CAPÍTULO 3. CÁLCULOS DE SECUENTES CON REGLA DE CORTE

> El nuevo experimento ha probado, una vez más, que el chimpancé puede aplicar con corrección unas elementales reglas sintácticas, y que conecta adecuadamente la aplicación de estas reglas con la obtención de ciertas recompensas.
>
> J.Hierro, *Principios de Filosofía del Lenguaje*.

NOCIÓN DE SECUENTE

Los cálculos de secuentes para las lógicas mínima, intuicionista y clásica que se describen en este capítulo comparten con los sistemas hilbertianos del capítulo anterior, como primer componente, el prolenguaje $\mathcal{P}$.

Un *secuente de* $\mathcal{P}$ es un triplo $\langle X,\Vdash,Y\rangle$ formado por dos secuencias finitas de fórmulas de $\mathcal{P}$, X e Y, y un signo metalingüístico, '$\Vdash$', llamado «separador de secuente». En lo sucesivo escribiremos '$X\Vdash Y$' por '$\langle X,\Vdash,Y\rangle$'. Una segunda convención notacional es que escribiremos '$X,A,B,X'\Vdash Y$' por '$X''\Vdash Y$', donde X'' es la secuencia de fórmulas de $\mathcal{P}$ obtenida enumerando X, a continuación las fórmulas A y B, y finalmente X'. Análogamente, escribiremos '$X\Vdash Y,A,B,Y´$' por '$X\Vdash Y``$', donde Y'' resulta de Y,A,B,Y` del modo descrito. En el secuente '$X\Vdash Y$', la secuencia X es la parte *antecedente* e Y la parte *consecuente*.

La estrategia para la definición de relaciones de consecuencia sobre $\mathcal{P}$ propia del cálculo de secuentes es, esquemáticamente, la siguiente:

1/ Se define recursivamente un conjunto de secuentes de $\mathcal{P}$ - los secuentes demostrables. Este primer paso puede verse asimismo como la definición de una pseudorrelación de consecuencia, o de una relación de consecuencia de Scott, $\Vdash\ \subseteq \mathrm{Sb}(\mathcal{P})^2$:: $\langle X,Y\rangle\in\ \Vdash$ syss el secuente $X\Vdash Y$ es demostrable.

2/ Defínase a continuación, para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, $X\vdash A$ (A se sigue del conjunto X) syss para algún secuencia finita Y de elementos de X, el secuente $Y\Vdash A$ es demostrable.

SECUENTES DEMOSTRABLES EN LAS LÓGICAS MÍNIMA, INTUICIONISTA Y CLÁSICA.

Lógica mínima (SM).

➢ Reglas estructurales

Reglas de razonamiento

Axiomas $A\Vdash A$ Corte $\dfrac{X\Vdash A \qquad X,A\Vdash B}{X\Vdash B}$

Reglas de datos

$D\Vdash$ $\dfrac{X\Vdash Y}{X,A\Vdash Y}$ $C\Vdash$ $\dfrac{X,A,A\Vdash Y}{X,A\Vdash Y}$ $P\Vdash$ $\dfrac{X,A,B,X'\Vdash Y}{X,B,A,X'\Vdash Y}$

Reglas operacionales

$$\Vdash\& \quad \frac{X\Vdash A \qquad X\Vdash B}{X\Vdash A\&B} \qquad \&\Vdash \quad \frac{X,A\Vdash C}{X,A\&B\Vdash C} \qquad \&\Vdash \quad \frac{X,B\Vdash C}{X,A\&B\Vdash C}$$

$$\vee\Vdash \quad \frac{X,A\Vdash C \qquad X,B\Vdash C}{X,A\vee B\Vdash C} \qquad \Vdash\vee \quad \frac{X\Vdash A}{X\Vdash A\vee B} \qquad \Vdash\vee \quad \frac{X\Vdash B}{X\Vdash A\vee B}$$

$$\neg\Vdash \quad \frac{X\Vdash A}{X,\neg A\Vdash} \qquad \Vdash\neg \quad \frac{X,A\Vdash}{X\Vdash\neg A}$$

$$\Vdash\rightarrow \quad \frac{X,A\Vdash B}{X\Vdash A\rightarrow B} \qquad \rightarrow\Vdash \quad \frac{X\Vdash A \qquad X,B\Vdash C}{X,A\rightarrow B\Vdash C}$$

$$\Vdash\forall^{(*)} \quad \frac{X\Vdash A}{X\Vdash(\forall v)A} \qquad \forall\Vdash^{(**)} \quad \frac{X,A[t]\Vdash B}{X,(\forall v)A[v]\Vdash B}$$

$$\Vdash\exists^{(**)} \quad \frac{X\Vdash A[t]}{X\Vdash(\exists v)A[v]} \qquad \exists\Vdash^{(*)} \quad \frac{X,A\Vdash B}{X,(\exists v)A\Vdash B}$$

(*) v no está libre en X, B; se dice que v es la *variable dependiente* de la regla.
(**) t es un término arbitrario de $\wp$.

Al leer las reglas $\&\Vdash$, $\vee\Vdash$, $\rightarrow\Vdash$, $\forall\Vdash$ y $\exists\Vdash$ ha de tenerse en cuenta que el lado derecho de los secuentes puede ser vacío; además el lado derecho de la premisa derecha de la regla de Corte puede ser vacío y en tal caso también lo será el de la conclusión.

Lógica intuicionista (SI).

El cálculo de secuentes intuicionista, SI, resulta de añadir a SM la regla estructural de datos

$$\Vdash D \quad \frac{X\Vdash}{X\Vdash A}$$

Lógica clásica (SC).

El cálculo de secuentes clásico, SC, se obtiene al añadir dos reglas estructurales a SI y generalizar las reglas de éste para permitir la manipulación de secuentes con más de una fórmula en su parte consecuente.

- Reglas estructurales

Reglas de razonamiento

$$\text{Axiomas} \quad A\Vdash A \qquad \text{Corte} \quad \frac{X\Vdash A \qquad X,A\Vdash Y}{X\Vdash Y}$$

Reglas de datos

$$D\Vdash \quad \frac{X\Vdash Y}{X,A\Vdash Y} \qquad \Vdash D \quad \frac{X\Vdash Y}{X\Vdash A,Y}$$

$$C\Vdash \quad \frac{X,A,A\Vdash Y}{X,A\Vdash Y} \qquad \Vdash C \quad \frac{X\Vdash A,A,Y}{X\Vdash A,Y}$$

$$P\Vdash \quad \frac{X,A,B,X'\Vdash Y}{X,B,A,X'\Vdash Y} \qquad \Vdash P \quad \frac{X\Vdash Y,A,B,Y'}{X\Vdash Y,B,A,Y'}$$

Reglas operacionales

$$\Vdash\& \quad \frac{X\Vdash A,Y \qquad X\Vdash B,Y}{X\Vdash A\&B,Y} \qquad \&\Vdash \quad \frac{X,A\Vdash Y}{X,A\&B\Vdash Y} \qquad \&\Vdash \quad \frac{X,B\Vdash Y}{X,A\&B\Vdash Y}$$

$$\vee\Vdash \quad \frac{X,A\Vdash Y \qquad X,B\Vdash Y}{X,A\vee B\Vdash Y} \qquad \Vdash\vee \quad \frac{X\Vdash A,Y}{X\Vdash A\vee B,Y} \qquad \Vdash\vee \quad \frac{X\Vdash B,Y}{X\Vdash A\vee B,Y}$$

$$\neg\Vdash \quad \frac{X\Vdash A,Y}{X,\neg A\Vdash Y} \qquad \Vdash\neg \quad \frac{X,A\Vdash Y}{X\Vdash \neg A,Y}$$

$$\Vdash\rightarrow \quad \frac{X,A\Vdash B,Y}{X\Vdash A\rightarrow B,Y} \qquad \rightarrow\Vdash \quad \frac{X\Vdash A,Y \qquad X,B\Vdash Y}{X,A\rightarrow B\Vdash Y}$$

$$\Vdash\forall^{*} \quad \frac{X\Vdash A,Y}{X\Vdash(\forall v)A,Y} \qquad \forall\Vdash^{**} \quad \frac{X,A[t]\Vdash Y}{X,(\forall v)A[v]\Vdash Y}$$

$$\Vdash\exists^{**} \quad \frac{X\Vdash A[t],Y}{X\Vdash(\exists v)A[v],Y} \qquad \exists\Vdash^{*} \quad \frac{X,A\Vdash Y}{X,(\exists v)A\Vdash Y}$$

(*) v no está libre en X, Y; se dice que v es la *variable dependiente* de la regla.
(**) t es un término arbitrario de $\mathcal{P}$.

OBSERVACIONES.-
[1] Las reglas de cálculo secuencial definen directamente una relación de consecuencia de Scott, e indirectamente, a través de aquella, una relación de consecuencia de Tarski.
[2] Las diferencias entre las nociones de derivabilidad mínima, intuicionista y clásica se refieren fundamentalmente al tipo de objetos sintácticos manipulados. La derivabilidad mínima y la intuicionista se definen por medio de una relación de consecuencia de Scott formada por pares de las formas <X,A> y <X,∅>, donde X es una secuencia finita de fórmulas X y A una fórmula. La derivabilidad clásica, por su parte, se define en términos de una pseudorrelación de consecuencia que trata con pares de secuencias finitas de fórmulas.
[3] Adviértase que lo que diferencia al sistema intuicionista del mínimo es la presencia de la regla de debilitamiento por la izquierda

$$\frac{X\Vdash}{X\Vdash A}$$

que es una regla de datos. Por consiguiente, también en este caso las diferencias entre ambos son cuestión del tipo de estructuras admitidas.
[4] Las reglas de razonamiento expresan propiedades generales de la operación de consecuencia correspondiente: la reflexividad en el caso del esquema axiomático $A\Vdash A$ y transitividad en el caso de la regla de Corte.
[5] A primera vista puede chocar la consideración del esquema axiomático como una regla. La explicación es que puede ser visto como la conclusión de una regla con un conjunto vacío de premisas; es decir, de la forma

$$\frac{}{A\Vdash A}$$

[6] Las reglas D$\Vdash$ y $\Vdash$D reciben el nombre de «debilitamiento del antecedente» y «debilitamiento del consecuente», respectivamente; las reglas C$\Vdash$ y $\Vdash$C son reglas de contracción, en el antecedente y en el consecuente, respectivamente; P$\Vdash$ y $\Vdash$P son reglas de permutación en el antecedente y en el consecuente.
[7] Para entender el papel de las reglas de datos, se define primero una relación de equivalencia entre secuencias finitas de fórmulas: dos secuencias son equivalentes si toda fórmula que ocurre en una de ellas ocurre en la otra y viceversa. A partir de aquí se define una segunda relación de

equivalencia, esta entre secuentes: los secuentes X╟Y y Z╟W son equivalentes cuando sus antecedentes son equivalentes entre sí y lo mismo sucede con sus conecuentes.
[8] Las reglas de datos de SM, SI y SC garantizan que si puede obtenerse un secuente Z╟W a partir de un secuente X╟Y aplicando reglas del sistema, entonces (a) Z╟W puede obtenerse a partir de cualquier secuente equivalente a X╟Y, y (b) cualquier secuente equivalente a Z╟W puede obtenerse a partir de X╟Y aplicando las reglas del sistema.
[9] En cuanto a las reglas operacionales, se dividen en reglas de introducción en el antecedente y en el consecuente. Así &╟ es la regla de introducción del conjuntor en el antecedente y ╟ la de introducción del conjuntor en el consecuente.
[10] Por lo que respecta a la interpretación de las reglas ∀╟ y ╟∃, adviértase que A[v] puede no ser el resultado de sustituir cada ocurrencia de t en A por una ocurrencia de v, es decir, que en A[v] puede haber ocurrencias de t. Por ejemplo, el paso

$$\frac{X \Vdash R^2tt,Y}{X \Vdash (\exists x)R^2xt,Y}$$

es legítimo (cada ocurrencia de 'x' en (∃x)R^2xt ha sido sustituida por una ocurrencia de 't' en R^2tt).
[11] Pese a lo dicho en la primera de estas observaciones (pero adviértase la presencia del adverbio 'fundamentalmente'), algunas de las diferencias entre SI y SC tienen que ver con las reglas operacionales. Por ejemplo, lo que hace de

$$\begin{array}{ll} \underline{A \Vdash A} & \text{axioma} \\ \underline{\Vdash \neg A, A} & \Vdash\neg \\ \neg\neg A \Vdash A & \neg\Vdash \end{array}$$

una derivación peculiar de de SC, sin parangón en SI, es el uso de la regla ╟¬ en su forma clásica,

$$\frac{X,A \Vdash Y}{X \Vdash \neg A,Y}$$

que no es aceptable para el intuicionista.

NOCIÓN DE DEMOSTRACIÓN DE UN SECUENTE.

Podría definirse una demostración de un secuente X╟Y en SS (=SM,SI,SC) como una secuencia finita de secuentes <X_1╟Y_1,...,X_n╟Y_n> , adaptando convenientemente la definición de demostración en HS del capítulo 4 y reformulando en el mismo sentido las reglas con dos premisas de SS –por ejemplo., reescribiendo *Corte* como

$$\frac{\begin{array}{c} X \Vdash A,Z \\ Y,A \Vdash W \end{array}}{X,Y \Vdash Z,W.}$$

Sin embargo en su presentación más frecuente las demostraciones en SS no son secuencias sino árboles.

Un *árbol* es un sistema relacional T =<B,{R},∅>, α(R)=2, en el que se cumplen las condiciones siguientes:

1) R es irreflexiva, antisimétrica e intransitiva,

2) hay un b∈B tal que para todo a∈B, (i) no aRb, y (ii) si a≠b, hay a_1∈B,...,a_n∈, bRa_1, a_1Ra_2,...,a_nRa (se dice que b es el origen de T),

3) para cualesquiera a,a' y c de B, si aRc y a'Rc entonces a=a'.

Los elementos de B son entonces *nodos* de T. Si aRa' se dice que el nodo a *precede* al nodo a' o que éste *sucede* a aquél. Si cada nodo del árbol T tiene finitos sucesores, T es *finitamente ramificado*. Si cada nodo de T tiene a lo sumo dos sucesores se dice que T es *binario*, si cada nodo tiene a lo sumo tres sucesores que T es *ternario*, etc. Un nodo sin sucesores es un *nodo terminal*. Para cada n∈N, R^n se define inductivamente: (1) aR^1a' syss aRa', (2) aR^{k+1}a' syss hay un nodo a" tal que aR^ka" y a"R^1a'. Cuando hay un n∈N tal que aR^na' se dice que el nodo a *domina* al nodo a'.

Usando la terminología que se acaba de introducir, los requisitos 1-3 en la definición de árbol pueden reformularse como sigue:

1) R es irreflexiva, antisimétrica e intransitiva,

2) hay un nodo b (el origen de T) que domina a todos los nodos de T distintos de sí mismo y que no es dominado por ninguno,

3) todo nodo de T, salvo su origen, tiene un único predecesor.

Si T=$\langle$B,{R},$\varnothing\rangle$ es un árbol, una *rama* de T es un A$\subseteq$B linealmente ordenado por R; la *longitud* de la rama A de T es Card(A).

Una *demostración* de un secuente X$\Vdash$Y en SS (=SM,SI,SC) es un árbol finito cuyos nodos son secuentes que cum,ple las condiciones:

(1) su origen es el secuente X$\Vdash$Y,

(2) sus nodos terminales son axiomas,

(3) cualquier nodo no terminal resulta de su(s) sucesor(es) al aplicar una regla de SS.

Del formato de las reglas de SM, SI y SC se sigue que una demostración es, en todos estos casos, un árbol binario. Convencionalmente las demostraciones de los sistemas secuenciales se escriben colocando su origen en la parte inferior.

Dada una demostración π en SS (y por tanto un árbol), la *longitud* de π es la mayor de entre las longitudes de sus ramas. Más formalmente, long(π) se define recursivamente:

(1) long(A$\Vdash$A)=1,

(2) si π es de la forma

$$\mathrm{R}\ \dfrac{\begin{array}{cc}\lambda & \mu\\ \vdots & \vdots\end{array}}{X\Vdash Y}$$

donde R es una regla de SS con dos premisas (Corte,$\Vdash$&,v$\Vdash$$\rightarrow$$\Vdash$) long($\pi$)= máx(long($\lambda$),long($\mu$)) +1;

(3) si π es de la forma

$$\mathrm{R}\ \dfrac{\begin{array}{c}\lambda\\ \vdots\end{array}}{X\Vdash Y}$$

donde R es una regla de SS de una premisa, long(π)=long(λ)+1.

La noción de *altura* de una demostración π, alt(π), es semejante a la de longitud, de la que se diferencia por abstraer de las reglas de datos. Así pues,

(1) alt(A$\Vdash$A)=1,

(2) si π es de la forma

$$\mathrm{R}\ \dfrac{\begin{array}{cc}\lambda & \mu\\ \vdots & \vdots\end{array}}{X\Vdash Y}$$

donde R es una regla de SS con dos premisas (Corte,$\Vdash$&,v$\Vdash$$\rightarrow$$\Vdash$), alt($\pi$)=máx(alt($\lambda$),alt($\mu$))+1;

(3) si π es de la forma

$$\mathrm{R}\ \dfrac{\begin{array}{c}\lambda\\ \vdots\end{array}}{X\Vdash Y}$$

donde R es una regla operacional de SS de una premisa, alt(π)=alt(λ)+1.

(4) si π es de la forma

$$\mathrm{R}\ \dfrac{\begin{array}{c}\lambda\\ \vdots\end{array}}{X\Vdash Y}$$

donde R es una regla de datos de SS, alt(π)=alt(λ).

La noción de demostración de *un secuente* en SS no ha de confundirse con la de demostración de *una fórmula*; según lo expuesto en la primera sección de este capítulo, una fórmula A es demostrable en SS ($\vdash_{SS}$A) syss lo es el secuente $\Vdash$A ($\varnothing\Vdash\{A\}$), siendo rigurosos). Por tanto, una demostración de una fórmula A en SS es una demostración de este secuente.

CONVENCIONES SOBRE EL USO DE VARIABLES EN LAS DEMOSTRACIONES.

La manipulación de ocurrencias libres y ligadas de las variables en las demostraciones da lugar a problemas, poco importantes y tediosos, cuya solución precisa es bastante prolija. Para evitarlos se establecen a continuación algunas convenciones, que pueden resumirse en el eslógan *una variable ligada carece de individualidad*. La propuesta es identificar dos fórmulas que difieran únicamente por los «nombres» de sus variables ligadas; por ejemplo, $(\exists y)(\forall x)(R^2{}_1xy)$ y $(\exists x)(\forall z)(R^2{}_1zx)$. De manera un poco más precisa, se define una relación de equivalencia ~ entre fórmulas:

(1) A~A,
(2) si A~B entonces ¬A~¬B,
(3) si A~B y C~D entonces A&C~B&D, AvC~BvD y A→C~B→D,
(4) si A[v] y B[v'] son fórmulas y w es una variable que no ocurre en ninguna de las dos, si A[w]~B[w] entonces (∀x)A[x]~(∀y)B[y] y (∃x)A[x]~(∃y)B[y].

Una consecuencia inmediata de esta definición es que para cualquier fórmula A existe una fórmula B tal que A~B, ninguna variable tiene ocurrencias libres y ligadas en B, y toda variable ligada de B ocurre únicamente dentro del alcance de una misma ocurrencia de un cuantificador.

Se conviene entonces en leer los axiomas y reglas de los sistemas de cálculo de secuentes interpretando las metavariables A,B,etc. por clases de equivalencia de fórmulas módulo ~. Por consiguiente, las reglas

$$\Vdash\forall^{(*)}\ \frac{X\Vdash A,Y}{X\Vdash(\forall v)A,Y}\qquad \exists\Vdash^{(*)}\ \frac{X,A\Vdash Y}{X,(\exists v)A\Vdash Y}$$

pueden transcribirse también, conservando la restricción «v no está libre en X,Y», así:

$$\Vdash\forall^{(*)}\ \frac{X\Vdash A[v],Y}{X\Vdash(\forall w)A[w],Y}\qquad \exists\Vdash^{(*)}\ \frac{X,A[v]\Vdash Y}{X,(\exists w)A[w]\Vdash Y}$$

-es decir,, sin identificar la variable dependiente de la regla con la variable cuantificada al aplicarla.

Estas convenciones permiten suponer en lo sucesivo que se trabaja únicamente con derivaciones π tales que

(1) ningún secuente en π contiene ocurrencias libres y ligadas de una misma variable,
(2) las variables dependientes de las aplicaciones de las reglas $\Vdash\forall$ y $\exists\Vdash$ en π son distintas entre sí,
(3) todas las ocurrencias de una variable ligada de una fórmula B en un secuente de π caen bajo el alcance de una misma ocurrencia de un cuantificador.

Así una demostración como:

$$[\exists\Vdash]\ \dfrac{[\neg\Vdash]\ \dfrac{[\mathrm{Corte}]\ \dfrac{[\Vdash\forall]\ \dfrac{[\forall\Vdash]\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Px\Vdash Px}\ \mathrm{Ax.}}{Px\&Ry\Vdash Px}\ [\&\Vdash]}{(\exists y)(Px\&Ry)\Vdash Px}\ [\exists\Vdash]}{(\forall x)(\exists y)(Px\&Ry)\Vdash Px}}{(\forall x)(\exists y)(Px\&Ry)\Vdash(\forall x)Px}\qquad \dfrac{\dfrac{}{Px\Vdash Px}\ \mathrm{Ax}}{(\forall x)Px\Vdash Px}\ \forall\Vdash}{(\forall x)(\exists y)(Px\&Ry)\Vdash Px}}{(\forall x)(\exists y)(Px\&Ry),\neg Px\Vdash}}{(\forall x)(\exists y)(Px\&Ry),(\exists x)\neg Px\Vdash}$$

será reemplazada sistemáticamente por otras como

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Px \Vdash Px}{Px\&Ry \Vdash Px}\,[\&\Vdash]}{(\exists y)(Px\&Ry) \Vdash Px}\,[\exists\Vdash]}{(\forall z)(\exists y)(Pz\&Ry) \Vdash Px}\,[\forall\Vdash]}{(\forall z)(\exists y)(Pz\&Ry) \Vdash (\forall x)Px}\,[\Vdash\forall] \quad \dfrac{Pw \Vdash Pw\ \text{Ax.}}{(\forall x)Px \Vdash Pw}\,[\forall\Vdash]}{(\forall z)(\exists y)(Pz\&Ry) \Vdash Pw}\,[\text{Corte}]}{(\forall z)(\exists y)(Pz\&Ry),\neg Pw \Vdash}\,[\neg\Vdash]}{(\forall z)(\exists y)(Pz\&Ry),(\exists w)\neg Pw \Vdash}\,[\exists\Vdash]
$$

que, en un sentido que espero quede claro para el lector, son equivalentes a la primera.

EQUIVALENCIA DE SISTEMAS HILBERTIANOS Y CÁLCULOS DE SECUENTES CON REGLA DE CORTE.[1]

La coexistencia de los sistemas hilbertianos y los cálculos de secuentes con Corte obliga a preguntarse «¿Qué tienen que ver la derivabilidad hilbertiana, $\vdash_{HS}$, y la derivabilidad secuencial, $|_{SS}$?». En esta sección se muestra que se trata de definiciones distintas de una misma relación de consecuencia.

LEMA 3. Si $X \Vdash Y,A\to B,Y'$ es SS (=SM,SI,SC) demostrable, también lo es $X,A \Vdash Y,B,Y'$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre la longitud de la demostración de $X \Vdash Y,A\to B,Y'$. Si es un axioma, i.e. de la forma $A\to B \Vdash A\to B$, la demostración correspondiente es:

$$\dfrac{A \Vdash A \qquad B \Vdash B \quad \text{Axiomas}}{A\to B,A \Vdash B}\ \to\Vdash$$

Los casos de las reglas de datos por la izquierda y la regla de corte no ofrecen dificultad, basta con aplicar la regla en cuestión a la hipótesis de inducción. Consideremos entonces las restantes reglas estructurales. La demostración correspondiente a

$$[\Vdash D]\ \dfrac{X \Vdash Y}{X \Vdash A\to B,Y}$$

es

$$\dfrac{\dfrac{X \Vdash Y}{X,A \Vdash Y}\,D\Vdash}{X,A \Vdash B,Y}\,\Vdash D$$

En cuanto a la regla de contracción en el consecuente, la demostración para

$$[\Vdash C]\ \dfrac{X \Vdash A\to B,A\to B,Y}{X \Vdash A\to B,Y}$$

es

hip.ind.	$X \Vdash A\to B,Y$	$A \Vdash A$	$B \Vdash B$	[Axs.]
$D\Vdash$	$X,A \Vdash A\to B,Y$	$A\to B,A \Vdash B$		$\to\Vdash$
Corte	$X,A,A \Vdash B,Y$			
$\Vdash C$	$X,A \Vdash B,Y$			

La demostración en el caso de $\Vdash P$ es inmediata a partir del enunciado del teorema. En cuanto a las reglas operacionales, el esquema es siempre el mismo (salvo para $\Vdash\to$, que es inmediato): hipótesis de inducción y aplicación de la regla correspondiente, como ilustran los dos ejemplos siguientes.

$\&\Vdash$ $\dfrac{X,C \Vdash A\to B,Y}{}$ $\qquad$ $\dfrac{X,C,A \Vdash B,Y}{}$ hip.ind.

[1] En lo que sigue, para simplificar algo las demostraciones en cálculo secuencial se omiten las aplicaciones de la regla de permutación.

para $\&\Vdash$ $\dfrac{X,C\Vdash A\to B,Y}{X,C\&D\Vdash A\to B,Y}$ se tiene $\dfrac{X,C,A\Vdash B,Y}{X,C\&D,A\Vdash B,Y}\;\&\Vdash$ (hip.ind.)

y para $[\Vdash\&]$ $\dfrac{X\Vdash C,A\to B,Y \qquad X\Vdash D,A\to B,Y}{X\Vdash C\&D,A\to B,Y}$ se tiene $\dfrac{X,A\Vdash C,B,Y \qquad X,A\Vdash D,B,Y}{X,A\Vdash C\&D,B,Y}\;\Vdash\&$ (hip.ind.)

TEOREMA 7. Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, si $X\vdash_{HS}A$ entonces $X\vdash_{SS}A$ (S=M,I,C).

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre la longitud n de la derivación π de A a partir de X en HS. Si n=1 entonces o bien $A\in X$ o bien A es un axioma. En el primer supuesto $A\Vdash A$ es un axioma de cualquiera de los cálculos de secuentes descritos. En el segundo supuesto, mostramos cómo derivar cada uno de los esquemas axiomáticos de HS.

[A1]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Vdash A\;\;\text{Axioma}}{A,B\Vdash A}\;D\Vdash}{A\Vdash B\to A}\;\Vdash\to}{\Vdash A\to(B\to A)}\;\Vdash\to$$

[A2]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Vdash A \qquad B\Vdash B\;\;\text{Axiomas}}{A\to B,A\Vdash B}\;\to\Vdash \qquad A\Vdash A\;\;\text{Axioma}}{A\to(A\to B),A,A\Vdash B}\;\to\Vdash}{A\to(A\to B),A\Vdash B}\;C\Vdash}{A\to(A\to B)\Vdash A\to B}\;\Vdash\to}{\Vdash(A\to(A\to B))\to(A\to B)}\;\Vdash\to$$

[A3]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Vdash A \qquad B\Vdash B\;\;\text{Axs.}}{A\to B,A\Vdash B}\;\to\Vdash \qquad C\Vdash C\;\;\text{Ax.}}{A\to B,B\to C,A\Vdash C}\;\to\Vdash}{A\to B,B\to C\Vdash A\to C}\;\Vdash\to}{A\to B\Vdash(B\to C)\to(A\to C)}\;\Vdash\to}{\Vdash(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))}\;\Vdash\to$$

[A4]:

$$\dfrac{\dfrac{A\Vdash A\;\;\text{Axioma}}{A\&B\Vdash A}\;\&\Vdash}{\Vdash A\&B\to A}\;\Vdash\to$$

[A5]:

$$\dfrac{\dfrac{B\Vdash B\;\;\text{Axioma}}{A\&B\Vdash B}\;\&\Vdash}{\Vdash A\&B\to B}\;\Vdash\to$$

[A6]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Vdash A \quad B\Vdash B}{A\to B,A\Vdash B}}{A\to B,A,A\to C\Vdash B} \qquad \dfrac{\dfrac{A\Vdash A \quad C\Vdash C\;\;\text{Axs.}}{A\to C,A\Vdash C}\;\to\Vdash}{A\to B,A,A\to C\Vdash C}\;D\Vdash}{A\to B,A,A\to C\Vdash B\&C}\;\Vdash\&}{A\to B,A\to C,A\Vdash B\&C}\;P\Vdash}{A\to B,A\to C\Vdash A\to B\&C}\;\Vdash\to}{A\to B\Vdash (A\to C)\to(A\to B\&C)}\;\Vdash\to}{\Vdash(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to(B\&C)))}\;\Vdash\to$$

[A7]:

$$\dfrac{\dfrac{A \Vdash A \quad \text{Ax.}}{A \Vdash A\vee B}\ \Vdash\!\vee}{\Vdash A\to A\vee B}\ \Vdash\!\to$$

[A8]:

$$\dfrac{\dfrac{B \Vdash B \quad \text{Ax.}}{B \Vdash A\vee B}\ \Vdash\!\vee}{\Vdash B\to A\vee B}\ \Vdash\!\to$$

[A9]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Vdash A \quad C\Vdash C}{A\to C, A\Vdash C}\ \to\!\Vdash}{A\to C, B\to C, A\Vdash C}\ \mathrm{D}\!\Vdash \qquad \dfrac{\dfrac{B\Vdash B \quad C\Vdash C \quad \text{Axs.}}{B\to C, B\Vdash C}\ \to\!\Vdash}{A\to C, B\to C, B\Vdash C}\ \mathrm{D}\!\Vdash}{A\to C, B\to C, A\vee B\Vdash C}\ \vee\!\Vdash}{A\to C, B\to C\Vdash A\vee B\to C}\ \Vdash\!\to}{A\to C\Vdash (B\to C)\to(A\vee B\to C)}\ \Vdash\!\to}{\Vdash (A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))}\ \Vdash\!\to$$

[A10]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Vdash A \ \text{Ax} \qquad \dfrac{A\Vdash A \ \text{Ax.} \qquad \dfrac{B\Vdash B \ \text{Ax.}}{B,\neg B\Vdash}\ \neg\!\Vdash}{A\to B, A, \neg B\Vdash}\ \to\!\Vdash}{A\to B, A\to\neg B, A, A\Vdash}\ \to\!\Vdash}{A\to B, A\to\neg B, A\Vdash}\ \mathrm{C}\!\Vdash}{A\to B, A\to\neg B\Vdash\neg A}\ \Vdash\!\neg}{(A\to B)\&(A\to\neg B), A\to\neg B\Vdash\neg A}\ \&\!\Vdash}{(A\to B)\&(A\to\neg B), (A\to B)\&(A\to\neg B)\Vdash\neg A}\ \&\!\Vdash}{(A\to B)\&(A\to\neg B)\Vdash\neg A}\ \mathrm{C}\!\Vdash}{\Vdash (A\to B)\&(A\to\neg B)\to\neg A}\ \Vdash\!\to$$

[A11]:

$$\dfrac{\dfrac{A[t]\Vdash A[t] \quad \text{Axioma}}{(\forall v)A[v]\Vdash A[t]}\ \forall\!\Vdash}{\Vdash (\forall v)A[v]\to A[t]}\ \Vdash\!\to$$

[A12]:

$$\dfrac{\dfrac{A[t]\Vdash A[t] \quad \text{Axioma}}{A[t]\Vdash (\exists v)A[v]}\ \Vdash\!\exists}{\Vdash A[t]\to(\exists v)A[v]}\ \Vdash\!\to$$

[A13](HI):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Vdash A \quad \text{Axioma}}{A,\neg A\Vdash B}\ \Vdash\!\mathrm{D}}{\neg A, A\Vdash B}\ \Vdash\!\mathrm{P}}{\neg A\Vdash A\to B}\ \Vdash\!\to}{\Vdash \neg A\to(A\to B)}\ \Vdash\!\to$$

[A14](HC):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Vdash A \quad \text{Axioma}}{\Vdash \neg A, A}\ \Vdash\!\neg}{\neg\neg A\Vdash A}\ \neg\!\Vdash}{\Vdash \neg\neg A\to A}\ \Vdash\!\to$$

Para las reglas de prueba recurrimos al lema 3.

[R1]: Por hipótesis de inducción $\Vdash A\to B$ y $\Vdash A$, y por el lema 3 $A\Vdash B$; úsese entonces la regla de corte para llegar a $\Vdash B$.

[R2]: Por hipótesis de inducción $\Vdash B\to A[v]$ y por el lema 3 $B\Vdash A[v]$. A partir de aquí, supuesto que 'B' no contiene ocurrencias libres de 'v',

$$\dfrac{\dfrac{B\Vdash A[v]}{B\Vdash (\forall v)A[v]}\ \Vdash\!\forall}{\Vdash B\to(\forall v)A[v]}\ \Vdash\!\to$$

[R3]: Por hipótesis de inducción y el lema 3 $A[v]\Vdash B$, y entonces -de nuevo 'B' no contiene ocurrencias libres de la variable 'v',

$$
\begin{array}{cl}
A[v]\Vdash B & \\ \hline
(\exists v)A[v]\Vdash B & \exists\Vdash \\ \hline
\Vdash(\exists v)A[v]\to B & \Vdash\to
\end{array}
$$

$\dashv$

La demostración de la conversa del teorema 7 ((a saber, si $X\vdash_{SS}A$ entonces $X\vdash_{HS}A$) es bastante prolija. Por claridad, se realiza por separado para las lógicas mínima e intuicionista (teorema 8) y la lógica clásica (teorema 9).

TEOREMA 8. Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, si $X\vdash_{SM/SI}A$ entonces $X\vdash_{HM/HI}A$.

DEMOSTRACIÓN. Demostramos que si $X\Vdash Y$ es demostrable en SM/SI entonces (i) si $Y=\varnothing$ entonces $X\vdash_{HM/HI}A\&\neg A$, para alguna fórmula A sin variables libres, y (ii) si $Y=\{A\}$ entonces $X\vdash_{HM/HI}A$. Procedemos por inducción sobre la longitud n de la demostración de $X\Vdash Y$. Si n=1, $X\Vdash Y$ es un axioma y por tanto es de la forma $A\Vdash A$.

$$
\begin{array}{cl}
A\to(A\to A) & \text{A1} \\ \hline
(A\to(A\to A))\to(A\to A) & \text{A2} \\ \hline
A\to A & \text{R1}
\end{array}
$$

y por el teorema de deducción se concluye $A\vdash_{HM/HI}A$. Sea pues n=k+1. Los casos de las reglas de datos son inmediatos. La única excepción, para SI, es $[\Vdash D]$:

$$
\begin{array}{c}
X\Vdash \\ \hline
X\Vdash A
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
X\vdash_{HI}B\&\neg B & \text{hip.ind.} \\ \hline
B\&\neg B\to\neg B & \text{A5} \\ \hline
\neg B\to(B\to A) & \text{A1} \\ \hline
B\&\neg B\to(B\to A) & \text{L9} \\ \hline
X\vdash_{HI/HC}B\to A & \text{L9} \\ \hline
B\&\neg B\to B & \text{A4} \\ \hline
X\vdash_{HI/HC}B & \text{L9} \\ \hline
X\vdash_{HI/HC}A & \text{R1}
\end{array}
$$

La única regla de razonamiento, Corte, no encierra especial dificultad. Por hipótesis hay sendas derivaciones en HM/HI de A a partir de X, llamémosle π, y de B a partir de $Y\cup\{A\}$, π'. La concatenación de π y π' proporciona entonces una derivación de B a partir de $X\cup Y$.

Vayamos ahora con las reglas operacionales.

$$
[\&\Vdash]: \qquad \frac{X,A\Vdash Y}{X,A\&B\Vdash Y} \qquad \frac{X,B\Vdash Y}{X,A\&B\Vdash Y}
$$

Por hipótesis de inducción hay una derivación π de C (que es de la forma $D\&\neg D$ o el único elemento de Y, según los casos) a partir de $X\cup\{A\}$; la derivación de C a partir de $X\cup\{A\&B\}$ es entonces:

$$
\begin{array}{cl}
[A\&B] & \\ \hline
A\&B\to A & \text{A4} \\ \hline
A & \text{R1} \\ \hline
[X] & \\ \hline
. & \\ \hline
. & \Big\}\quad\pi \\ \hline
. & \\ \hline
C &
\end{array}
$$

La otra variante de la regla se trata del mismo modo.

$$[\Vdash\&]: \quad \frac{X \Vdash A \qquad X \Vdash B}{X \Vdash A\&B}$$

Por hipótesis de inducción hay sendas derivaciones π y π'de A a partir de X y de B a partir del mismo conjunto de hipótesis, respectivamente. Úsese entonces adjunción -es decir, [L5].

$$[\Vdash v]: \qquad \frac{X,A \Vdash Y \qquad\qquad X,B \Vdash Y}{X,A\vee B \Vdash Y}$$

Sea C como en el caso de $[\&\Vdash]$. La hipótesis de inducción asegura la existencia de sendas derivaciones de C a partir de $X \cup \{A\}$ y de C a partir de $X \cup \{B\}$. Por el teorema de deducción hay entonces una derivación π de $A\rightarrow C$ a partir de X y una derivación π' de $B\rightarrow C$ a partir de X.

$$
\begin{array}{lcl}
 & (A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C)) & \text{A9} \\ \cline{2-2}
 & [X] & \\ \cline{2-2}
\pi \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} . \\ \hline . \\ \hline . \end{array} & \\ \cline{2-2}
 & A\rightarrow C & \\ \cline{2-2}
 & (B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C) & \text{R1} \\ \cline{2-2}
 & [X] & \\ \cline{2-2}
\pi' \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} . \\ \hline . \\ \hline . \end{array} & \\ \cline{2-2}
 & B\rightarrow C & \\ \cline{2-2}
 & A\vee B\rightarrow C & \text{R1}
\end{array}
$$

$$[\Vdash v]: \qquad \frac{X \Vdash A}{X \Vdash A v B} \qquad\qquad \frac{X \Vdash B}{X \Vdash A v B}$$

Los dos subcasos se tratan de forma similar (usando A7 o A8) y por eso nos ocupamos sólo del primero. Por hipótesis hay una derivación π de A a partir de X; así,

$$
\begin{array}{lcl}
 & [X] & \\ \cline{2-2}
\pi. \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} . \\ \hline . \\ \hline . \end{array} & \\ \cline{2-2}
 & A & \\ \cline{2-2}
 & A\rightarrow A v B & \text{A7} \\ \cline{2-2}
 & A v B & \text{R1}
\end{array}
$$

$$[\Vdash\rightarrow]: \quad \frac{X,A \Vdash B}{X \Vdash A\rightarrow B}$$

Si hay una derivación de B a partir de $X \cup \{A\}$ entonces por el teorema de deducción hay una derivación de $A\rightarrow B$ a partir de X.

$$[\rightarrow\Vdash]: \quad \frac{X \Vdash A \qquad X\, B \Vdash C}{X,A\rightarrow B \Vdash C}$$

Sea π una derivación de A a partir de X y π' una derivación de C a partir de $X \cup B$. Usando el teorema de deducción, hay una derivación de $B\rightarrow C$ a partir de X, π''.

$$
\begin{array}{lll}
 & [X] & \\ \cline{2-2}
\pi \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{l} . \\ \hline . \\ \hline . \end{array} & \\ \cline{2-2}
 & A & \\ \cline{2-2}
 & A\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow A) & \text{A1} \\ \cline{2-2}
 & (A\rightarrow B)\rightarrow A & \text{R1}
\end{array}
$$

	[X]	
π''	.	
	.	
	.	
	B→C	
	(A→B)→((B→C)→(A→C))	A3
	(B→C)→((A→B)→(A→C))	L2
	(A→B)→(A→C)	R1

Por el teorema 2 y la primera derivación , hay una derivación de A a partir de X ∪ {A→B} y por ese mismo teorema y la segunda derivación, otra derivación de A→C a partir de X ∪ {A→B}. Combinando estas derivaciones y usando la regla de modus ponens resulta una derivación de C a partir de X ∪ {A→B}.

$$\neg\Vdash \qquad \frac{X \Vdash A}{X, \neg A \Vdash}$$

Dada una derivación π de A a partir de X se trata de encontrar una derivación (empleando reglas mínimas) de B&¬B, para alguna fórmula B, a partir de X ∪ {¬A}.

	[X]	
π	.	
	.	
	.	
	A	
	A→(B→A)	A1
	B→A	R1
	[¬A]	
	¬A→(B→¬A)	A1
	B→¬A	R1
	(B→A)&(B→¬A)	L3
	((B→A)&(B→¬A))→¬A	A10
	¬A	R1

$$[\Vdash\neg]: \qquad \frac{X, A \Vdash}{X \Vdash \neg A}$$

Dada una derivación π de B&¬B, para alguna fórmula B, a partir de X ∪ {A}, se obtienen dos derivaciones de A→B y A→¬B a partir de X usando A4 y A5, respectivamente, y la regla de *modus ponens*. Por adjunción, L5, se combinan en una derivación de (A→B)&(A→¬B) y entonces empleando A10 (A→B)&(A→¬B)→¬A y R1 se llega a una derivación de ¬A a partir de X.

$$[\forall\Vdash]: \qquad \frac{X, A[t] \Vdash C}{X,.(\forall v)A[v] \Vdash C}$$

donde C es como en los casos &╟ y ╟v. Por hipótesis hay una derivación π de C a partir de X ∪ {A[t]}.

	[(∀v)A[v]]	
	(∀v)A[v]→A[t]	A11
	A[t]	R1
	[X]	
π	.	
	.	
	.	
	C	

Hablando con propiedad, en las dos primeras líneas de la derivación habrá que usar una fórmula equivalente a $(\forall v)A[v]$, digamos $(\forall v)B[v]$, para asegurar que el término t está libre para v en B (cfr. *Convenciones sobre el uso de variables...*). *Mutatis mutandis* las mismas consideraciones se aplican al caso de [$\Vdash\exists$].

$$[\Vdash\forall]: \quad \frac{X\Vdash A}{X\Vdash(\forall v)A[v]}$$

donde v no está libre en X. Sea B cualquier teorema de HS sin ocurrencias libres de la variable v y π la derivación de A a partir de X proporcionada por la hipótesis inductiva.

$$\pi \quad \left\{ \begin{array}{cl} \underline{[X]} & \\ \underline{.} & \\ \underline{.} & \\ \underline{.} & \\ \hline A & \\ \hline A\to(B\to A) & \text{A1} \\ \hline B\to A & \text{R1} \\ \hline B\to(\forall v)A & \text{R2} \\ \hline B & \text{hipótesis} \\ \hline (\forall v)A & \text{R1} \end{array} \right.$$

$$[\Vdash\exists]: \quad \frac{X\Vdash A[t]}{X\Vdash(\exists v)A[v]}$$

Por hipótesis de inducción hay una derivación π de A[t] a partir de X. Empleando consecutivamente A12 y R1 se obtiene una derivación de $(\exists v)A[v]$ a partir de X.

$$[\exists\Vdash]: \quad \frac{X,A\Vdash C}{X,(\exists v)A\Vdash C}$$

siendo C como en los casos $\&\Vdash$, $\Vdash v$ y $\forall\Vdash$, y no habiendo ocurrencias libres de v ni en X ni en C. Dada una derivación de C a partir de $X \cup \{A\}$ el teorema de deducción proporciona una derivación π de $A\to C$ a partir de X, y entonces

$$\pi \quad \left\{ \begin{array}{cl} \underline{[X]} & \\ \underline{.} & \\ \underline{.} & \\ \underline{.} & \\ \hline A\to C & \\ \hline (\exists v)(A[v])\to C & \text{R3} \\ \hline [(\exists v)(A[v])] & \\ \hline C & \text{R1} \end{array} \right.$$

TEOREMA 9. Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, si $X\vdash_{SC}A$ entonces $X\vdash_{HC}A$.

DEMOSTRACIÓN. Demostramos que si $X\Vdash Y$ es demostrable en SS entonces (i) si $Y=\varnothing$ entonces $X\vdash_{HC}A\&\neg A$, para alguna fórmula A, (ii) si $Y=\{A\}$ entonces $X\vdash_{HC}A$, y (iii) si $Y=\{A_1,...,A_n\}$, $n>1$, $X,\neg A_1,...,\neg A_{n-1}\vdash_{HC}A_n$. Una vez demostrado el teorema 8 basta (con la excepción de las reglas adicionales de datos) con considerar este último supuesto. Como antes, procedemos por inducción sobre la longitud n de la demostración de $X\Vdash Y$. Si $n=1$, $X\Vdash Y$ es un axioma y por tanto es de la forma $A\Vdash A$; se procede como en el caso análogo del teorema anterior. Sea pues n=k+1. Los casos de las reglas estructurales son inmediatos salvo el de la regla de Corte. Siendo $Z=\{B_1,...,B_i\}$ y $W=\{C_1,...,C_j\}$, se sigue de la hipótesis de inducción la existencia de sendas derivaciones π y π', respectivamente, de A a partir de $X \cup \{\neg B_1,...,\neg B_i\}$ y de C_j a partir de $Y \cup \{A,C_1,...,C_{j-1}\}$. De nuevo la concatenación de π y π' proporciona la derivación de C_j a partir de $X \cup Y \cup \{\neg B_1,...,\neg B_i\} \cup \{C_1,...,C_{j-1}\}$ requerida. Vayamos ahora con las reglas operacionales. Convengamos por comodidad que $Y=\{C_1,...,C_i\}$.

$[\Vdash\vee]$: La hipótesis de inducción asegura la existencia de sendas derivaciones de C_i a partir de $X \cup \{A,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$ y de C_i a partir de $X \cup \{B,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}$. Por el teorema de deducción hay entonces una derivación π de $A\rightarrow C_i$ a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$ y una derivación π' de $B\rightarrow C_i$ a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$.

	$(A\rightarrow C_i)\rightarrow((B\rightarrow C_i)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C_i))$	A9
	$[X]$	
	$[\neg C_1]$	
	.	
	.	
	.	
	$[\neg C_{i-1}]$	
π	.	
	.	
	.	
	$A\rightarrow C_i$	
	$(B\rightarrow C_i)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C_i)$	R1
	$[X]$	
	$[\neg C_1]$	
	.	
	.	
	.	
	$[\neg C_{i-1}]$	
π'	.	
	.	
	.	
	$B\rightarrow C_i$	
	$A\vee B\rightarrow C_i$	R1

$[\vee\Vdash]$: Por hipótesis hay una derivación π de A a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$; en tal caso

	$[X]$	
	$[\neg C_1]$	
	.	
	.	
	.	
	$[\neg C_i]$	
π	.	
	.	
	.	
	A	
	$A\rightarrow A\vee B$	A7
	$A\vee B$	R1

$[\&\Vdash]$: por hipótesis de inducción hay una derivación π de C_i a partir de $X \cup \{A,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$; se obtiene entonces la siguiente derivación de C_i a partir de $X \cup \{A\&B,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$:

$$
\begin{array}{ll}
[A\&B] & \\
\hline
A\&B\rightarrow A & \text{A4} \\
\hline
A & \text{R1} \\
\hline
[X] & \\
\hline
[\neg C_1] & \\
\hline
. & \\
\hline
. & \\
\hline
. & \\
\hline
[\neg C_{i-1}] & \\
\hline
. & \\
\hline
. & \\
\hline
. & \\
\hline
C_i &
\end{array}
\quad \pi
$$

[⊩&]: Por hipótesis de inducción hay sendas derivaciones π y π', respectivamente, de A a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$ y de B a partir del mismo conjunto de hipótesis. Úsese entonces adjunción -es decir, [L3].

[⊩→]: Si hay una derivación de B a partir de $X \cup \{A,\neg C_1,...,\neg C_i\}$ entonces por el teorema de deducción hay una derivación de $A\rightarrow B$ a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$.

[→⊩]: Sea π una derivación de A a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$ y π' una derivación de C_i a partir de $X \cup \{B,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$. Usando sobre π' la instancia $C_i\rightarrow(\neg C_i\rightarrow C_i)$ de A1 y R1 se construye una derivación de C_i a partir de $X \cup \{B,\neg C_1,...,\neg C_i\}$ y entonces por el teorema de deducción una derivación π'' de $B\rightarrow C$ a partir de $X \cup \{\neg C_1,...,\neg C_i\}$.

$$
\pi \quad
\begin{array}{cl}
[X] & \\
\hline
[\neg C_1] & \\
\hline
. & \\
\hline
. & \\
\hline
. & \\
\hline
[\neg C_i] & \\
\hline
. & \\
\hline
. & \\
\hline
. & \\
\hline
\\
\hline
A & \\
\hline
A\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow A) & \text{A1} \\
\hline
(A\rightarrow B)\rightarrow A & \text{R1}
\end{array}
$$

$$
\pi'' \quad
\begin{array}{cl}
[X] & \\
\hline
[\neg C_1] & \\
\hline
. & \\
\hline
. & \\
\hline
. & \\
\hline
[\neg C_i] & \\
\hline
. & \\
\hline
. & \\
\hline
. & \\
\hline
B\rightarrow C_i & \\
\hline
(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C_i)\rightarrow(A\rightarrow C_i)) & \text{A3} \\
\hline
(B\rightarrow C_i)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C_i)) & \text{L4} \\
\hline
(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C_i) & \text{R1}
\end{array}
$$

Por el teorema 2 y la derivación de la izquierda, hay una derivación de A a partir de X $\cup$ $\{A\rightarrow B,\neg C_1,...,\neg C_i\}$ y por ese mismo teorema y la derivación de la derecha otra derivación de $A\rightarrow C_i$ a partir de X $\cup$ $\{A\rightarrow B,\neg C_1,...,\neg C_i\}$. Combinando estas derivaciones y usando la regla de modus ponens resulta una derivación de C_i a partir de X $\cup$ $\{A\rightarrow B,\neg C_1,...,\neg C_i\}$. A su vez, una aplicación del teorema de deducción suministra una derivación de $\neg C_i\rightarrow C_i$ a partir de X $\cup$ $\{A\rightarrow B,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$. Finalmente, siendo λ esta última derivación,

λ	.	
	.	
	.	
	$\neg C_i\rightarrow C_i$	
	$(\neg C_i\rightarrow C_i)\rightarrow((C_i\rightarrow C_i)\rightarrow(\neg C_i v C_i\rightarrow C_i))$	A9
	$(C_i\rightarrow C_i)\rightarrow(\neg C_i v C_i\rightarrow C_i)$	R1
	$(C_i\rightarrow(C_i\rightarrow C_i))\rightarrow(C_i\rightarrow C_i)$	A2
	$C_i\rightarrow(C_i\rightarrow C_i)$	A1
	$(C_i\rightarrow C_i)$	R1
	$(\neg C_i v C_i\rightarrow C_i)$	R1
	$\neg C_i v C_i$	A14'
	C_i	R1

Resultando así una derivación (clásica) de C_i a partir de X $\cup$ $\{A\rightarrow B,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$.

[$\neg\Vdash$]: Por hipótesis de inducción hay una derivación de A a partir de X $\cup$ $\{\neg C_1,...,\neg C_i\}$, y entonces por el teorema de deducción una derivación de $\neg C_i\rightarrow A$ a partir de X $\cup$ $\{\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$.Por L4 y L8 se obtiene una derivación de $\neg A\rightarrow\neg\neg C_i$ a partir de X $\cup$ $\{\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$, que el teorema 2 convierte en una derivación de $\neg\neg C_i$ a partir de X $\cup$ $\{\neg A,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$. Úsese entonces A14 $\neg\neg C_i\rightarrow C_i$ y transitividad (L9) para derivar la conclusión C_i de las mismas premisas.

[$\Vdash\neg$]: Dada una derivación de C_i a partir de X $\cup$ $\{A,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$, úsese el teorema de deducción para pasar a una derivación de $A\rightarrow C_i$ con premisas en X $\cup$ $\{\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$, y L4 para transformar su conclusión en $\neg C_i\rightarrow\neg A$. Finalmente, la conversa del teorema de deducción da una derivación de $\neg A$ desde X $\cup$ $\{\neg C_1,...,\neg C_i\}$.

[$\forall\Vdash$]:

	$[(\forall v)A[v]]$	
	$(\forall v)A[v]\rightarrow A[t]$	A11
	$A[t]$	R1
	[X]	
	$[\neg C_1]$	
	.	
	.	
	.	
	$[\neg C_{i-1}]$	
π	.	
	.	
	.	
	C_i	

donde la derivación π, cuyas premisas son X $\cup$ $\{A[t]\}$, en un caso, y X $\cup$ $\{A[t],\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$, en el otro, es suministrada por la hipótesis inductiva.

$[\Vdash\forall]$: El truco -como en el caso análogo del teorema 8- consiste en transformar una derivación de A[v] a partir de un conjunto de fórmulas sin ocurrencias libres de 'v' en una demostración de una fórmula de la forma B→A[v]. Si la hipótesis inductiva afirma la existencia de una derivación de A[v] a partir de las fórmulas $B_1,...,B_j$, sea $B=B_1\&...\&B_j$; si lo que afirma es la existencia de una demostración de A[v], sea B cualquier fórmula demostrable en el sistema sin ocurrencias libres de v. En el primer caso A4, A5 y el teorema de deducción llevan a $\vdash_{HS}B\rightarrow A[v]$; en el segundo caso la instancia $A[v]\rightarrow(B\rightarrow A[v])$ de A1 y R1 llevan a $\vdash_{HS}B\rightarrow A[v]$. A partir de aquí, basta con aplicar R2 para obtener $\vdash_{HS}B\rightarrow(\forall v)A[v]$. El lema 2, A6 y L10, en el primer caso, y R1, en el segundo, arrojan la derivación requerida.

$[\Vdash\exists]$: Por hipótesis de inducción hay una derivación π de A[t] a partir de $X\cup\{\neg C_1,...,\neg C_i\}$. Empleando consecutivamente A12 y R1 se obtiene una derivación de $(\exists v)A[v]$ a partir de $X\cup\{\neg C_1,...,\neg C_i\}$.

$[\exists\Vdash]$: Dada una derivación de C_i a partir de $X\cup\{A,\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$ el teorema de deducción proporciona una derivación π de $A\rightarrow C_i$ a partir de $X\cup\{\neg C_1,...,\neg C_{i-1}\}$, y entonces

$$
\begin{array}{llcl}
 & & [X] & \\ \cline{3-3}
 & & [\neg C_1] & \\ \cline{3-3}
 & & . & \\ \cline{3-3}
 & & . & \\ \cline{3-3}
 & & . & \\ \cline{3-3}
 & & [\neg C_{i-1}] & \\ \cline{3-3}
 & & . & \\ \cline{3-3}
\pi & \{ & . & \\ \cline{3-3}
 & & . & \\ \cline{3-3}
 & & A\rightarrow C_i & \\ \cline{3-3}
 & & (\exists v)(A[v])\rightarrow C_i & R3 \\ \cline{3-3}
 & & [(\exists v)(A[v])] & \\ \cline{3-3}
 & & C_i & R1
\end{array}
$$

⊣

De los teoremas 7 y 8 o 9 (según el caso) se sigue -como se anunció al principio de este capítulo- que HS y SS (S=M,I,C) introducen una misma relación de consecuencia. Es decir, $\vdash_{HS}=\vdash_{SS}$.

EJERCICIOS.

(1) Demostrar en SM los esquemas Av(B&C)→(AvB)&(AvC), A&(BvC)→(A&B)v(A&C).
(2) Demostrar en SC las fórmulas $(\exists x)((\exists y)P^1y\rightarrow P^1x)$, $(\exists x)(\neg\neg R^2xa\rightarrow(\forall y)R^2ya)$.
(3) Demostrar la equivalencia de los sistemas implicacionales del capítulo 4 y los correspondientes calculos de secuentes -es decir, demostrar que $\vdash_{SIM}=\vdash_{SM}$, $\vdash_{SII}=\vdash_{SI}$, $\vdash_{SIC}=\vdash_{SC}$
(4) Demostrar que la regla de combinación

$$\frac{X\Vdash Y \qquad\qquad Z\Vdash W}{X,Z\Vdash Y,W}$$

Es una regla admisible en SC, es decir que si por hipótesis los secuentes $X\Vdash Y$ y $Z\Vdash W$ son demostrables en SC, también lo es el secuente $X,Z\Vdash Y,W$.
(5) Buscar versiones de la regla de combinación admisibles en SI y SC.