# CAPÍTULO 2. SISTEMAS HILBERTANOS

Pero, además, no hay en rigor más remedio que confesar nuestra extrañeza cuando en lógica se oye hablar de axiomas...
W. y M. Kneale, *El desarrollo de la lógica.*

## EL PROLENGUAJE $\mathcal{P}$.

Un sistema deductivo es un par <F,C>, formado por un conjunto de fórmulas y una operación unaria de consecuencia sobre Sb(F). Por tanto, para construir un sistema deductivo el primer paso es especificar el conjunto de sus fórmulas o, dicho de otro modo, el prolenguaje correspondiente.

El prolenguaje $\mathcal{P}$ es un lenguaje de primer-orden cuyas *variables individuales* son

$$x,y,z,x_0,y_0,z_0,\ldots,x_n,y_n,z_n,\ldots,$$

sus letras *relacionales n-arias*, para todo $n\in\mathbf{N}$, son

$$P^n,Q^n,R^n,P^n{}_1,Q^n{}_1,R^n{}_1,\ldots,P^n{}_i,Q^n{}_i,R^n{}_i,\ldots$$

y sus *letras funcionales n-arias*, para todo $n\in\mathbf{N}$, son

$$f^n,g^n,h^n,f^n{}_1,g^n{}_1,h^n{}_1,\ldots,f^n{}_i,g^n{}_i,h^n{}_i,\ldots$$

En cuanto a sus símbolos lógicos, incorpora un operador oracional unario ¬ (llamado *negador*), tres operadores oracionales binarios &,v,→ (llamados, respectivamente, *conjuntor*, *disyuntor* y *condicional*), y dos cuantificadores, ∃ y ∀, (*cuantificador existencial* y *cuantificador universal*, respectivamente).

Con estas especificaciones y lo expuesto en el capítulo 1 disponemos ya de una definición precisa del conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$. Siguiendo la práctica común, escribiremos '(A&B)' por '&(A,B)', '(AvB)' por 'v(A,B)' y '(A→B)' por '→(A,B)'. En cuanto al modo de leer las fórmulas, '¬(A)' se lee 'no-A', ''(A&B)' se lee 'A y B', '(AvB)' se lee 'A o B' y '(A→B)', finalmente, 'si A entonces B'.

### Abreviaturas

*Convenciones notacionales sobre el uso de paréntesis.*

| Se escribe... | por... |
|---|---|
| $R^n{}_m t_1,\ldots,t_n$ | $R^n{}_m(t_1,\ldots,t_n)$ |
| ¬A | ¬(A) si A es atómica |
| ¬¬(A) | ¬(¬(A)) |
| A&B→C | (A&B)→C |
| A→B&C | A→(B&C) |
| AvB→C | (AvB)→C |
| A→BvC | A→(BvC) |
| (Qv)A | (Qv)(A) si A es atómica |
| (Qu)(Q'v)(A) | (Qu)((Q'v)(A)), |
| [donde Q y Q' son cuantores] | |

## TEOREMAS DE LAS LÓGICAS MÍNIMA, INTUICIONISTA Y CLÁSICA.

Una vez determinado el conjunto de fórmulas, el siguiente paso en la construcción de un sistema deductivo es introducir la relación de derivabilidad. Si se adopta una estrategia hilbertiana, la construcción de esa relación comienza por una definición inductiva de un conjunto de fórmulas (el conjunto de los teoremas del sistema, es decir C(∅)). Por eso a veces se describe un sistema deductivo hilbertiano como un par <F,T>, donde T⊆F es el conjunto de sus teoremas.

Naturalmente, a partir de un único conjunto de fórmulas F pueden introducirse distintos conceptos de derivabilidad, resultando así sistemas deductivos distintos. A continuación se enuncian tres sistemas hilbertianos que no sólo son distintos entre sí, sino que corresponden a sistemas lógicos distintos, aunque comparten el prolenguaje $\mathcal{P}$.

**Lógica mínima (HM).**

Axiomas

A1. $(A\to(B\to A))$
A2. $((A\to(A\to B))\to(A\to B))$
A3. $((A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C)))$
A4. $((A\&B)\to A)$
A5. $((A\&B)\to B)$
A6. $((A\to B)\to((A\to C)\to(A\to(B\&C))))$
A7. $(A\to(AvB))$
A8. $(A\to(BvA))$
A9. $((A\to C)\to((B\to C)\to((AvB)\to C)))$
A10. $(((A\to B)\&(A\to\neg B))\to\neg A)$
A11. $((\forall v)(A(v))\to A(t))^{*}$
A12. $(A(t)\to(\exists v)(A(v))^{*}$

Reglas de prueba

R1. $\vdash A,\ \vdash(A\to B) \Rightarrow\ \vdash B.$[1]
R2. $\vdash(B\to A(v)) \Rightarrow\ \vdash(B\to(\forall v)(A(v)))^{**}$
R3. $\vdash(A(v)\to B) \Rightarrow\ \vdash((\exists v)(A(v))\to B)^{**}$

(*) Donde el término t está libre para la variable v en la fórmula A(v), y A(v) es la fórmula resultante de sustituir simultáneamente cada ocurrencia del término t en A(t) por una ocurrencia de la variable v.
(**) Donde B no contiene ocurrencias libres de la variable v, y A(v) es como en la nota precedente.

**Lógica intuicionista (HI).**

Axiomas

A1-A12
A13 $(\neg A\to(A\to B))$

Reglas de prueba

R1-R3

**Lógica clásica (HC/HC').**

Axiomas

A1-A13
A14 $(\neg\neg A\to A)$ o A14'. $(Av\neg A)$

Reglas de prueba

R1-R3

[1] Lo que tenemos en cada uno de estos casos es una definición inductiva de un conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$. Para indicar que una fórmula A pertenece a uno de esos conjuntos se escribe '$\vdash_{HM}A$', '$\vdash_{HI}A$', '$\vdash_{HC}A$' o '$\vdash_{HC'}A$' , según el caso, leyéndose, respectivamente, "A es un teorema de HM", "A es un teorema de HI", "A es un teorema de HC" y "A es un teorema de HC'".

[2] Las claúsulas de base de estas definiciones inductivas son los esquemas de axioma A1-A14 o A14'. Un esquema de axioma identifica una clase de fórmulas de $\mathcal{P}$, formada por las fórmulas que resultan de sustituir en el esquema cada metavariable A,B,C por una fórmula de $\mathcal{P}$, la metavariable v por una variable individual y la metavariable t por un término de $\mathcal{P}$ . Así, postular

[1] Esta regla es conocida como regla de *modus ponens*.

un esquema de axioma es afirmar que todas las fórmulas de la clase correspondiente son axiomas, y por ende teoremas, del sistema en cuestión.

[3] En cuanto a las relaciones entre los conjuntos de teoremas de estos sistemas hilbertianos, se tiene: HM $\subset$ HI $\subset$ HC = HC'.

[4] Para establecer que una fórmula es un teorema de uno de estos sistemas, de acuerdo con la definición precedente, hay que mostrar que o bien es un axioma o bien es obtenible a partir de axiomas aplicando las reglas de prueba. Dicho de otro modo, para establecer $\vdash_{HM}B$, $\vdash_{HI}B$, $\vdash_{HC}B$ o $\vdash_{HC'}B$ hay que exhibir una secuencia finita de fórmulas $<A_1,...,A_n>$, tal que cada $A_i$, $1\leq i\leq n$, es (1) un axioma, o (2) hay k,j<i, $A_k=A_j\rightarrow A_i$ [R1], o (3) hay j<i, $A_j=C\rightarrow D(v)$ y $A_i=C\rightarrow(\forall v)D(v)$, donde C no contiene ocurrencias libres de la variable [R2], o (3) hay j<i, $A_j=C(v)\rightarrow D$ y $A_i=(\exists v)C\rightarrow D$, donde D no contiene ocurrencias libres de la variable [R3], y finalmente $A_n=B$.

[5] Se dice entonces que $<A_1,...,A_n>$, es una *demostración* de $B=A_n$ en HM, HI, HC o HC', según el caso. La *longitud de esa demostración* es la longitud de la secuencia correspondiente, n. Adviértase que $<A_1,...,A_i>$, i<n, es a su vez una demostración de $A_i$; por ello diremos que $<A_1,...,A_i>$ es una subdemostración con respecto a $<A_1,...,A_n>$.

## DERIVABILIDAD MÍNIMA, INTUICIONISTA Y CLÁSICA.

Si X es un conjunto de *fórmulas cerradas* de $\mathcal{P}$ y HS uno de los sistemas hilbertianos descritos, designamos con 'HS $\cup$ X' al sistema resultante de incorporar a HS como *axiomas* (y no como esquemas axiomáticos) las fórmulas de X. Para cualquier conjunto de fórmulas cerradas X y cualquier fórmula A, $X\vdash_{HS}A$ syss $\vdash_{HS\cup X}A$; es decir, A es derivable (o deducible) en HS a partir de X syss A es un teorema de HS $\cup$ X. Así pues, la derivabilidad a partir de un conjunto de fórmulas cerradas en un sistema hilbertiano se define en términos de la demostrabilidad en sus extensiones axiomáticas.

Esta definición de derivabilidad es parcial, puesto que contempla únicamente la derivabilidad a partir de conjuntos de fórmulas cerradas. La dificultad para extenderla a conjuntos cualesquiera de fórmulas (abiertas y cerradas) radica en las restricciones de las reglas R2 y R3. Un ejemplo lo aclarará. Si se generalizase la definición precedente omitiendo 'cerradas', dado un conjunto de fórmulas X, una fórmula $A[v]\in X$, con ocurrencias libres de la variable 'v' y siendo B una fórmula cerrada cualquiera tal que $\vdash_{HS}B$, se tendría la derivación siguiente:

| | |
|---|---|
| $\vdash_{HS\cup X} A[v]$ | hipótesis |
| $\vdash_{HS\cup X} A[v]\rightarrow(B\rightarrow A[v])$ | A1 |
| $\vdash_{HS\cup X} B\rightarrow A[v]$ | R1 |
| $\vdash_{HS\cup X} B\rightarrow(\forall v)(A[v])$ | R2 |
| $\vdash_{HS\cup X} B$ | hipótesis |
| $\vdash_{HS\cup X} (\forall v)(A[v])$ | R1 |

Provocando el fallo del teorema de deducción (*vid.infra*), puesto que si valiese el teorema de deducción una aplicación de R3 llevaría a $\vdash_{HS}(\exists v)(A[v])\rightarrow(\forall v)(A[v])$.

La generalización de la definición que estamos comentando requiere, en primer lugar, reforzar las restricciones de R2 y R3:

Si X es un conjunto de fórmulas, HS $\cup$ X es el sistema hilbertiano resultante de añadir a HS las fórmulas de X como axiomas y reemplazar R2 y R3 por

R2'. $\vdash_{HS\cup X} (B\rightarrow A(v)) \Rightarrow \vdash_{HS\cup X} (B\rightarrow(\forall v)(A(v)))^{**}$

R3'. $\vdash_{HS\cup X} (A(v)\rightarrow B) \Rightarrow \vdash_{HS\cup X} ((\exists v)(A(v))\rightarrow B)^{**}$

(**) Donde ni B ni las fórmulas de X contienen ocurrencias libres de la variable v.

En segundo lugar, hay que modificar levemente la definición de $X\vdash_{HS}A$ si queremos preservar la monotonía de la relación de derivabilidad. En efecto, si copiáramos tal cual la definición anterior - ahora con una caracterización distinta del sistema HS $\cup$ X- podría suceder que $X\vdash_{HS}A$ y sin embargo no $X,B\vdash_{HS}A$. Por ejemplo, si (1) las fórmulas de X no contienen ocurrencias libres de la variable 'v', (2) $A=C\to(\forall v)(D[v])$ se deriva de X aplicando R2, y (3) la variable 'v' si ocurre libre en B. Para evitarlo se propone la siguiente definición alternativa:

$$X \vdash_{HS} A \text{ syss hay un } Y\subseteq X \text{ tal que } \vdash_{Y} A.$$ [2]

Nuestro primer teorema importante es el teorema de deducción, que, en el contexto de la teoría de la demostración, establece una cierta completitud (sintáctica) del sistema hilbertiano considerado. En efecto, el teorema enuncia que para cualquier deducción existente en sus extensiones axiomáticas hay ya un teorema en el mismo sistema que la expresa.

**TEOREMA 1 (T. DE DEDUCCIÓN).** Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualesquiera fórmulas A y B de $\mathcal{P}$, si $X,A\vdash_{HS}B$ entonces $X\vdash_{HS}A\to B$.

**DEMOSTRACIÓN.** Adviértase que $X,A\vdash_{HS}B$ syss $\vdash_{HS\cup Y\cup\{A\}}B$ para algún $Y\subseteq X$ y, análogamente, $X\vdash_{HS}A\to B$ syss $\vdash_{HS\cup Z}A\to B$ para algún $Z\subseteq X$. Por inducción sobre la longitud de la demostración de B en $HS \cup Y \cup \{A\}$, n. Si n=1, B es un axioma de $HS \cup Y \cup \{A\}$ y por tanto la demostración correspondiente es <B>,. Distinguimos dos subcasos: (i) B es un teorema de $HS \cup Y$, y (ii) B=A, en cuyo caso $A\to B$ es $B\to B$.

Subcaso i.

| | |
|---|---|
| $\vdash_{HS\cup Y}B$ | (por hipótesis) |
| $\vdash_{HS\cup Y} B\to(A\to B)$ | (por A1) |
| $\vdash_{HS\cup Y}(A\to B)$ | (por R1) |

Subcaso ii.

| | |
|---|---|
| $\vdash_{HS\cup Y} B\to(B\to B)$ | (por A1) |
| $\vdash_{HS\cup Y} (B\to(B\to B))\to(B\to B)$ | (por A2) |
| $\vdash_{HS\cup Y} (B\to B)$ | (por R1) |

Asúmase entonces que el teorema se cumple para $n\leq k$, y considérese el caso en que $n=k+1$. Hay que considerar cinco subcasos: B es un teorema de $HS \cup Y$, B=A, B se obtiene aplicando una de las reglas de prueba R1-R3. Los dos primeros se tratan como en la base. Para R1, R2 y R3 se necesitan los dos resultados que se establecen a continuación.

**[L1]** $\vdash_{HS}A\to(B\to C) \Rightarrow \vdash_{HS} (A\to B)\to(A\to C)$

| | |
|---|---|
| $A\to(B\to C)$ | hip. |
| $(A\to(B\to C))\to(((B\to C)\to(A\to C))\to(A\to(A\to C)))$ | [A3] |
| $((B\to C)\to(A\to C))\to(A\to(A\to C))$ | [R1] |
| $(A\to(A\to C))\to(A\to C)$ | [A2] |
| $(((B\to C)\to(A\to C))\to(A\to(A\to C)))\to(((A\to(A\to C))\to$ $(A\to C))\to(((B\to C)\to(A\to C))\to(A\to C))$ | [A3] |
| $((A\to(A\to C))\to(A\to C))\to(((B\to C)\to(A\to C))\to(A\to C))$ | [R1] |
| $((B\to C)\to(A\to C))\to(A\to C)$ | [R1] |
| $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$ | [A3] |
| $((A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))\to((((B\to C)\to(A\to C))\to$ $(A\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))$ | [A3] |
| $(((B\to C)\to(A\to C))\to(A\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$ | [R1] |
| $(A\to B)\to(A\to C)$ | [R1] |

**[L2]** $\vdash_{HS}A\to(B\to C) \Rightarrow \vdash_{HS} B\to(A\to C)$

| | |
|---|---|
| $A\to(B\to C)$ | hipótesis |
| $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$ | [L1] |
| $(A\to B)\to(A\to C)$ | [R1] |
| $B\to(A\to B)$ | [A1] |
| $(B\to(A\to B))\to(((A\to B)\to(A\to C))\to(B\to(A\to C))$ | [A3] |
| $((A\to B)\to(A\to C))\to(B\to(A\to C))$ | [R1] |
| $B\to(A\to C)$ | [R1] |

---

[2] Así, en el ejemplo discutido en el texto, si $\vdash_{HS\cup X} A$ entonces $X \cup \{B\} \vdash_{HS}A$.

Si B resulta de aplicar R1 a dos fórmulas C y $C\rightarrow B$ que preceden a B en la secuencia, dado que la longitud de las subdemostraciones de C y $C\rightarrow B$ es <k, por hipótesis de inducción $\vdash_{HS\cup Y} A\rightarrow C$ y $\vdash_{HS\cup Y} A\rightarrow(C\rightarrow B)$. En la demostración que sigue, y también en las de los casos correspondientes a R2 y R3, se omite por comodidad el prefijo '$\vdash_{HS\cup X}$'. En tal caso,

| | |
|---|---|
| $A\rightarrow C$ | hipótesis |
| $(A\rightarrow C)\rightarrow((C\rightarrow(A\rightarrow B))\rightarrow(A\rightarrow(A\rightarrow B)))$ | A3 |
| $(C\rightarrow(A\rightarrow B))\rightarrow(A\rightarrow(A\rightarrow B))$ | R1 |
| $A\rightarrow(C\rightarrow B)$ | hipótesis |
| $C\rightarrow(A\rightarrow B)$ | L2 |
| $A\rightarrow(A\rightarrow B)$ | R1 |
| $(A\rightarrow(A\rightarrow B))\rightarrow(A\rightarrow B)$ | A2 |
| $A\rightarrow B$ | R1 |

Ocupémonos ahora de R2. Se tendría $\vdash_{HS\cup Y\cup\{A\}} B\rightarrow C[v]$ y a partir de aquí por R2 $\vdash_{HS\cup Y\cup\{A\}} B\rightarrow(\forall v)C[v]$. La hipótesis de inducción proporciona $\vdash_{HS\cup Y} A\rightarrow(B\rightarrow C[v])$, y hay que concluir $\vdash_{HS\cup Y} A\rightarrow(B\rightarrow(\exists v)C[v])$.

| | |
|---|---|
| $(B\&A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C[v])\rightarrow(B\&A\rightarrow C[v]))$ | A3 |
| $((B\rightarrow C[v])\rightarrow(B\&A\rightarrow C[v]))$ | A5 |
| $(B\&A\rightarrow B)$ | R1 |
| $(A\rightarrow(B\rightarrow C[v]))\rightarrow(((B\rightarrow C[v])\rightarrow(B\&A\rightarrow C[v]))\rightarrow(A\rightarrow(B\&A\rightarrow C[v])))$ | A3 |
| $A\rightarrow(B\rightarrow C[v])$ | hip. |
| $(((B\rightarrow C[v])\rightarrow(B\&A\rightarrow C[v]))\rightarrow(A\rightarrow(B\&A\rightarrow C[v])))$ | R1 |
| $(A\rightarrow(B\&A\rightarrow C[v]))$ | R1 |
| $B\&A\rightarrow A$ | A5 |
| $(B\&A\rightarrow A)\rightarrow((A\rightarrow B\&A\rightarrow C[v]))\rightarrow(B\&A\rightarrow(B\&A\rightarrow C[v])))$ | A3 |
| $((A\rightarrow(B\&A\rightarrow C[v]))\rightarrow(B\&A\rightarrow(B\&A\rightarrow C[v])))$ | R1 |
| $(B\&A\rightarrow(B\&A\rightarrow C[v]))$ | R1 |
| $(B\&A\rightarrow(B\&A\rightarrow C[v]))\rightarrow B\&A\rightarrow C[v])$ | A2 |
| $(B\&A\rightarrow C[v])$ | R1 |
| $(B\&A\rightarrow(\forall v)C[v])$ | A6 |
| $(B\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow(B\rightarrow B\&A))$ | A6 |
| $B\rightarrow(B\rightarrow B)$ | A1 |
| $(B\rightarrow(B\rightarrow B))\rightarrow(B\rightarrow B)$ | A2 |
| $B\rightarrow B$ | R1 |
| $(B\rightarrow A)\rightarrow(B\rightarrow B\&A)$ | R1 |
| $A\rightarrow(B\rightarrow A)$ | A1 |
| $(A\rightarrow(B\rightarrow A))\rightarrow(((B\rightarrow A)\rightarrow(B\rightarrow B\&A))\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow B\&A)))$ | A3 |
| $((B\rightarrow A)\rightarrow(B\rightarrow B\&A))\rightarrow(A\rightarrow B\rightarrow B\&A))$ | R1 |
| $A\rightarrow(B\rightarrow B\&A)$ | R1 |
| $(B\rightarrow B\&A)\rightarrow((B\&A\rightarrow (\forall v)C[v])\rightarrow(B\rightarrow(\forall v)C[v]))$ | A3 |
| $(A\rightarrow(B\rightarrow B\&A))\rightarrow(((B\rightarrow B\&A)\rightarrow((B\&A\rightarrow(\forall v)C[v])\rightarrow(B\rightarrow(\forall v)C[v])))\rightarrow(A\rightarrow((B\&A\rightarrow(\forall v)C[v])\rightarrow(B\rightarrow(\forall v)C[v]))))$ | A3 |
| $(((B\rightarrow B\&A)\rightarrow((B\&A\rightarrow(\forall v)C[v])\rightarrow(B\rightarrow(\forall v)C[v])))\rightarrow(A\rightarrow((B\&A\rightarrow(\forall v)C[v])\rightarrow(B\rightarrow(\forall v)C[v]))))$ | R1 |
| $(A\rightarrow((B\&A\rightarrow(\forall v)C[v])\rightarrow(B\rightarrow(\forall v)C[v])))$ | R1 |
| $(A\rightarrow(B\&A\rightarrow(\forall v)C[v]))\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow(\forall v)C[v]))$ | L1 |
| $(B\&A\rightarrow(\forall v)C[v])\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow(\forall v)C[v]))$ | A1 |
| $(A\rightarrow(B\&A\rightarrow(\forall v)C[v]))$ | R1 |
| $(A\rightarrow(B\rightarrow(\forall v)C[v]))$ | R1 |

Para R3 la demostración es, afortunadamente, menos prolija. Por hipótesis de inducción se tiene $\vdash_{HS\cup Y} A\rightarrow(B[v]\rightarrow C)$, y hay que demostrar $\vdash_{HS\cup Y} A\rightarrow((\exists v)B[v]\rightarrow C)$.

| | |
|---|---|
| $A \to (B[v] \to C)$ | [hipótesis] |
| $B[v] \to (A \to C)$ | [L2] |
| $(\exists v)B[v] \to (A \to C)$ | [R3] |
| $A \to ((\exists v)B[v] \to C)$ | [L2] |

N.B.- Adviértase que al aplicar en estas demostraciones R2 y R3, respectivamente, se satisfacen las restricciones (reforzadas) anexas en virtud de los supuestos iniciales.

┤

**COROLARIO 1.** Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula B de $\mathcal{P}$, si $X, \vdash_{HS} B$ entonces hay $\{A_1,...,A_n\} \subseteq X$ tal que $\vdash_{HS} A_1 \to (A_2 \to (... \to (A_n \to B)))$.

**DEMOSTRACIÓN.** Puesto que una derivación de B a partir de X en HS es una demostración en $HS \cup X$ y una demostración es una secuencia finita de fórmulas, si B es derivable a partir de X en HS, lo es a partir de un número finito de fórmulas de X. Sean éstas $A_1,...,A_n$. Se tiene entonces $A_1,...,A_n \vdash_{HS} B$, y aplicando n veces consecutivas el teorema de deducción $\vdash_{HS} A_1 \to (A_2 \to (... \to (A_n \to B)))$.

┤

La conversa del teorema de deducción es una consecuencia casi inmediata de la clausura del sistema bajo R1:

**TEOREMA 2.** Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualesquiera fórmulas A y B de $\mathcal{P}$, si $X \vdash_{HS} A \to B$ entonces $X, A \vdash_{HS} B$.

**DEMOSTRACIÓN.** Si $\vdash_{HS \cup X} A \to B$ entonces $\vdash_{HS \cup X \cup \{A\}} A \to B$. Por otra parte, es obvio que $\vdash_{HS \cup X \cup \{A\}} A$, y por R1 se sigue $\vdash_{HS \cup X \cup \{A\}} B$.

┤

Por tanto, el corolario 1 puede reforzarse como sigue:

**COROLARIO 2.** Para cualquier conjunto de fórmulas X y cualquier fórmula B de $\mathcal{P}$, $X \vdash_{HS} B$ syss hay $\{A_1,...,A_n\}$ tal que $\vdash_{HS} A_1 \to (A_2 \to (... \to (A_n \to B)))$.

## SISTEMAS IMPLICACIONALES.

El teorema de deducción y su conversa (teorema 2) proporcionan la clave para interpretar el contenido de los esquemas de axioma, en tanto que permiten leerlos como aserciones sobre la relación de consecuencia. El siguiente teorema aclara lo que quiero decir:

**TEOREMA 3.** Si $X, A \to B \vdash_{HS} C$ entonces si $X, A \vdash_{HS} B$ entonces $X \vdash_{HS} C$.

**DEMOSTRACIÓN.** Supóngase que $X, A \to B \vdash_{HS} C$ y $X, A \vdash_{HS} B$. Si, para representar una derivación $\pi$ en HS de B a partir de $A_1,...,A_n$, usamos la notación

$$\begin{array}{c} [A_1] \\ . \\ . \\ . \\ [A_n] \\ . \\ . \\ . \\ B \end{array}$$

podemos representar las asunciones previas como

$$\begin{array}{c} [X] \\ [A \to B] \\ . \\ . \\ . \\ C \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} [X] \\ [A] \\ . \\ . \\ . \\ B \end{array}$$

Sea $\pi$ la derivación de la izquiera y $\lambda$ la de la derecha. De la segunda hipótesis y el teorema deducción se sigue $X\vdash_{HS}A\to B$, es decir, la existencia de una derivación de $A\to B$ a partir de X, llamémosla $\mu$. Usando las derivaciones $\pi$ y $\mu$ se obtiene entonces una derivación de C a partir de X:

$$\begin{array}{ll} & [X] \\ \mu \left\{ \begin{array}{l} . \\ . \\ . \end{array} \right. & \\ & A\to B \\ \pi \left\{ \begin{array}{l} . \\ . \\ . \end{array} \right. & \\ & C \end{array}$$

┤

Los teoremas 1, 2 y 3 permiten extraer de los sistemas hilbertianos descritos lo que Došen llama *sistemas implicacionales* y que son definiciones recursivas de conjuntos de expresiones de la forma ''$X\vdash A$'. Así, el teorema de deducción y su conversa permiten parafrasear A1. $(A\to(B\to A))$ como $A,B\vdash A$. Para A2. $(A\to(A\to B))\to(A\to B)$, su conversión secuencial en la regla $A,A\vdash B \Rightarrow A\vdash B$ viene indicada a continuación:

| | |
|---|---|
| $\vdash(A\to(A\to B))\to(A\to B)$ | A2 |
| $A,A\vdash B$ | supuesto |
| $A\vdash A\to B$ | Teorema 1 |
| $\vdash A\to(A\to B)$ | Teorema 1 |
| $\vdash A\to B$ | R1 |
| $A\vdash B$ | Teorema 2 |

Usando el mismo procedimiento, y teniendo en cuenta la definición de derivabilidad, los axiomas y reglas restantes transforman en:

A3. $A\vdash B,\ B\vdash C \Rightarrow A\vdash C$
A4.$A\&B\vdash A$
A5. $A\&B\vdash B$
A6.$A\vdash B, A\vdash C \Rightarrow A\vdash B\&C$
A7.$A\vdash AvB$
A8.$A\vdash BvA$
A9.$A\vdash C, B\vdash C \Rightarrow AvB\vdash C$
A10. $A\vdash B,\ A\vdash\neg B \Rightarrow\ \vdash\neg A$
A13.$\neg A,A\vdash B$
A14.$\neg\neg A\vdash A$
A11.$(\forall x)(A(v))|A(t)^{*}$
A12.$A(t)\vdash(\exists v)(A(v)^{*}$
R1. $\vdash A,\ \vdash(A\to B) \Rightarrow\ \vdash B$
R2. $\vdash B,\ \vdash A(v) \Rightarrow B\vdash(\forall v)(A(v))^{**}$
R3. $A(v)\vdash B \Rightarrow (\exists v)(A(v))|B^{**}$

(*) Donde el término t está libre para la variable v en la fórmula A(v), y A(v) es la fórmula resultante de sustituir simultáneamente cada ocurrencia del término t en A(t) por una ocurrencia de la variable v.

(**) Donde B no contiene ocurrencias libres de la variable v, y A(v) es como en la nota precedente

Se aprecia entonces que en el conjunto del sistema hilbertiano está codificada información de dos tipos: información sobre las características generales y estructurales de la relación de derivabilidad e información sobre las condiciones de introducción y eliminación de símbolos lógicos. Así A3 expresa, via comportamiento derivacional de '$\to$', la transitividad de la relación de derivabilidad, etc. Sin embargo, la información de los dos tipos se encuentra entremezclada en los principios del sistema hilbertiano. Un ejemplo claro lo constituye la regla de *modus ponens*, a la que corresponden de hecho dos reglas secuenciales: $\vdash A,\ \vdash (A \to B) \Rightarrow\ \vdash B$ (eliminación de '$\to$') y $\vdash A,\ A \vdash B \Rightarrow\ \vdash B$ (corte). La primera de estas reglas es operacional y la segunda estructural.

En este orden de cosas, llama la atención la ausencia de una regla de introducción del condicional, que se explica precisamente porque toda la información sobre la derivabilidad se codifica hilbertianamente (al menos en apariencia) como información acerca del condicional. Dicho de otro modo, todos los axiomas tienen la forma de principios de introducción del condicional. Teniendo ésto en cuenta no es extraño que la regla de introducción del condicional aparezca (en la metateoría) bajo la forma del teorema de deducción.

Resumiendo, a partir de los sistemas hilbertianos HM, HI y HC se obtienen -teniendo en cuenta la monotonía que se desprende de la definición misma de la relación de derivabilidad- los sistemas deductivos implicacionales que se describen a continuación.

**SIM (sistema implicacional mínimo)**

Principios estructurales.

| | |
|---|---|
| Reflexividad | $X,A,B \vdash A$ |
| Contracción | $X,A,A \vdash B \Rightarrow X,A \vdash B$ |
| Transitividad o Corte | $X,A \vdash B,\ X,B \vdash C \Rightarrow X,A \vdash C$ |

Principios lógicos.

| | |
|---|---|
| *& eliminación* | *$X,A\&B \vdash A$* |
| & eliminación | $X,A\&B \vdash B$ |
| & introducción | $X,A \vdash B,\ X,A \vdash C \Rightarrow X,A \vdash B\&C$ |
| v introducción | $X,A \vdash A\vee B$ |
| v introducción | $X,A \vdash B\vee A$ |
| v eliminación | $X,A \vdash C,\ X,B \vdash C \Rightarrow X,A\vee B \vdash C$ |
| ¬ introducción | $X,A \vdash B,\ X,A \vdash \neg B \Rightarrow X \vdash \neg A$ |
| ∀ eliminación | $X,(\forall x)(A(v)) \mid A(t)^{*}$ |
| ∀ introducción | $X,B \vdash A(v) \Rightarrow X,B \vdash (\forall v)(A(v))^{**}$ |
| ∃ introducción | $X,A(t) \vdash (\exists v)(A(v)^{*}$ |
| ∃ eliminación | $A(v) \vdash B \Rightarrow (\exists v)(A(v)) \mid B^{**}$ |
| → introducción | $X,A \vdash B \Rightarrow X \vdash A \to B$ |
| → eliminación | $X \vdash A,\ X, \vdash (A \to B) \Rightarrow X \vdash B$ |

(*) Donde el término t está libre para la variable v en la fórmula A(v), y A(v) es la fórmula resultante de sustituir simultáneamente cada ocurrencia del término t en A(t) por una ocurrencia de la variable v.

(**) Donde B y las fórmulas de X no contienen ocurrencias libres de la variable v, y A(v) es como en la nota precedente.

**SII (sistema implicacional intuicionista)**

SM +

¬ eliminación $X,A,\neg A \vdash B$

**SIC (sistema implicacional clásico)**

SI +

*¬ eliminación'* *$X,\neg\neg A \vdash A$*

## TEOREMAS DEL FRAGMENTO POSITIVO.

Dados dos sistemas deductivos $S_0$=<F,$\vdash_0$> y $S_1$=<F,$\vdash_1$> diremos que $S_1$ es una extensión de $S_0$ ($S_0$ es una restricción de $S_1$) syss (1) F es un sublenguaje de F', y (2) para cualquier conjunto de fórmulas $X\subseteq F$, $\{A/X\vdash_0 A\}\subseteq\{A/X\vdash_1 A\}\cap F_0$. Si además se cumple $\{A/X\vdash_0 A\}=\{A/X\vdash_1 A\}\cap F_0$, se dice que $S_1$ es una extensión conservadora de $S_0$.

En esta sección y la siguiente se comparan los sistemas deductivos HM, HI y HC con la correspondiente restricción al fragmento positivo de $\mathcal{P}$ , es decir, al prolenguaje resultante de suprimir el negador. La operación de consecuencia de esa restricción, llamémosla HP, queda definida (*à la* Hilbert) por los axiomas A1-A9, A11 y A12 y las reglas de prueba R1-R3. A este respecto, se establecen los siguientes resultados:
(1) HM y HI son extensiones conservadoras de HP, pero
(2) HC no es una extensión conservadora de HP.

Si F es el conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$, sea $F^+$ el conjunto de las fórmulas de su fragmento positivo. Asimismo, 'HP' designará a la axiomatización del fragmento positivo resultante de eliminar el axioma A10 de HM.

Para toda fórmula A, sea at(A) el conjunto de sus subfórmulas atómicas y , como de costumbre, sea &at(A) la conjunción de las fórmulas de at(A). Por tanto, si A es $\neg\neg p^0\rightarrow((q^0 v\neg p^0)\rightarrow\neg\neg p^0)$, at(A)=$\{p^0,q^0\}$ y &at(A) =$(p^0\&q^0)$.

La *clausura universal* de una fbf A con ocurrencias libres de las variables $x_1,...,x_n$ y sólo de esas variables es la fórmula $(\forall x_1)...(\forall x_n)A$.

Si X es un conjunto finito de fórmulas y C es la clausura universal de &X, la función $t_X:F\rightarrow F$ se define recursivamente como sigue:

1) $t_X(A)=A$ si $c(A)=0$;
2) $t_X(A\&B)= t_X(A)\& t_X(B)$;
3) $t_X(AvB)= t_X(A)v\ t_X(B)$;
4) $t_X(A\rightarrow B)= t_X(A)\rightarrow t_X(B)$;
5) $t_X(\neg A)= t_X(A)\rightarrow t_X(C)$;
6) $t_X((\forall v)A)=(\forall v)\ t_X(A)$;
7) $t_X((\exists v)A)=(\exists v)\ t_X(A)$.

Ahora podemos enunciar:

**LEMA 1.** Para cualquier conjunto finito de fórmulas X, si A es una fórmula de $F^+$ (por tanto es una fórmula sin ocurrencias del negador) y $at(A)\subseteq X$ entonces $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow A$, donde $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X$ es la clausura universal de &X.

**DEMOSTRACIÓN.** Por inducción sobre c(A). Si c(A)=0, *A es una fórmula atómica* y &X puede representarse como A&B; en tal caso por A4 $\vdash_{HI+}A\&B\rightarrow A$, y por aplicación reiterada de A11, $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow A$. Sea pues c(A)=k+1 y supóngase que el lema vale para fórmulas de complejidad $\leq$k. Si A *es la conjunción* A=B&C, la hipótesis de inducción proporciona $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow B$ y $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow C$; A6 y dos aplicaciones de R1 llevan entonces a $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow B\&C$. Si A *es la disyunción* A=BvC, por hipótesis de inducción $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow B$, y entonces A3, A7 y sendas aplicaciones de R1 permiten concluir $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow BvC$. Si A *es de la forma* A=B→C, por hipótesis de inducción $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow B$. En ese caso los axiomas A3, A1 y dos aplicaciones de R1 llevan a $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow(B\rightarrow C)$. Considérense finalmente los casos cuantificacionales. Si A *es la fórmula* $(\exists v)(B)$, por hipótesis de inducción $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow B(v)$ y por A12 $\vdash_{HI+}B(v)\rightarrow(\exists v)B$. Usando entonces A3 y R1 se concluye $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow(\exists v)B(v)$. Si A tiene la forma $(\forall v)(B)$, por hipótesis de inducción $_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow B(v)$ y por R2, puesto que el antecedente de esta fórmula no contiene ocurrencias libres de las variables $x_1,\ldots,x_n$, se concluye $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\rightarrow(\forall v)B(v)$. ⊣

Si $\pi$ es una demostración en HI, neg($\pi$) es el número de aplicaciones de los axiomas de negación A10 y A13 en $\pi$. Está claro entonces que si neg($\pi$)=0, $\pi$ es al mismo tiempo una demostración en $HI^+$.

**LEMA 2.** Si $\pi$ es una demostración en HI de la fórmula A entonces para todo conjunto finito de fórmulas X cerrado bajo subfórmulas atómicas y tal que $at(A)\subseteq X$, hay una demostración en HI $\mu$ de $t_X(A)$ y o bien $neg(\mu)=0$ o bien $neg(\mu)<neg(\pi)$.
**DEMOSTRACIÓN.** Por inducción sobre la longitud n de la demostración $\pi$ de A en HI. Si n=0, A es un axioma de HI. Para los axiomas distintos de A10 y A13 la demostración no ofrece especial dificultad. Para A10, se tiene $(t_X(A)\to t_X(B))\&(t_X(A)\to(t_X(B)\to C))\to(t_X(A)\to C)$, que el lector paciente puede comprobar es demostrable en HP. Para A13, la traducción para un conjunto de fórmulas X es $t_X(\neg A\to(A\to B))=(t_X(A)\to t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X))\to(t_X(A)\to t_X(B))$. Por el lema 1, si $at(t_X B)\subseteq X$, entonces $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\to t_X(B)$. Como $at(t_X(B))= at(B)\cup at(X)$, basta con que X sea cerrado bajo subfórmulas atómicas para que se cumpla $at(t_X B)\subseteq X$ y así $\vdash_{HI+}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X\to t_X(B)$. Por el axioma A3 $(t_X(A)\to t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\& X))\to((t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X)\to t_X(B))\to(t_X(A)\to t_X(B)))$. Por R1, de la hipótesis $t_X(A)\to t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X)$ se sigue $((t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X)\to t_X(B))\to(t_X(A)\to t_X(B)))$. Por el lema 1, $((t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X)\to t_X(B))$ y entonces de nuevo por R1, $(t_X(A)\to t_X(B))$. Adviértase que la derivación depende de la hipótesis $t_X(A)\to t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X)$. Por consiguiente, una aplicación del teorema de deducción lleva a concluir $(t_X(A)\to t_X((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\&X))\to (t_X(A)\to t_X(B))$. Para n=k+1, los casos de R2 y R3 tampoco ofrecen dificultad. En cuanto a R1, por la hipótesis de inducción $t_X(B\to A)=t_X(B)\to t_X(A)$ y $t_X(B)$ son demostrables en HP, y, por *modus ponens*, se sigue entonces que también lo es $t_X(A)$. ⊣

**COROLARIO 3.** Si A es una fórmula positiva (es decir, sin ocurrencias del negador), entonces si $\vdash_{HI}A$ entonces $\vdash_{HP}A$.
**DEMOSTRACIÓN.** En efecto, ya que si $A\subseteq F^+$ entonces $t_X(A)=A$. ⊣

**COROLARIO 4.** Si A es una fórmula positiva (esto es, sin ocurrencias del negador), entonces si $\vdash_{HM}A$ entonces $\vdash_{HP}A$.
**DEMOSTRACIÓN.** Trivial, ya que si $\vdash_{HM}A$ entonces $\vdash_{HI}A$. ⊣

## EL MÉTODO DE MATRICES.

El razonamiento desarrollado para mostrar que HI es una extensión conservadora del fragmento positivo, no puede extenderse a HC. La dificultad radica en que, en general, la traducción de A14 $\neg\neg A\to A$ via un conjunto X de fórmulas será de la forma $((A\to B)\to B)\to A$, que no es la de un esquema teoremático de HI ni aún cuando $\vdash B\to A$.

Para demostrar que HC no es una extensión conservadora del fragmento positivo basta con encontrar una fórmula de $\mathcal{P}$, sin ocurrencias del negador, que sea una teorema de HC pero no de HP. Para ello usaremos la fórmula $((p\to q)\to p)\to p$[3].

Para demostrar que esa fórmula es un teorema de HC demostramos primero:

**[L3]** $A\to B,\neg B\vdash_{HM}\neg A$

| | |
|---|---|
| $A\to B$ | Hip. |
| $(A\to B)\to(\neg B\to(A\to B))$ | A1 |
| $(\neg B\to(A\to B))$ | R1 |
| $(\neg B\to(A\to B))\to((\neg B\to(A\to\neg B))\to(\neg B\to((A\to B)\&(A\to\neg B))))$ | A6 |
| $((\neg B\to(A\to\neg B))\to(\neg B\to((A\to B)\&(A\to\neg B))))$ | R1 |
| $\neg B\to(A\to\neg B)$ | A1 |
| $\neg B\to((A\to B)\&(A\to\neg B))$ | R1 |
| $\neg B$ | Hip. |
| $(A\to B)\&(A\to\neg B)$ | R1 |
| $((A\to B)\&(A\to\neg B))\to\neg A$ | A10 |
| $\neg A$ | R1 |

[3] Hablando con propiedad, '$((p\to q)\to p)\to p$' no es una fórmula de $\mathcal{P}$, a diferencia de, por ejemplo, '$((p^0\to q^0)\to p^0)\to p^0$'. Por comodidad en lo que sigue se omiten los superíndices. El esquema $((A\to B)\to A)\to A$ es conocido como *ley de Peirce*.

A partir de aquí, aplicando el teorema de deducción, se concluye:

[**L4**] $A\to B \vdash HM\neg B\to\neg A$

[**L5**] $A,B \vdash_{HM} A\&B$ [Adjunción]

| | |
|---|---|
| $A\to(B\to A)$ | A1 |
| $A$ | Hip. |
| $B\to A$ | R1 |
| $(B\to A)\to((B\to B)\to(B\to(A\&B)))$ | A6 |
| $((B\to B)\to(B\to(A\&B)))$ | R1 |
| $B\to(B\to B)$ | A1 |
| $(B\to(B\to B))\to(B\to B)$ | A2 |
| $B\to B$ | R1 |
| $B\to(A\&B)$ | R1 |
| $B$ | Hip. |
| $A\&B$ | R1 |

[**T1**] $(p\to q)\to p \vdash_{HC} p$

| | |
|---|---|
| $(p\to q)\to p$ | Hipót. |
| $\neg p\to\neg(p\to q)$ | L4 |
| $\neg p\to(p\to q)$ | A13 |
| $(\neg p\to(p\to q))\&(\neg p\to\neg(p\to q))$ | L5 |
| $((\neg p\to(p\to q))\&(\neg p\to\neg(p\to q)))\to\neg\neg p$ | A10 |
| $\neg\neg p$ | R1 |
| $\neg\neg p\to p$ | A14 |
| $p$ | R1 |

Una nueva aplicación del teorema de deducción establece entonces $((p\to q)\to p)\to p$.

Para demostrar que $((p\to q)\to p)\to p$ no es un teorema de HP introducimos la noción de matriz. Un *álgebra* es un triplo $<A,<f_i>_{i\in I}>$, donde A es un conjunto no vacío y los $f_i$ son operaciones sobre A de distintas ariedades, $\alpha(f_i)$. $\alpha$ es entonces el tipo o signatura de ese álgebra. El prolenguaje $\mathcal{P}$ puede verse como un álgebra $<F,<\neg,\&,v,\to>>$, de tipo $\alpha$, $\alpha(\neg)=1$, $\alpha(\&)=\alpha(v)=\alpha(\to)=2$, o, si se prefiere, $<1,2,2,2>$. Una *matriz* para $\mathcal{P}$ es entonces un triplo $M=<\mathbf{A},<f_i>_{i0I},D>$, donde $<\mathbf{A},<f_i>_{i0I}>$ es un álgebra del mismo tipo que $\mathcal{P}$ y $D\subseteq A$ recibe el nombre de *conjunto de valores designados* de M. Para establecer una correspondencia entre el prolenguaje $\mathcal{P}$ y la matriz M se recurre a homomorfismos de $\mathcal{P}$ en M; es decir a aplicaciones $h:F\to\mathbf{A}$ tales que

1. $h(\neg(A))=f_1(h(A))$,
2. $h(A\&B)=f_2(h(A),h(B))$, $h(AvB)=f_3(h(A),h(B))$ y $h(A\to B)=f_4(h(A),h(B))$

El interés, en tales casos, está en las fórmulas A tales que para cualquier homomorfismo h de $\mathcal{P}$ en M se cumple $h(A)\in D$.

Para establecer que $((p\to q)\to p)\to p$ no es un teorema de HP construimos una matriz para el fragmento proposicional positivo de $\mathcal{P}$, es decir, el fragmento resultante de omitir '¬' y los cuantores. A continuación se demuestra que para cualquier homomorfismo h y cualquier fórmula A se cumple que si $\vdash_{HP}A$ entonces $h(A)\in D$, y sin embargo no sucede lo mismo para la ley de Peirce.

**Una matriz para el fragmento proposicional positivo de $\mathcal{P}$.**

Sea $M=<\{0,1,2\},<f_i>_{1\leq i\leq 3},\{2\}>$, donde las operaciones $f_i$ vienen especificadas por las tablas:

| $f_1(\&)$ | 0 | 1 | 2 | $f_2(v)$ | 0 | 1 | 2 | $f_3(\to)$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 |

Queda para el lector concienzudo verificar que si $\vdash_{HP}A$ entonces para cualquier homomorfismo h, h(A)=2. Sea finalmente un homomorfismo h tal que h(p)=1 y h(q)=0. En tal caso, $h(((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p)= f_3(f_3(f_3(h(p),h(q)),h(p)),h(p)) = f_3(f_3(f_3(1,0),1),1) = f_3(f_3(0,1),1) = f_3(2,1) = 1$. Un corolario de estos resultados es que el conjunto de los teoremas de HC no está contenido en el conjunto de los teoremas de HI.

Atendiendo a sus formulaciones hilbertianas, parece que las diferencias entre las lógicas mínima, intuicionista y clásica se refieren exclusivamente a la interpretación del negador (aunque esto es menos claro cuando se adopta A14' como axioma clásico específico). Sin embargo que HC no sea una extensión conservadora del fragmento positivo muestra que ese diagnóstico es superficial. Si la demostración en HC de fórmulas sin ocurrencias del negador requiere el concurso de axiomas de negación, es que en ese sistema deductivo la caracterización del negador afecta, y por tanto determina en parte, la de otros operadores.

## DERIVABILIDAD INTUICIONISTA vs. DERIVABILIDAD CLÁSICA.

Es inmediato que si $X\vdash_{HI}A$ entonces $X\vdash_{HC}A$, y acabamos de comprobar que la conversa no se cumple. Sin embargo, es posible encontrar traducciones fiables de la derivabilidad clásica a la derivabilidad intuicionista. Es decir, se trata de encontrar una función $t:F\rightarrow F$ tal que $X\vdash_{HC}A$ syss $t(X)\vdash_{HI}t(A)$, donde, si $X=\{B_1,...,B_i\}$, entonces $t(X)=\{t(B_1),...,t(B_i)\}$. La doble negación proporciona justamente una traducción fiable de la derivabilidad clásica a la derivabilidad intuicionista para el fragmento proposicional-es decir, elíminense los cuantores y tómese $t(A)=\neg\neg A$.

**TEOREMA 4 (T. DE GLIVENKO).** Para cualesquiera $X\subseteq F$ y $A\in F$, $X\vdash_{HC}A$ syss $\neg\neg(X)\vdash_{HI}\neg\neg A$.
**DEMOSTRACIÓN.** Demostramos primero que si $\neg\neg(X)\vdash_{HI}\neg\neg A$ entonces $X\vdash_{HC}A$. Asumiendo que $X=\{B_1,...,B_i\}$, la correspondiente derivación intuicionista puede representarse así:

$$\begin{array}{ll} & \neg\neg B_1 \\ & . \\ & . \\ & . \\ & \neg\neg B_i \\ \pi & \left\{\begin{array}{l} . \\ . \\ . \end{array}\right. \\ & \neg\neg A \end{array}$$

El primer paso es demostrar

[**L6**] $\vdash_{HI}(A\rightarrow\neg\neg A)$.

| | |
|---|---|
| $\neg A\rightarrow(A\rightarrow\neg\neg A)$ | A13 |
| $A\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg\neg A)$ | L2 |
| $(\neg A\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg A))$ | A1 |
| $(\neg A\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg A))\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg A)$ | A2 |
| $\neg A\rightarrow\neg A$ | R1 |
| $(\neg A\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg A))$ | A1 |
| $A\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg A)$ | R1 |
| $(A\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg A))\rightarrow((A\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg\neg A))\rightarrow(A\rightarrow((\neg A\rightarrow\neg A)\&(\neg A\rightarrow\neg\neg A))))$ | A6 |
| $(A\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg\neg A))\rightarrow(A\rightarrow((\neg A\rightarrow\neg A)\&(\neg A\rightarrow\neg\neg A)))$ | R1 |
| $A\rightarrow((\neg A\rightarrow\neg A)\&(\neg A\rightarrow\neg\neg A))$ | R1 |
| $((\neg A\rightarrow\neg A)\&(\neg A\rightarrow\neg\neg A))\rightarrow\neg\neg A$ | A10 |
| $(A\rightarrow((\neg A\rightarrow\neg A)\&(\neg A\rightarrow\neg\neg A)))\rightarrow((((\neg A\rightarrow\neg A)\&(\neg A\rightarrow\neg\neg A))\rightarrow\neg\neg A)\rightarrow(A\rightarrow\neg\neg A))$ | A3 |
| $(((\neg A\rightarrow\neg A)\&(\neg A\rightarrow\neg\neg A))\rightarrow\neg\neg A)\rightarrow(A\rightarrow\neg\neg A)$ | R1 |
| $(A\rightarrow\neg\neg A)$ | R1 |

A partir de la derivación intuicionista inicial se obtiene entonces la siguiente derivación clásica:

$$
\begin{array}{ll}
 & B_1 \\
 & . \\
 & . \\
 & . \\
 & B_i \\
\text{L6} \left\{ \begin{array}{l} . \\ . \\ . \end{array} \right. & \\
 & \neg\neg\, B_1 \\
 & . \\
 & . \\
 & . \\
 & \neg\neg\, B_i \\
\pi \left\{ \begin{array}{l} . \\ . \\ . \end{array} \right. & \\
 & \neg\neg A \\
\text{A14} & \neg\neg A \to A \\
\text{R1} & A
\end{array}
$$

Para la conversa, si $X \vdash_{HC} A$ entonces $\neg\neg(X) \vdash_{HI} \neg\neg A$, se procede por inducción sobre la longitud n de la derivación clásica de A a partir de X. Si n=1, A es un axioma o un elemento de X. En el segundo caso, basta con observar que $\neg\neg A \vdash_{HI} \neg\neg A$. Si A es uno de los axiomas comunes (A1-A10 y A13), basta con emplear L4 y R1. Supóngase, por tanto, que A es un axioma en virtud del esquema A14, $\neg\neg B \to B$; habrá que demostrar entonces que $\vdash_{HI} \neg\neg(\neg\neg B \to B)$.

| | |
|---|---|
| $A\to(\neg\neg A\to A)$ | A1 |
| $(A\to(\neg\neg A\to A))\to(\neg(\neg\neg A\to A)\to\neg A)$ | L4,TD |
| $\neg(\neg\neg A\to A)\to\neg A$ | R1 |
| $\neg\neg A\to(\neg A\to A)$ | A13 |
| $(\neg\neg A\to(\neg A\to A))\to(\neg A\to(\neg\neg A\to A))$ | L2 |
| $\neg A\to(\neg\neg A\to A)$ | R1 |
| $(\neg A\to(\neg\neg A\to A))\to(\neg(\neg\neg A\to A)\to\neg\neg A)$ | L4,TD |
| $\neg(\neg\neg A\to A)\to\neg\neg A)$ | R1 |
| $\neg(\neg\neg A\to A)\to\neg A)\&\neg(\neg\neg A\to A)\to\neg\neg A)$ | L3 |
| $(\neg(\neg\neg A\to A)\to\neg A)\&\neg(\neg\neg A\to A)\to\neg\neg A))\to\neg\neg(\neg\neg A\to A)$ | A10 |
| $\neg\neg(\neg\neg A\to A)$ | R1 |

Asúmase entonces que el teorema vale para $n \leq k$. Sea $\pi$ una derivación clásica de longitud k+1 de A a partir de X; hay que considerar tres casos, correspondientes a la regla R1. Si $\pi$ es de la forma

$$
\begin{array}{ll}
. & \\
. & \\
. & \\
B\to A & \\
B & \\
A & \text{R1}
\end{array}
$$

y puesto que la longitud de las subderivaciones (clásicas) de $B\to A$ y A es $\leq k$, se sigue de la hipótesis de inducción la existencia de sendas derivaciones intuicionistas de $\neg\neg(B\to A)$ y $\neg\neg A$. Para demostrar $\neg\neg(A\to B)\to(\neg\neg A\to\neg\neg B)$, establecemos primero

[**L7**] $\vdash_{HI}\neg\neg B\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A))$

| | |
|---|---|
| $\neg A, B\rightarrow A\vdash_{HI}\neg A\rightarrow\neg B$ | L4 |
| $\neg A, B\rightarrow A\vdash_{HI}\neg B$ | R1 |
| $\neg A\vdash_{HI}(B\rightarrow A)\rightarrow\neg B$ | R1,TD |
| $\vdash_{HI}((B\rightarrow A)\rightarrow\neg B)\rightarrow(\neg\neg B\rightarrow\neg(B\rightarrow A))$ | L4,TD |
| $\neg A\vdash_{HI}\neg\neg B\rightarrow\neg(B\rightarrow A)$ | R1 |
| $\neg A,\neg\neg B\vdash_{HI}5(B\rightarrow A)$ | LEMA 2 |
| $\neg\neg B\vdash_{HI}\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A)$ | TD |
| $\vdash_{HI}\neg\neg B\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A))$ | TD |

[**L8**] $\neg\neg(B\rightarrow A),\neg\neg B\vdash_{HI}\neg\neg A$

| | |
|---|---|
| $\neg\neg(B\rightarrow A)$ | Hip. |
| $\neg\neg(B\rightarrow A)\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg\neg(B\rightarrow A))$ | A1 |
| $\neg A\rightarrow\neg\neg(B\rightarrow A)$ | R1 |
| $\neg\neg B$ | Hip. |
| $\neg\neg B\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A))$ | L7 |
| $\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A)$ | R1 |
| $(\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A))\&(\neg A\rightarrow\neg\neg(B\rightarrow A))$ | L5 |
| $((\neg A\rightarrow\neg(B\rightarrow A))\&(\neg A\rightarrow\neg\neg(B\rightarrow A)))\rightarrow\neg\neg A$ | A10 |
| $\neg\neg A$ | R1 |

Dos aplicaciones del teorema de deducción llevan entonces a

[**L9**] $\vdash_{HI}\neg\neg(B\rightarrow A)\rightarrow(\neg\neg B\rightarrow\neg\neg A)$

y, por *modus ponens* a partir de la hipótesis de inducción, $X\vdash_{HI}\neg\neg A$. ⊣

Para el prolenguaje $\mathcal{P}$, la función t que se define a continuación proporciona una traducción fiable entre derivabilidad clásica y la intuicionista.

$t(A)=\neg\neg A$, si $c(A)=0$,
$t(\neg A)=\neg t(A)$,
$t(A\&B)=t(A)\&t(B)$,
$t(A\rightarrow B)=t(A)\rightarrow t(B)$,
$t(AvB)=\neg\neg(t(A)vt(B))$,
$t((\forall v)A)=(\forall v)t(A)$,
$t((\exists v)A)=\neg\neg((\exists v)tA)$.

Antes de comprobarlo conviene establecer algunos resultados útiles para simplificar las demostraciones venideras. Una consecuencia casi inmediata que tiene la virtud de acortar apreciablemente las demostraciones es:

[**L10**] $A\rightarrow B, B\rightarrow C\vdash_{HI}A\rightarrow C$

Otro principio útil es la regla de sustitución de equivalentes demostrados, que empleando la abreviatura $A\equiv B=_{def.}(A\rightarrow B)\&(B\rightarrow A)$ puede formularse así:

> **[EQ]** Si $\vdash_{HS}A\equiv A'$ y la fórmula B' resulta de la fórmula B al sustituir algunas ocurrencias de A en B por ocurrencias de A', entonces $\vdash_{HS}B\equiv B'$.

**TEOREMA 5**. HC es cerrado bajo la regla [EQ].
**DEMOSTRACIÓN.** Por inducción sobre c(B). Si $c(B)=0$ y $A\neq B$, $B=B'$, y si $A=B$ entonces $A'=B'$ y el resultado se sigue directamente de la hipótesis del teorema. Sea pues $c(B)=k+1$. Si $B=C\&D$, $(C\&D)'=C'\&D'$. En tal caso,

| | |
|---|---|
| $C\&D\rightarrow C$ | A4 |
| $C\rightarrow C'$ | Hip.ind. |
| $C\&D\rightarrow C'$ | L10 |
| $(C\&D\rightarrow C')\rightarrow((C\&D\rightarrow D')\rightarrow(C\&D\rightarrow C'\&D'))$ | A6 |
| $((C\&D\rightarrow D')\rightarrow(C\&D\rightarrow C'\&D'))$ | R1 |
| $C\&D\rightarrow D$ | A5 |
| $D\rightarrow D'$ | Hip.ind. |
| $C\&D\rightarrow D'$ | L10 |
| $C\&D\rightarrow C'\&D'$ | R1 |

La conversa, $C'\&D'\rightarrow C\&D$, se demuestra *mutatis mutandis* del mismo modo. Como esto sucede con todos los casos restantes, en cada uno de ellos me limitaré a considerar uno de los sentidos de la equivalencia, quedando la demostración del otro para el lector. Si B=CvD, (CvD)'=C'vD', y entonces

| | |
|---|---|
| $C'\rightarrow C'vD'$ | A7 |
| $C\rightarrow C'$ | hip.ind. |
| $C\rightarrow C'vD'$ | L10 |
| $(C\rightarrow C'vD')\rightarrow((D\rightarrow C'vD')\rightarrow(CvD\rightarrow C'vD'))$ | A9 |
| $((D\rightarrow C'vD')\rightarrow(CvD\rightarrow C'vD'))$ | R1 |
| $D'\rightarrow C'vD'$ | A8 |
| $D\rightarrow D'$ | hip.ind. |
| $D\rightarrow C'vD'$ | L10 |
| $CvD\rightarrow C'vD'$ | R1 |

Sea entonces $B=C\rightarrow D$, de manera que $(C\rightarrow D)'=C'\rightarrow D'$.

| | |
|---|---|
| $C\rightarrow D$ | hip. |
| $C'\rightarrow C$ | hip.ind. |
| $C'\rightarrow D$ | L10 |
| $D\rightarrow D'$ | hip.ind. |
| $C'\rightarrow D'$ | L10 |
| $(C\rightarrow D)\rightarrow(C'\rightarrow D')$ | TD |

Si $B=\neg C$, $(\neg C)'= \neg(C')$.

| | |
|---|---|
| $C'\rightarrow C$ | hip.ind. |
| $\neg C$ | hip. |
| $\neg C'$ | L3 |
| $\neg C\rightarrow\neg C'$ | TD |

Para $B=(\forall v)C(v)$, $((\forall v)C(v))'=(\forall v)(C(v))'$, y por consiguiente

| | |
|---|---|
| $(\forall v)C(v)\rightarrow C(v)$ | A11 |
| $C(v)\rightarrow C(v)$ | Hip.ind. |
| $(\forall v)C(v)\rightarrow C(v)'$ | L10 |
| $(\forall v)C(v)\rightarrow( \forall v)C(v')$ | R2 |

Finalmente, si $B=(\exists v)C(v)$, y por tanto $((\exists v)C(v))'=(\exists v)(C(v))'$,

| | |
|---|---|
| $C(v)'\rightarrow(\exists v)(C(v))'$ | A12 |
| $C(v)\rightarrow C(v)'$ | Hip.ind |
| $C(v)\rightarrow(\exists v)(C(v))'$ | L10 |
| $(\exists v)C(v)\rightarrow(\exists v)C(v))'$ | R3. |

$\dashv$

Supóngase a continuación que $t(X)\vdash_{HI}t(A)$. En ese caso $t(X)\vdash_{HC}t(A)$, y como puede comprobarse fácilmente que, para cualquier fórmula B, $\vdash_{HC}B\equiv t(B)$, por [EQ] se sigue $X\vdash_{HC}A$.

Para la conversa se precisa un nuevo resultado auxiliar:

**LEMA 3**. Para toda fórmula A de $\mathcal{P}$, $\vdash_{HI}\neg\neg t(A)\rightarrow t(A)$.

**DEMOSTRACIÓN**. Como de costumbre por inducción sobre c(A). Si c(A)=0, por el teorema de Glivenko $\vdash HI\neg\neg(\neg\neg A\rightarrow A)$; úsense entonces L8 y R1 para llegar a $\neg\neg\neg\neg A\rightarrow\neg\neg A$. Sea pues c(A)=k+1. Hay que considerar seis subcasos.

(1) $A=\neg B$.

| | |
|---|---|
| $tB\to\neg\neg tB$ | L6 |
| $\neg\neg\neg tB\to(tB\to\neg\neg\neg tB)$ | A1 |
| $\neg\neg\neg tB$ | hip. |
| $(tB\to\neg\neg\neg tB)$ | R1 |
| $(tB\to\neg\neg tB)\&(tB\to\neg\neg\neg tB)$ | L5 |
| $(tB\to\neg\neg tB)\&(tB\to\neg\neg\neg tB)\to\neg tB$ | A10 |
| $\neg tB$ | R1 |
| $\neg\neg\neg tB\to\neg tB$ | TD |

(2) A=B&C:

| | |
|---|---|
| $tB\&tC\to tB$ | A4 |
| $\neg tB\to\neg(tB\&tC)$ | L4 |
| $\neg\neg(tB\&tC)\to\neg\neg tB$ | L4 |
| $\neg\neg tB\to tB$ | hip.ind. |
| $\neg\neg(tB\&tC)\to tB$ | L10 |
| $(\neg\neg(tB\&tC)\to tB)\to((\neg\neg(tB\&tC)\to tC))\to(\neg\neg(tB\&tC)\to tB\&tC))$ | A6 |
| $(\neg\neg(tB\&tC)\to tC)\to(\neg\neg(tB\&tC)\to tB\&tC$ | R1 |
| $tB\&tC\to tC$ | A4 |
| $\neg tC\to\neg(tB\&tC)$ | L4 |
| $\neg\neg(tB\&tC)\to\neg\neg tC$ | L4 |
| $\neg\neg tC\to tC$ | hip.ind. |
| $\neg\neg(tB\&tC)\to tC$ | L10 |
| $\neg\neg(tB\&tC)\to(tB\&tC)$ | R1 |

(3) A=BvC:
hay que demostrar $\neg\neg\neg\neg(tBvtC)\to\neg\neg(tBvtC)$; procédase como en la base.
(4) A=B→C:

| | |
|---|---|
| $\neg\neg(tB\to tC)\to(\neg\neg tB\to\neg\neg C)$ | L9 |
| $\neg\neg(tB\to tC)$ | hip. |
| $\neg\neg tB\to\neg\neg tC$ | R1 |
| $tB\to\neg\neg tB$ | L6 |
| $tB\to\neg\neg tC$ | L10 |
| $\neg\neg tC\to tC$ | hip.ind. |
| $tB\to tC$ | L10 |
| $\neg\neg(tB\to tC)\to(tB\to tC)$ | TD |

(5) A=(∃v)B(v):
hay que demostrar $\neg\neg\neg\neg(\exists v)tB(v)\to\neg\neg(\exists v)tB(v)$; procédase por consiguiente como en la base y el subcaso de la disyunción.
(6) A=(∀v)B(v):

| | |
|---|---|
| $(\forall v)tB(v)\to tB(v)$ | A11 |
| $\neg tB(v)\to\neg(\forall v)tB(v)$ | L4 |
| $\neg\neg(\forall v)tB(v)\to\neg\neg tB(v)$ | L4 |
| $\neg\neg(\forall v)tB(v)\to(\forall v)\neg\neg\ tB(v)$ | R2 |
| $(\forall v)\neg\neg tB(v)\to\neg\neg tB(v)$ | A11 |
| $\neg\neg(\forall v)tB(v)\to\neg\neg tB(v)$ | L10 |
| $\neg\neg tB(v)\to tB(v)$ | hip.ind. |
| $\neg\neg(\forall v)tB(v)\to tB(v)$ | L10 |
| $\neg\neg(\forall v)tB(v)\to(\forall v)tB(v)$ | R2 |

⊣

Ahora estamos en disposición de demostrar:

**TEOREMA 6.** $X\vdash_{HC}A$ syss $t(X)\vdash_{HI}tA$.
**DEMOSTRACIÓN**. Sólo falta por demostrarlo de izquierda a derecha. La demostración se efectúa por inducción sobre la longitud de la derivación clásica de A a partir de X. Si $A\in X$ o si A es

uno de los axiomas A1-A6, A10, A11 o A13 la demostración es inmediata. Para los restantes axiomas, el razonamiento es el siguiente.
A7:

| | |
|---|---|
| tA→tAvtB | A7 |
| tAvtB→¬¬(tAvtB) | L6 |
| tA→¬¬(tAvtB) | L10 |

Obviamente, A8 se trata del mismo modo.

A9:

| | |
|---|---|
| (tA→tC)→((tB→tC)→(tAvtB→tC)) | A9 |
| (tAvtB→tC)→(¬tC→¬(tAvtB)) | L4 |
| (¬tC→¬(tAvtB))→(¬¬(tAvtB)→¬¬tC) | L4 |
| (tAvtB→tC)→(¬¬(tAvtB)→¬¬tC) | L10 |
| tA→tC | hip. |
| (tB→tC)→(tAvtB→tC) | R1 |
| (tB→tC)→(¬¬(tAvtB)→¬¬tC) | L10 |
| ¬¬tC→tC | hip.ind. |
| tB→tC | hip. |
| ¬¬(tAvtB)→¬¬tC | R1 |
| ¬¬(tAvtB)→tC | L10 |
| (tB→tC)→(¬¬(tAvtB)→tC) | TD |
| (tA→tC)→((tB→tC)→(¬¬(tAvtB)→tC)) | TD |

A12:

| | |
|---|---|
| t(A(s))→(∃v)t(A(v)) | A12 |
| (∃v)t(A(v))→¬¬(∃v)t(A(v)) | L6 |
| t(A(s))→¬¬(∃v)t(A(v)) | L10 |

A14:

Por el lema 2, ¬¬t(A)→t(A).

Supóngase a continuación que la longitud de la derivación clásica de A fuese k+1. Hay que considerar tantos subcasos como reglas de prueba.
Para R1 y R2 aplíquese la regla correspondiente a la fórmula o fórmulas resultantes de la hipótesis inductiva. Para la regla restante, demostramos primero:

[**L11**] (∀v)(¬ A(v))→¬(∃v)A(v))

| | |
|---|---|
| ¬A(t)→(A(t)→B) | A13 |
| (∀v)¬A(v)→¬A(t) | A11 |
| (∀v)¬A(v)→(A(t)→B) | L10 |
| A(t)→((∀v)¬A(v)→B) | L6,R1 |
| (∃v)A(v)→((∀v)¬A(v)→B) | R3 |
| (∀v)¬A(v)→((∃v)A(v)→B) | L6,R1 |
| ¬A(t)→(A(t)→¬B) | A13 |
| (∀v)¬A(v)→¬A(t) | A11 |
| (∀v)¬A(v)→(A(t)→¬B) | L10 |
| A(t)→(( ∀v)¬A(v)→¬B) | L6,R1 |
| (∃v)A(v)→((∀v)¬A(v)→¬B) | R3 |
| (∀v)¬A(v)→((∃v)A(v)→¬B) | L6,R1 |
| (∀v)¬A(v) | hip. |
| (∃v)A(v)→B | R1 |
| (∃v)A(v)→¬B | R1 |
| ((∃v)A(v)→B)&((∃v)A(v)→¬B) | L5 |
| ((∃v)A(v)→B)&((∃v)A(v)→¬B)→¬(∃v)A(v) | A10 |
| ¬(∃v)A(v) | R1 |
| (∀v)¬A(v)→¬(∃v)A(v) | td |

Entonces se tiene el siguiente razonamiento:
R3:

| | |
|---|---|
| $t(A(v))\to t(B)$ | hip.ind. |
| $\neg t(B)\to\neg t(A(v))$ | L4 |
| $\neg t(B)\to(\forall v)\neg t(A(v))$ | R2 |
| $(\forall v)\neg t(A(v))\to\neg(\exists v)A(v)$ | L11 |
| $\neg\neg(\exists v)A(v)\to\neg\neg t(B)$ | L4 |
| $\neg\neg t(B)\to t(B)$ | Lema 2 |
| $\neg\neg(\exists v)A(v)\to t(B)$ | L10 |

## EJERCICIOS

(1) Demostrar (a) $\vdash_{HC}(p\to q)v(q\to p)$, (b) que esa fórmula no es un teorema de HP, (c) $\vdash_{HC}((\exists v)A(v)\to t(B)x)(P^1x\to(\forall y)(P^1y))$.
(2) Demostrar, empleando el método de matrices, que A3 es independiente de los restantes axiomas de HM -es decir, que no es derivable de ellos.
(3) Demostrar que HC y HC' son equivalentes; es decir, para cualquier fórmula A de $\mathcal{P}$, $\vdash_{HC}A$ syss $\vdash_{HC'}A$.
(4) Demostrar que las relaciones de consecuencia de HM, HI y HC son estándar.
(5) La lógica de Rasiowa con seminegación queda definida por el sistema hilbertiano HR que resulta de incorporar a HP el axioma A15 $\neg(A\to A)\to B$ y la regla R3. $A\to B, B\to A\vdash\neg A\to\neg B$. Compárese HR con HM y HI, determinando las correspondientes relaciones de inclusión.
(5) Demostrar que la función s definida por:

$s(A)=\neg A$ si $c(A)=0$,
$s(\neg A)=\neg s(A)$,
$s(A\&B)=s(A)\&s(B)$,
$s(AvB)=a(A)vs(B)$,
$s(A\to B)=s(A)\to s(B)$,
$s((\exists v)A)=(\exists v)s(A)$,
$s((\forall v)A)=(\forall v)s(A)$.

proporciona una traducción apropiada entre la derivabilidad intuicionista y la derivabilidad mínima.