por ejemplo, si π es de la forma

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\cdot}{\cdot}}{\cdot}}{\cdot}}{X, X'' \Vdash Y, Y'}}{X, X'', B \Vdash Y, Y'} [D \Vdash]$$

la hipótesis de inducción proporciona sendas demostraciones de $X \Vdash A, Y$ y $X'', A \Vdash Y'$; aplicando sobre esta última $D \Vdash$ y $P \Vdash$ resulta $X'', B, A \Vdash Y'$. Obviamente si las condiciones 2 y 3 se verificaban para $X \Vdash A, Y$ y $X'', A \Vdash Y'$, también se verificarán para $X \Vdash A, Y$ y $X'', B, A \Vdash Y'$.

Subcaso 2. π termina con una aplicación de una regla operacional proposicional de una premisa o con una aplicación de $\forall \Vdash$ o $\exists \Vdash$. Con las modificaciones pertinentes, se procede como en el caso anterior. Si, por ejemplo, π es de la forma

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\cdot}{\cdot}}{\cdot}}{\cdot}}{X'', B, X' \Vdash Y, Y'}}{X'', B \& C, X' \Vdash Y, Y'} [\& \Vdash]$$

de la hipótesis de inducción resultan sendas demostraciones de $X'', B \Vdash A, Y$ y $X', A \Vdash Y'$, satisfaciendo estos secuentes las condiciones enunciadas en el lema. Basta entonces con aplicar $\& \Vdash$ para obtener a partir de la primera de ellas $X'', B \& C \Vdash A, Y$.

Subcaso 3. π es de la forma

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\cdot}{\cdot}}{\cdot} \quad \frac{\frac{\cdot}{\cdot}}{\cdot}}{X, X' \Vdash B, Y'', Y'} \quad \frac{\frac{\cdot}{\cdot}}{X, X' \Vdash C, Y'', Y'}}{X, X' \Vdash B \& C, Y'', Y'} [[\&]]$$

Por hipótesis de inducción los secuentes $X \Vdash A', B, Y''$, $X', A' \Vdash Y'$, $X \Vdash A'', C, Y''$ y $X', A'' \Vdash Y''$ son demostrables y satisfacen las condiciones del lema. Si $A = A' \vee A''$, se tiene

$$\frac{X', A' \Vdash Y' \quad X', A'' \Vdash Y'}{X', A' \vee A'' \Vdash Y'} [\vee \Vdash]$$

y también

$$\begin{array}{c}
 \frac{X \Vdash A, B, Y''}{X \Vdash A \vee A'', B, Y''} \quad \frac{X \Vdash A'', C, Y''}{X \Vdash A \vee A'', C, Y''} \quad [\vee] \\
 \frac{X \Vdash B, A \vee A'', Y''}{X \Vdash B \& C, A \vee A'', Y''} \quad \frac{X \Vdash C, A \vee A'', Y''}{X \Vdash B \& C, A \vee A'', Y''} \quad [P] \\
 \hline
 X \Vdash A \vee A'', B \& C, Y'' \quad [P] \\
 \hline
 X \Vdash A \vee A'', B \& C, Y'' \quad [P]
 \end{array}$$

Subcaso 4. π concluye con una aplicación de \vee , y por consiguiente es de la forma

$$\frac{X, X', B \Vdash Y'', Y' \quad X, X', C \Vdash Y'', Y'}{X, X', B \vee C \Vdash Y'', Y'} \quad [\vee]$$

Por hipótesis de inducción los secuentes $X \Vdash A, Y$, $X', B, A' \Vdash Y'$, $X \Vdash A'', Y$ y $X', C, A'' \Vdash Y'$ son demostrables y satisfacen las exigencias del lema. Sea entonces $A = A' \& A''$.

$$\frac{X \Vdash A, Y \quad X \Vdash A'', Y}{X \Vdash A' \& A'', Y} \quad [\&]$$

y además,

$$\frac{\frac{X', C, A'' \Vdash Y'}{X', C, A' \& A'' \Vdash Y'} \quad \frac{X', B, A' \Vdash Y'}{X', B, A' \& A'' \Vdash Y'} \quad [\&]}{\frac{X', A' \& A'', C \Vdash Y'}{X', A' \& A'', B \vee C \Vdash Y'} \quad [P]}{X', A' \& A'', B \vee C \Vdash Y'} \quad [\vee^*]$$

Subcaso 5. La última regla aplicada en π es \rightarrow . En este caso no hay una representación unívoca porque en las premisas de \rightarrow X, X', Y e Y'' pueden repartirse de diversas maneras. Si π puede representarse como

$$\frac{\frac{X \Vdash B, Y}{X, X'', B \rightarrow C \Vdash Y, Y'} \quad \frac{X'' \Vdash C \Vdash Y'}{X, X'', B \rightarrow C \Vdash Y, Y'}}{X, X'', B \rightarrow C \Vdash Y, Y'} \quad [\rightarrow]$$

Interpretando $X \Vdash B, Y$ como $\emptyset, X \Vdash B, Y$ y $X'' \Vdash C \Vdash Y'$ como $\emptyset, X'', C \Vdash \emptyset, Y'$, la hipótesis de inducción lleva a concluir la demostrabilidad de $\Vdash A', B$ y $X, A' \Vdash Y$, por una parte, y, por la otra, de $X'', C, A'' \Vdash Y'$ y $\Vdash A''$. Tómese $\neg A' \& A''$ por A ; entonces

$$\frac{\frac{X, A' \Vdash Y}{X \Vdash \neg A', Y} \quad \frac{X \Vdash A'', Y}{X \Vdash \neg A' \& A'', Y} \quad [\neg] \quad \frac{X \Vdash A'', Y}{X \Vdash \neg A' \& A'', Y} \quad [\&]}{X \Vdash \neg A' \& A'', Y} \quad [\&]}$$

} Deb., Perm.

Además,

$$\frac{\frac{X', C, A'' \Vdash Y'}{X', C, \neg A' \& A'' \Vdash Y'} \quad \frac{\Vdash A', B}{\neg A' \Vdash B} \quad [\neg]}{\frac{X', \neg A' \& A'', C \Vdash Y'}{\neg A' \& A'' \Vdash B} \quad [\&]} \quad [\&]}$$

$$\frac{X', \neg A' \& A'', \neg A' \& A'', B \rightarrow C \Vdash Y'}{X', \neg A' \& A'', B \rightarrow C \Vdash Y'} \quad [\rightarrow]}$$

$$\frac{X', \neg A' \& A'', B \rightarrow C \Vdash Y'}{X', \neg A' \& A'', B \rightarrow C \Vdash Y'} \quad [C]$$

Una segunda posibilidad es que el esquema de π sea

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ C \Vdash Y' \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X, X' \Vdash B, Y \end{array}}{X, X', B \rightarrow C \Vdash Y, Y'}}$$

Leyendo la premisa izquierda como $C, \emptyset \Vdash \emptyset, Y'$ y la derecha como $X, X' \Vdash B, Y, \emptyset$ y aplicando la hipótesis de inducción se llega a $C \Vdash A', A' \Vdash Y', X', A'' \Vdash$ y $X \Vdash A'', B, Y$. Aplicando reglas estructurales a $A' \Vdash Y'$ se demuestra $X', A' \Vdash Y'$ y procediendo análogamente sobre $X', A'' \Vdash$ se llega a $X', A'' \Vdash Y'$. Finalmente por $\forall \Vdash$ se tiene $X', A' \forall A'' \Vdash Y'$. En cuanto a la parte restante,

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X \Vdash A'', B, Y \end{array}}{X \Vdash A' \forall A'', B, Y} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ C \Vdash A' \end{array}}{C \Vdash A' \forall A''} \quad [\forall \Vdash]}{X, B \rightarrow C \Vdash A' \forall A'', Y} \quad [\rightarrow \Vdash]$$

etc.

Subcaso 6. La última regla aplicada en π es $\forall \Vdash$:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X, X' \Vdash B, Y'', Y' \end{array}}{X, X' \Vdash (\forall v) B, Y'', Y'} \quad [\forall \Vdash]$$

donde -recuérdese- 'v' no está libre en X, X', Y'', Y' . La hipótesis de inducción proporciona demostraciones apropiadas de los secuentes $X \Vdash A', B, Y''$ y $X', A' \Vdash Y'$. El problema reside en que para pasar de $X \Vdash A', B, Y''$ a $X \Vdash A', (\forall v) B, Y''$ aplicando $\forall \Vdash$ 'v' no tendría que estar libre en A y no hay garantías de que así sea. Para remediarlo tómesese por A la fórmula $(\exists v) A'$, en la que obviamente 'v' no está libre. Es decir, procédase como sigue:

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X \Vdash A', B, Y'' \end{array}}{X \Vdash (\exists v) A', B, Y''} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X', A' \Vdash Y' \end{array}}{X', (\exists v) A' \Vdash Y'} \quad [\exists \Vdash]}{X \Vdash (\exists v) A', (\forall v) B, Y''} \quad [\forall \Vdash]$$

Adviértase que, en la derivación de la derecha, las restricciones inherentes a la regla $\exists \Vdash$ se cumplen, ya que por hipótesis 'v' no está libre en X', Y' (ni en X, Y'').

Subcaso 7. La regla $\exists \Vdash$ plantea problemas similares a los de $\forall \Vdash$. Si π es

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X, X'', B \Vdash Y, Y' \end{array}}{X, X'', (\exists v) B \Vdash Y, Y'} \quad [\exists \Vdash]$$

donde 'v' no está libre en X, X'', Y, Y' , la hipótesis de inducción permite contar con demostraciones de los secuentes $X \Vdash A', Y$ y $X'', B, A' \Vdash Y'$, pudiendo darse el caso de que 'v' esté libre en A'. Para solucionarlo sea $A = (\forall v) A'$.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X \Vdash A', Y \end{array}}{X \Vdash (\forall v) A', Y''} \quad [\forall \Vdash] \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X'', B, A' \Vdash Y' \end{array}}{X'', B, (\forall v) A' \Vdash Y'} \quad [\forall \Vdash]}{X'', (\forall v) A', B \Vdash Y'} \quad [P \Vdash]}{X'', (\forall v) A', (\exists v) B \Vdash Y'} \quad [\exists \Vdash]$$

†

TEOREMA 18 (T. DE CRAIG-LYNDON). Si $\vdash_{SS^{\perp}} A \rightarrow B$ ($SS^{\perp} = SI^{\perp} = SC^{\perp}$) entonces existe una fórmula C tal que (1) $\vdash_{SS^{\perp}} A \rightarrow C$ y $\vdash_{SS^{\perp}} C \rightarrow B$, (2) si $\langle D, C, + \rangle \in \zeta$ entonces $\langle D, A, + \rangle \in \zeta$ y $\langle D, B, + \rangle \in \zeta$, y (3) si $\langle D, C, - \rangle \in \zeta$ entonces $\langle D, A, - \rangle \in \zeta$ y $\langle D, B, - \rangle \in \zeta$. Se dice entonces que la fórmula C es un *interpolante* entre A y B en SS^{\perp} .

DEMOSTRACIÓN. Asíumase que $\vdash_{SS^{\perp}} A \rightarrow B$. Por definición, el secuyente $\Vdash A \rightarrow B$ es demostrable en SS^{\perp} y entonces por lema 3 lo es igualmente $A \Vdash B$. Léase este secuyente de modo que $X = \{A\}$, $Y' = \{B\}$ y $X' = Y = \emptyset$. Por el lema 9 existe una fórmula C tal que $A \Vdash C$ y $C \Vdash B$ son demostrables en SS^{\perp} . Además, para toda fórmula atómica D se cumple: si $\langle D, C, + \rangle \in \zeta$ entonces $\langle D, \Vdash B, + \rangle \in \Sigma$ y $\langle D, A \Vdash, - \rangle \in \Sigma$, y si $\langle D, C, - \rangle \in \zeta$ entonces $\langle D, \Vdash B, - \rangle \in \Sigma$ y $\langle D, A \Vdash, + \rangle \in \Sigma$. De la definición que precede al lema 9 se sigue que si $\langle D, \Vdash B, + \rangle \in \Sigma$ entonces $\langle D, B, + \rangle \in \zeta$, si $\langle D, A \Vdash, - \rangle \in \Sigma$ entonces $\langle D, A, + \rangle \in \zeta$, si $\langle D, \Vdash B, - \rangle \in \Sigma$ entonces $\langle D, B, - \rangle \in \zeta$ y si $\langle D, A \Vdash, + \rangle \in \Sigma$ entonces $\langle D, A, - \rangle \in \zeta$. \dashv

Está claro que el teorema de interpolación o de Craig-Lyndon es una consecuencia de la eliminación de la regla de Corte. Para constatarlo basta con darse cuenta de que si π es como en la demostración del lema 9 y si su último paso consistiera en una aplicación de Corte, de manera que pudiéramos representar esa demostración como

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X \Vdash A, Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X', A \Vdash Y' \end{array}}{X, X' \Vdash Y, Y'}$$

y si la fórmula de Corte coincidiera con la fórmula interpolante, podría suceder que $\langle B, A, + \rangle \in \zeta$ y $\langle B, X' \Vdash Y', + \rangle \notin \Sigma$.

APÉNDICE: TEOREMA DE HERBRAND, EJEMPLOS.

EJEMPLO 1. $(\exists v)(\forall x)(\exists u)(\forall y)(R^2xy \rightarrow R^2uv)$.

\Rightarrow 1.1 Demostración (se omiten las aplicaciones de $\Vdash P$).

$\frac{R^2xy \Vdash R^2xy}{\hline}$		[Axioma]
$\frac{R^2xy, R^2zw \Vdash R^2xy}{\hline}$		[D \Vdash]
$\frac{R^2xy, R^2zw \Vdash R^2uv, R^2xy}{\hline}$		[D \Vdash]
$\frac{R^2xy \Vdash R^2uv, R^2zw \rightarrow R^2xy}{\hline}$		[$\Vdash \rightarrow$]
$\frac{\Vdash R^2xy \rightarrow R^2uv, R^2zw \rightarrow R^2xy}{\hline}$	sec. medio	[$\Vdash \rightarrow$]
$\frac{\Vdash R^2xy \rightarrow R^2uv, (\forall w)(R^2zw \rightarrow R^2xy)}{\hline}$		[$\Vdash \forall$]
$\frac{\Vdash R^2xy \rightarrow R^2uv, (\exists t)(\forall w)(R^2zw \rightarrow R^2ty)}{\hline}$		[$\Vdash \exists$]
$\frac{\Vdash R^2xy \rightarrow R^2uv, (\forall z)(\exists t)(\forall w)(R^2zw \rightarrow R^2ty)}{\hline}$		[$\Vdash \forall$]
$\frac{\Vdash R^2xy \rightarrow R^2uv, (\exists s)(\forall z)(\exists t)(\forall w)(R^2zw \rightarrow R^2ts)}{\hline}$		[$\Vdash \exists$]
$\frac{\Vdash (\forall y)(R^2xy \rightarrow R^2uv), (\exists s)(\forall z)(\exists t)(\forall w)(R^2zw \rightarrow R^2ts)}{\hline}$		[$\Vdash \forall$]
$\frac{\Vdash (\exists u)(\forall y)(R^2xy \rightarrow R^2uv), (\exists s)(\forall z)(\exists t)(\forall w)(R^2zw \rightarrow R^2ts)}{\hline}$		[$\Vdash \exists$]
$\frac{\Vdash (\forall x)(\exists u)(\forall y)(R^2xy \rightarrow R^2uv), (\exists s)(\forall z)(\exists t)(\forall w)(R^2zw \rightarrow R^2ts)}{\hline}$		[$\Vdash \forall$]
$\frac{\Vdash (\exists v)(\forall x)(\exists u)(\forall y)(R^2xy \rightarrow R^2uv), (\exists s)(\forall z)(\exists t)(\forall w)(R^2zw \rightarrow R^2ts)}{\hline}$		[$\Vdash \exists$]
$\frac{\Vdash (\exists v)(\forall x)(\exists u)(\forall y)(R^2xy \rightarrow R^2uv)}{\hline}$		[$\Vdash C$]

1.2 Secuencia $\langle s_1, \dots, s_k \rangle$: $\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$ (en negrita las variables dependientes).

1.3 Sustituciones $s_i / g_i^k(-, s)$.

1. $\Vdash R^2xy \rightarrow R^2uv[v, x, u, y], R^2zw \rightarrow R^2xy[y, z, x, w]$

2. $\Vdash R^2g^1(v)y \rightarrow R^2uv[v, g^1(v), u, y], R^2zw \rightarrow R^2g^1(v)y[y, z, g^1(v), w]$
3. $\Vdash R^2g^1(v)g^2(v, u) \rightarrow R^2uv[v, g^1(v), u, g^2(v, u)], R^2zw \rightarrow R^2g^1(v)g^2(v, u)[g^2(v, u), z, g^1(v), w]$
4. $\Vdash R^2g^1(v)g^2(v, u) \rightarrow R^2uv[v, g^1(v), u, g^2(v, u)], R^2g^1(g^2(v, u))w \rightarrow R^2g^1(v)g^2(v, u)[g^2(v, u), g^1(g^2(v, u)), g^1(v), w]$
5. $\Vdash R^2g^1(v)g^2(v, u) \rightarrow R^2uv[v, g^1(v), u, g^2(v, u)], R^2g^1(g^2(v, u))g^2(g^2(v, u), g^1(v)) \rightarrow R^2g^1(v)g^2(v, u)[g^2(v, u), g^1(g^2(v, u)), g^1(v), g^2(g^2(v, u), g^1(v))]$

\Leftarrow Se parte de

$$\Vdash R^2g^1(v)g^2(v, u) \rightarrow R^2uv, R^2g^1(g^2(v, u))g^2(g^2(v, u), g^1(v)) \rightarrow R^2g^1(v)g^2(v, u).$$

1.4 Ordenación de los términos $g^k(s_h^q, \dots, s_j^q)$.

$$\left. \begin{array}{l} g^1(v) \geq g^2(g^2(v, u), g^1(v)) \\ g^2(v, u) \geq g^2(g^2(v, u), g^1(v)) \\ g^2(v, u) \geq g^1(g^2(v, u)) \\ g^1(v) \geq g^2(v, u) \geq g^1(g^2(v, u)) \geq g^2(g^2(v, u), g^1(v)) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{orden parcial} \\ \text{orden lineal} \end{array}$$

1.5 Sustitución $g_i^k(s_h^q, \dots, s_j^q) / v_j$ ($v_j = x, y, z, w$).

$$\begin{array}{l} \Vdash R^2xg^2(v, u) \rightarrow R^2uv, R^2g^1(g^2(v, u))g^2(g^2(v, u), x) \rightarrow R^2xg^2(v, u). \\ \Vdash R^2xy \rightarrow R^2uv, R^2g^1(y)g^2(y, x) \rightarrow R^2xy. \\ \Vdash R^2xy \rightarrow R^2uv, R^2zg^2(y, x) \rightarrow R^2xy. \\ \Vdash R^2xy \rightarrow R^2uv, R^2zw \rightarrow R^2xy \end{array}$$

Para la derivación de $\Vdash (\exists v)(\forall x)(\exists u)(\forall y)(R^2xy \rightarrow R^2uv)$ a partir de este secuyente se procede como en 1.1.

EJEMPLO 2. $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\forall v)(R^2yv \rightarrow R^2xz)$.

\Rightarrow 2.1 Demostración (se omiten las aplicaciones de $\Vdash P$).

$R^2yz \Vdash R^2yz$		[Axioma]
$R^2yz, R^2xw \Vdash R^2yz$		[D] \Vdash
$R^2yz, R^2xw \Vdash R^2uv, R^2yz$		[D] \Vdash
$R^2yz \Vdash R^2uv, R^2xw \rightarrow R^2yz$		[$\Vdash \rightarrow$]
$\Vdash R^2yz \rightarrow R^2uv, R^2xw \rightarrow R^2yz$	secuyente medio	[$\Vdash \rightarrow$]
$\Vdash R^2yz \rightarrow R^2uv, (\forall w)(R^2xw \rightarrow R^2yz)$		[$\Vdash \forall$]
$\Vdash R^2yz \rightarrow R^2uv, (\exists z)(\forall w)(R^2xw \rightarrow R^2yz)$		[$\Vdash \exists$]
$\Vdash (\forall z)(R^2yz \rightarrow R^2uv), (\exists z)(\forall w)(R^2xw \rightarrow R^2yz)$		[$\Vdash \forall$]
$\Vdash (\exists v)(\forall z)(R^2yz \rightarrow R^2uv), (\exists z)(\forall w)(R^2xw \rightarrow R^2yz)$		[$\Vdash \exists$]
$\Vdash (\exists y)(\exists v)(\forall z)(R^2yz \rightarrow R^2uv), (\exists z)(\forall w)(R^2xw \rightarrow R^2yz)$		[$\Vdash \exists$]
$\Vdash (\forall u)(\exists y)(\exists v)(\forall z)(R^2yz \rightarrow R^2uv), (\exists z)(\forall w)(R^2xw \rightarrow R^2yz)$		[$\Vdash \forall$]
$\Vdash (\forall u)(\exists y)(\exists v)(\forall z)(R^2yz \rightarrow R^2uv), (\exists x)(\exists z)(\forall w)(R^2xw \rightarrow R^2yz)$		[$\Vdash \exists$]
$\Vdash (\forall u)(\exists y)(\exists v)(\forall z)(R^2yz \rightarrow R^2uv), (\forall y)(\exists x)(\exists z)(\forall w)(R^2xw \rightarrow R^2yz)$		[$\Vdash \forall$]
$\Vdash (\forall x)(\exists y)(\exists z)(\forall v)(R^2yv \rightarrow R^2xz)$		[$\Vdash C$]

2.2 Secuencia $\langle s_1, \dots, s_k \rangle$: $\langle \mathbf{w}, z, z, v, y, \mathbf{u}, x, \mathbf{y} \rangle$ (en negrita las variables dependientes).

2.3 Sustituciones $s_i / g^k(-, s)$.

1. $\Vdash (R^2yz \rightarrow R^2uv)[u, y, v, z], (R^2xw \rightarrow R^2yz)[y, x, z, w]$
2. $\Vdash (R^2g^0z \rightarrow R^2uv)[u, g^0, v, z], (R^2xw \rightarrow R^2g^0z)[g^0, x, z, w]$
3. $\Vdash (R^2g^0z \rightarrow R^2f^0v)[f^0, g^0, v, z], (R^2xw \rightarrow R^2g^0z)[g^0, x, z, w]$
4. $\Vdash (R^2g^0g^2(g^0, v) \rightarrow R^2f^0v)[f^0, g^0, v, g^2(g^0, v)], (R^2xw \rightarrow R^2g^0g^2(g^0, v))[g^0, x, g^2(g^0, v), w]$

$$5. \Vdash (R^2g^0g^2(g^0,v) \rightarrow R^2f^0v) [f^0, g^0, v, g^2(g^0, v)], (R^2xg^2(x, g^2(g^0, v)) \rightarrow R^2g^0g^2(g^0, v)) [g^0, x, g^2(g^0, v), g^2(x, g^2(g^0, v))]$$

\Leftarrow Se parte de

$$\Vdash (R^2g^0g^2(g^0, v) \rightarrow R^2f^0v), (R^2xg^2(x, g^2(g^0, v)) \rightarrow R^2g^0g^2(g^0, v))$$

2.4 Ordenación de los términos $g_i^k(s_{h^q}, \dots, s_{j^q})$.

$$f^0 \geq g^0 \geq g^2(g^0, v) \geq g^2(x, g^2(g^0, v))$$

2.5 Sustitución $g_i^k(s_{h^q}, \dots, s_{j^q}) / v_j$ ($v_j = u, y, z, w$).

$$\Vdash (R^2g^0g^2(g^0, v) \rightarrow R^2uv), (R^2xg^2(x, g^2(g^0, v)) \rightarrow R^2g^0g^2(g^0, v))$$

$$\Vdash (R^2yg^2(y, v) \rightarrow R^2uv), (R^2xg^2(x, g^2(y, v)) \rightarrow R^2yg^2(y, v))$$

$$\Vdash (R^2yz \rightarrow R^2uv), (R^2xg^2(x, z) \rightarrow R^2yz)$$

$$\Vdash (R^2yz \rightarrow R^2uv), (R^2xw \rightarrow R^2yz)$$

Para la derivación de $\Vdash (\forall x)(\exists y)(\exists z)(\forall v)(R^2yv \rightarrow R^2xz)$ a partir de este secuento procédase como en 1.1.

EJERCICIOS.

- (1) Demostrar que los SS- son consistentes en el siguiente sentido: para ninguna fórmula A sucede que $\Vdash A$ y $A \dashv$ sean SS-demostrables. (Pista: recurrir a la admisibilidad de la regla de corte y la propiedad de subfórmulas).
- (2) Si t es la función de traducción de fórmulas clásicas en fórmulas intuicionistas del capítulo 4, demuéstrese que para cualquier fórmula A de \mathcal{P} , A es demostrable en SC- syss $t(A)$ es demostrable en SI-.
- (3) Formular y dar una demostración del teorema de Craig-Lyndon para SI- y SC- -es decir, sin usar el operador \perp . (Pista: extiéndase el prologuaje \mathcal{P} introduciendo una nueva letra relacional 0-aria \mathbf{p} ; sin embargo A y B seguirán siendo fórmulas de \mathcal{P} (i.e., sin ocurrencias de \mathbf{p}), a diferencia de C . Finalmente, reformúlense las condiciones 2 y 3 para fórmulas atómicas $B \neq \mathbf{p}$ y úsese $\mathbf{p} \& \neg \mathbf{p}$ en lugar de \perp).

