

Francisco José Salguero Lamillar

ÁRBOLES SEMÁNTICOS PARA LÓGICA MODAL
CON ALGUNOS RESULTADOS SOBRE SISTEMAS NORMALES.

(Tesis doctoral)

Director: Prof. Dr. D. Emilio Díaz Estévez.

Departamento de Filosofía, Lógica y Filosofía de la
Ciencia y Estética y Teoría de las Artes
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

1991

FRANCISCO JOSÉ SALGUERO LAMILLAR

ARBOLES SEMANTICOS PARA LOGICA MODAL
CON ALGUNOS RESULTADOS SOBRE SISTEMAS NORMALES
(TESIS DOCTORAL)

*Non enim tanta fuit antiquorum scriptorum
perfectio ut non et nostro doctrina indigeat
studio, nec tantum in nobis mortalibus scientia
potest crescere ut non ultra possit augmentum
recipere.*

Abelardo

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA, LÓGICA Y FILOSOFÍA
DE LA CIENCIA Y ESTÉTICA Y TEORÍA DE LAS ARTES
SEVILLA, 1991

ÍNDICE

	<u>Página</u>
INTRODUCCIÓN.....	i
CAPÍTULO UNO: Breve reseña histórica acerca de la lógica modal.....	1
§1. Las modalidades en la antigüedad y en la Edad Media.....	1
§2. Las modalidades en la lógica matemática. Los sistemas de Lewis y la semántica de los mundos posibles.....	17
CAPÍTULO DOS: La semántica de los mundos posibles.....	28
§3. Los problemas de la intensionalidad.....	28
§4. Mundos posibles y semántica.....	38
§5. La relación de alternatividad.....	46
CAPÍTULO TRES: Conjuntos modelos.....	56
§6. La noción de conjunto modelo.....	56
§7. Algunos resultados con conjuntos modelos y mundos posibles.....	67
CAPÍTULO CUATRO: Un procedimiento semántico de decisión.....	75
§8. Árboles semánticos para la lógica modal alética de proposiciones.....	75
§9. El teorema fundamental de los árboles semánticos.....	85
§10. El procedimiento de los árboles semán- ticos aplicado a los sistemas normales de lógica modal proposicional.....	96
§11. El uso de los árboles semánticos como tablas semánticas.....	102
§12. Árboles semánticos infinitos por causa de la iteración de operadores de moda- lidad.....	106

CAPÍTULO CINCO: Cuantificación y modalidad.....	116
§13. La opacidad referencial en lógica modal alética de predicados con identidad.....	116
§14. Identificación cruzada y funciones de individuación.....	130
§15. Presuposiciones de existencia e indi- cadores rígidos.....	139
CAPÍTULO SEIS: Árboles semánticos para lógica modal cuantificacional.....	149
§16. Árboles semánticos para lógica modal con cuantificadores.....	149
§17. El teorema fundamental de los árboles semánticos para lógica modal de pre- dicados.....	153
§18. Algunos resultados.....	162
§19. Árboles semánticos infinitos por causa de la iteración de operadores cuanti- ficacionales.....	166
CAPÍTULO SIETE: La interpretación deóntica de las modalidades.....	173
§20. Lenguajes normativos y lógica.....	175
§21. La reinterpretación deóntica de los operadores de modalidad.....	181
§22. La reducción de la lógica deóntica a la lógica modal alética. El sistema SK.....	193
CAPÍTULO OCHO: Corrección y completitud.....	204
§23. El cálculo CD*.....	204
§24. Corrección y completitud.....	213
APÉNDICE I: Otros procedimientos semánticos de decisión.....	219
APÉNDICE II: Un cálculo deductivo natural modal.....	228
APÉNDICE III: Bibliografía.....	238

INTRODUCCIÓN.

Suele hablarse en lógica de dos perspectivas diferentes desde las que abordar los lenguajes formales: la una sintáctica, semántica la otra. La primera trataría de establecer a partir de unas reglas primitivas de transformación y de unos pocos axiomas el mayor número de teoremas posibles, independientemente de la interpretación que se dé a los signos lingüísticos constitutivos; la segunda tendría la intención, precisamente, de fundamentar las verdades del sistema en una interpretación adecuada de esos signos. Así, mientras que el análisis sintáctico de las modalidades lleva al estudio de determinadas verdades lógicas intuitivas para desarrollar a partir de ellas unos axiomas y unas reglas de derivación que permitan fundamentar un cálculo válido para enunciados modales, el análisis semántico aborda el estudio de los propios conceptos modales para desarrollar a partir de ellos su lógica. Pero en cualquier caso, tal dualidad entre la sintaxis y la semántica de un lenguaje formal y los dos enfoques a que da lugar no es tal y sí tan sólo una distinción metodológica,

dos modos de abordar un mismo problema con método y herramientas diferentes. En el presente trabajo he seguido el segundo de ambos caminos con los ojos siempre puestos en el primero; transitarlo supone introducirse en el terreno de la intensionalidad, caballo de batalla de la lógica del lenguaje natural y elemento de discordia entre los que propugnan una ciencia lógica puramente extensional y los que abogan por una lógica menos limitada en su campo de acción, esto es: por una teoría general de las modalidades. Escribo, por tanto, sobre la lógica modal en sentido lato o, lo que es lo mismo, sobre la lógica de aquellos conceptos *anejos por su gramática* a los de necesidad y posibilidad.

De este modo, el objeto principal del trabajo que sigue a estas líneas es presentar desde un punto de vista lógico-filosófico la discusión actual acerca de las modalidades y ofrecer un análisis semántico de algunos sistemas modales distinguidos por su relevancia para la lingüística y la filosofía en parcelas como la ética (teoría de las normas), la epistemología (teoría del conocimiento) o la semántica (teoría del significado y la referencia). Para ello, en el primer capítulo ofrezco una sintética aproximación histórica a la lógica modal mediante la cual pretendo introducir la discusión filosófica posterior sobre

el significado de las modalidades (en el sentido amplio del término) que se desarrolla en el capítulo dos.

El capítulo tres está dedicado a presentar una semántica lógica para las modalidades, basada, fundamentalmente, en el concepto de conjunto modelo (*model set*), acuñado por JAAKKO HINTIKKA. Trabajar con conjuntos modelos en lugar de con mundos posibles permite ofrecer sistemas modelos -llamados por algunos autores *marcos* (*frames*)- muy adecuados para el procedimiento semántico de decisión que ofrezco más adelante, además de simplificar en gran medida algunos de los problemas presentados anteriormente en el seno de la teoría del significado. En cuanto al procedimiento de decisión aludido, éste se basa en el de las tablas semánticas de BETH, refinado por SMULLYAN en su libro *First-order Logic* y usado con los mismos propósitos que los míos por MELVIN FITTING en *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*, con evidentes ventajas sobre la versión que KRIPKE usara en su artículo "Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi".

El procedimiento de árboles semánticos que presento tiene interesantes ventajas sobre otros procedimientos semánticos para lógica modal más habituales. Aun así, no es

nuevo su uso, excepto por lo que se refiere a algunos aspectos que considero relevantes como, por ejemplo, la unificación de las reglas de construcción del árbol para los operadores modales o el tratamiento de las secuencias arbóreas infinitas, tanto por causa de la iteración de modalidades como por causa de la iteración cuantificacional en el caso de la lógica de predicados modal.

El procedimiento de árboles modales va a mostrar su gran utilidad para obtener resultados semánticos acerca de los diferentes sistemas modales tratados. Además, proporciona los elementos suficientes para una fácil prueba de completitud y corrección de los sistemas de lógica modal denominados *normales* a través de su relación, algo más que estrecha, con el cálculo CD^* , presentado en el último capítulo de este trabajo. Este cálculo CD^* tiene también la virtud de ser fácilmente implementable en lenguajes de alto nivel adecuados para la manipulación simbólica, como pueden ser LISP o PROLOG, faceta que no ha sido tratada en este trabajo, aunque pienso que es un elemento más a considerar en próximas investigaciones y extensiones de los resultados aquí obtenidos.

CAPÍTULO UNO:

BREVE RESEÑA HISTÓRICA ACERCA DE LA LÓGICA MODAL.

§1. Las modalidades en la antigüedad y en la Edad Media.

El término "modalidad" significa la forma o modo en que algo es. En el contexto lógico hace referencia a la forma de ser un enunciado, dicho así, en un sentido amplio. Pero lo que en última instancia viene a significar la modalidad en lógica, como se verá más adelante, es que la evaluación de los enunciados modales ha de realizarse no sólo en función de su acción descriptiva de la realidad, en tanto que se adecuen a ella, sino también en función de una especie de *autorreferencia* que se da por el hecho de que los operadores modales indican -de un modo que habrá de ser determinado- la relación que el enunciado modalizado, esto es, el enunciado que cae bajo el alcance de un operador modal, mantiene con otros enunciados de la teoría.

La precedente definición de modalidad es, hasta cierto punto, confusa, probablemente porque al exponerla tal cual

se hayan dado por supuestos muchos de los problemas de índole filosófica que se encuentran involucrados desde antiguo en el estudio de los modos. Sin embargo, sirve ahora porque de ella se siguen dos aspectos importantes para entender la naturaleza lógica de las modalidades; a saber: que los enunciados modales no son enunciados puramente referenciales ya que no se limitan a describir una realidad sino que al mismo tiempo dicen desde una perspectiva lógica cómo es esa descripción¹ y que una semántica para la lógica de los enunciados modales exige establecer relaciones de dependencia entre el valor de la función de verdad correspondiente a cada enunciado y el valor de la función de verdad que corresponde a otros enunciados pertenecientes al mismo sistema. De igual modo, adelanta mi actitud a la hora de considerar formalmente los conceptos modales, pues queda claro que opto por tratarlos como operadores en el mismo sentido en que la cuantificación es tratada en la lógica de predicados de primer orden.²

¹ Esta definición de la modalidad parece que dejara a un lado las modalidades llamadas *de re* para tener en cuenta sólo las modalidades *de dicto*. En efecto, algo de esto hay si se puede, como así es mi parecer, reducir las modalidades *de re* a las *de dicto*.

² Esta puntualización tiene más que ver con la filosofía de

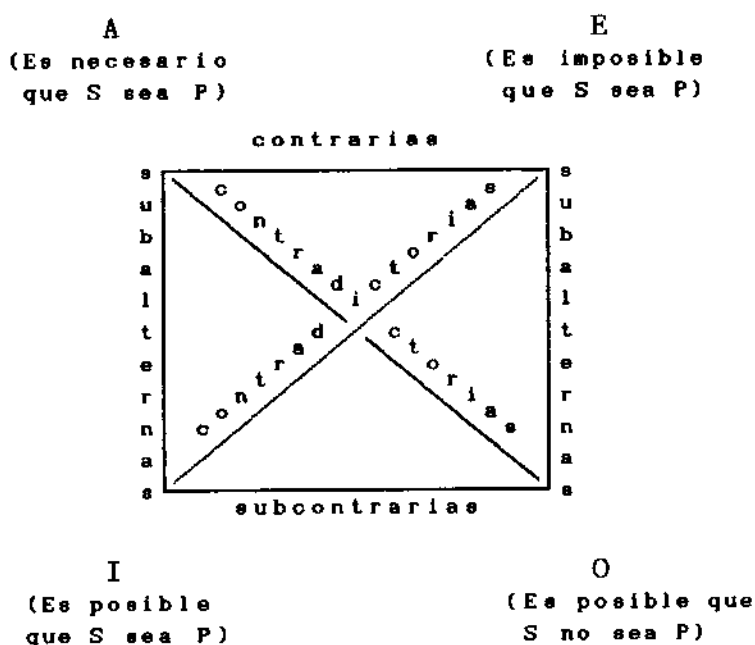
Sin embargo, es conveniente hacer algunas acotaciones históricas al significado y el uso lógico de las modalidades antes de tratar los aspectos más importantes que aportan al análisis lógico de los lenguajes naturales.

La lógica modal es una parte menos conocida de la obra lógica de ARISTÓTELES, probablemente porque sus comentaristas dedicaron un mayor esfuerzo a describir los mecanismos de la silogística asertórica. En los *Analíticos*, obra cumbre de la lógica en la antigüedad clásica, empero, se apuntan también las formas del silogismo modal, que más tarde, en la Edad Media, a tenor sin duda de las discusiones teológicas y metafísicas, serán más estudiadas y comentadas de lo que lo fueron en los siglos precedentes y, curiosamente, también en los posteriores, casi hasta la aparición de los trabajos de LEWIS sobre la implicación estricta.

ARISTÓTELES distingue hasta cuatro modos de

la lógica -por ejemplo, algunos de los asuntos que en esta tesis se discuten en relación a las posturas *referencialistas* de QUINE- que con la lógica misma.

enunciación: lo necesario (τὸ ἀναγκαῖον), lo imposible (τὸ ἀδυνατόν), lo posible (τὸ δυνατόν) y lo contingente (τὸ ἐνδεχόμενον), que dan lugar a otras tantas clases de proposiciones modales.³ El siguiente es el cuadro de oposiciones modales que propone ARISTÓTELES:⁴



³ Cfr. ARISTÓTELES: *Περὶ ἑρμηνείας*, capítulos XII y XIII, 21a34-23a25. En esta obra, que ALEJANDRO DE AFRODISIA colocó en su edición inmediatamente antes de los *Analíticos*, ARISTÓTELES estudia la oposición entre los enunciados asertóricos y los modales y realiza también una iluminadora discusión acerca de los futuros contingentes en relación con las modalidades y el principio de tercio excluso.

⁴ Ibidem. Cfr. también KNEALE, W. & KNEALE, M.: *The Development of Logic*, II, 7.

Este análisis, realizado en el *Περὶ ἑρμηνείας*, le permite estudiar la conversión de las proposiciones modales entre sí. De esta forma se ponen los fundamentos para tratar lógicamente en pie de igualdad las proposiciones modales y las proposiciones asertóricas, lo que lleva a cabo ARISTÓTELES en su obra lógica principal, los *Primeros analíticos*.⁵ Tras dedicar varias páginas a las figuras del silogismo asertórico, ARISTÓTELES continúa con los silogismos modales en análogos términos y los expone siguiendo esquemas similares a los usados para los silogismos asertóricos.⁶ Se dividen allí los silogismos modales en ocho grupos según que las premisas sean necesarias, asertóricas o posibles, manteniendo las figuras del silogismo asertórico en cada grupo, de modo que se obtiene el siguiente cuadro:⁷

⁵ Cfr. ARISTÓTELES: *Ἀναλυτικὰ πρότερα*, A, III, 25a27-25b26.

⁶ *Ἀναλυτικὰ πρότερα*, A, VIII-XXII, 29b29-40b16.

⁷ Cfr. BOCHENSKI, I.M.: *Historia de la lógica formal*, §15, D, página 98. En el cuadro, las mayúsculas indican el modo de la proposición: necesaria (N), asertórica (A), posible (P).

Grupo	1	2	3	4	5	6	7	8
Premisa Mayor	N	N	A	P	P	A	P	N
Premisa Menor	N	A	N	P	A	P	N	P

En cada grupo, el modo de la conclusión depende tanto del modo de las premisas como de su cantidad (esto es, si son universales o particulares) y su signo (negativas o afirmativas), no cumpliéndose una de las más importantes reglas del silogismo asertórico: que la conclusión sigue siempre a la premisa más débil, puesto que un silogismo del grupo 2 y del modo *Barbara* puede tener una conclusión necesaria, como pone de relieve BOCHEŃSKI.⁸

Normalmente se entiende que la silogística de ARISTÓTELES tiene más relación con la moderna lógica de clases que con la lógica de enunciados. Esto se hace extensible al tratamiento lógico de las modalidades que el filósofo llevó a cabo. Raramente, por ejemplo, cuando ARISTÓTELES utiliza el término το ἀναγκαιόν se está refiriendo a la necesidad lógica; se trata más bien de la

⁸ Loc. cit., página 99.

necesidad ontológica o física.⁹ Si hace referencia a la necesidad lógica el término *ἀνάγκη* cuando lo usa para introducir la conclusión del silogismo, pero entonces ha de entenderse que significa "se sigue necesariamente de las premisas" o algo similar, siempre en un contexto ajeno al de la lógica modal. Su discípulo TEOFRASTO, en cambio, aunque siguió al maestro en todo lo referente a la doctrina del silogismo asertórico, consideró el modo haciendo referencia a la proposición toda y no sólo a la relación entre los términos,¹⁰ discrepando de ARISTÓTELES en lo referente al

⁹ Esta apreciación tiene cierta relación con la posterior distinción realizada por los lógicos medievales entre modalidades de *re* y modalidades de *dicto*, distinción a la que dedicaré más adelante algunas líneas.

¹⁰ En *The Development of Logic* los KNEALE piensan que ARISTÓTELES asumió de un modo no explícito en su discusión de la conversión entre las proposiciones modales que «el operador modal modifica toda la frase en la que ocurre y no solamente una palabra o una expresión dentro de la frase». Pero más adelante añaden: «ARISTÓTELES fue llevado, por tanto, a comprender que en una frase declarativa modal el operador modal constituye el predicado principal de la frase y es, por decirlo así, exterior y no interior al resto de la frase. Mantiene esta posición acerca de "es contingente" en los *Primeros Analíticos* (25b19-25) de modo que parece ser su opinión madura aunque, como veremos, se aleje de ella algunas veces». Precisamente porque no sólo se aleja de esta opinión a menudo, sino que la construcción de los silogismos modales que propone contradice esta tesis de los KNEALE, creo que la concepción de las modalidades en ARISTÓTELES es más cercana, utilizando la terminología medieval anunciada, a las modalidades de *re* que a las de *dicto*. Cfr. KNEALE, W.

sistema de oposiciones y conversiones e, incluso, a los modos de la conclusión en algunos de los grupos referidos.¹¹

También desarrolló una teoría lógica modal de las proposiciones la Stoa, y aunque no es fácil determinar hasta qué punto esta afirmación no es una extrapolación de los actuales conceptos a los antiguos, ya que la filosofía estoica, en general, y la lógica, en particular, han llegado fragmentaria e indirectamente hasta hoy, se sabe, sin embargo, que trabajaron sobre cuestiones relacionadas con los modos de verdad de las proposiciones, como lo hicieran también los megáricos, de quienes la lógica estoica fue

& KNEALE, M.: *The Development of Logic*, II, 7.

¹¹ Las teorías de TEOFRASTO sobre el silogismo modal están expuestas por ALEJANDRO DE AFRODISIA en su *In Aristotelis Analyticorum Priorum Librum I Commentarium*. Allí se simplifica notablemente la teoría aristotélica del silogismo modal a costa de hacer el sistema de TEOFRASTO incoherente, como indica BOCHENSKI en su libro *La logique de Théophraste*. Parece que TEOFRASTO mantuvo el principio de que la conclusión siempre sigue a la premisa más débil, pero aceptando silogismos en que esto no ocurre así, como quedó señalado más arriba. Seguramente, como indican los KNEALE en su libro, TEOFRASTO aceptó esta regla en un sentido débil cuando se aplicaba al silogismo modal, pero se dejó engañar por ejemplos plausibles del maestro y la ambigüedad del uso de "necesariamente" en la conclusión, una vez que TEOFRASTO opta por modalidades que afectan a toda la proposición y no a alguno de sus términos. Cfr. KNEALE, W. & KNEALE, M.: *The Development of Logic*, II, 9.

heredera. Así, por ejemplo, DIODORO CRONO definió los modos de las proposiciones apelando al carácter temporal de la verdad, de forma que se puede elaborar con tales definiciones un cuadro de oposición semejante al aristotélico presentado más arriba.¹² Estas son, haciendo uso de una variable temporal al reexponerlas, las siguientes:

1. $\lceil p \text{ es posible en } [un \text{ tiempo}] t' \rceil$ por $\lceil (p \text{ en } t') \vee \exists t(t' < t \ \& \ p \text{ en } t) \rceil$.
2. $\lceil p \text{ es imposible en } t' \rceil$ por $\lceil \sim(p \text{ en } t') \ \& \ \forall t(t' < t \rightarrow \sim(p \text{ en } t)) \rceil$.
3. $\lceil p \text{ es necesaria en } t' \rceil$ por $\lceil p \text{ en } t' \ \& \ \forall t(t' < t \rightarrow p \text{ en } t) \rceil$.
4. $\lceil p \text{ es no necesaria en } t' \rceil$ por $\lceil \sim(p \text{ en } t') \vee \exists t(t' < t \ \& \ \sim(p \text{ en } t)) \rceil$.

FILÓN DE MEGARA y CRISIPO DE ALEJANDRÍA dedicaron también parte de su obra lógica, según se conoce por

¹² Las fuentes para las definiciones diodóricas de las modalidades son CICERÓN: *De fato*, 17 y, especialmente, BOECIO: *De interpretatione*, I, 234/22-235/11. Al respecto, cfr. MATES, B.: *Lógica de los estoicos*, páginas 68ss., BOCHENSKI, I.M.: *Historia de la lógica formal*, §19, F, páginas 125-126 y KNEALE, W. & KNEALE, M.: *The Development of Logic*, III, 2.

CICERÓN, al análisis de los modos de verdad. Ambos mantuvieron que una proposición es posible sólo en el caso de que pueda ser verdadera en virtud de su naturaleza interna. Pero, como sugiere BENSON MATES, también las circunstancias externas que hacen verdadera a una proposición determinan su posibilidad, si no impiden que sea verdadera, o su necesidad, si tales circunstancias externas impiden que sea falsa.¹³ Esta misma concepción es aplicable a la lógica estoica, en general, aunque con alguna complicación más.¹⁴

El análisis anterior, junto con la relación entre modalidad y temporalidad establecida por el megárico DIODORO CRONO, supone, a mi entender, el desarrollo antiguo de la lógica modal más próximo a las actuales técnicas de interpretación lógica y uno no puede dejar de sentir una profunda admiración por la perspicacia de estos autores. A

¹³ CICERÓN: *De fato*, 12. MATES sigue un pasaje de DIÓGENES LAERCIO quien atribuye a CRISIPO esta interpretación de la necesidad y la posibilidad. Cfr. DIÓGENES LAERCIO: *Vida de filósofos ilustres*, VII, 75. Cfr. también BOECIO: *De interpretatione*, I, 234/22-235/11.

¹⁴ Cfr. KNEALE, W. & KNEALE, M.: *The Development of Logic*, III, 2.

pesar de todo, la lógica de proposiciones desarrollada por estoicos y megáricos no dio mayores frutos en el período medieval, a causa, sin duda, del desconocimiento de su obra por parte de los comentaristas. Realmente, el auge de los estudios lógicos en la Edad Media se debió principalmente a los muchos comentarios que se hicieron sobre el *órganon* aristotélico, la única fuente de la ciencia lógica durante varios siglos. La obra de un hombre a caballo entre la antigüedad y el nuevo orden político y cultural de Europa, el latino BOECIO, es extremadamente importante en tal sentido, puesto que fue este autor quien introdujo en el occidente medieval los primeros comentarios sobre la obra lógica de ARISTÓTELES. A través de sus traducciones latinas de las *Categoriae* y del *De interpretatione* llegaron a los filósofos medievales los únicos textos aristotélicos que realmente estuvieron a su alcance.¹⁵ Sus comentarios a las diferentes obras del filósofo fueron estudiados en la Edad Media y sirvieron de base para la mayoría de los tratados de lógica. Así, en el tratado *De syllogismo hypothetico*, BOECIO

¹⁵ Parece ser que BOECIO tradujo también los *Primeros Analíticos*, los *Tópicos* y el *De sophisticis elenchis*, aunque estos textos no parece que circularan en igual medida que los anteriormente mencionados. Cfr. KNEALE, W. & KNEALE, M.: *The Development of Logic*, capítulo IV.

no sólo trata los silogismos hipotéticos, como ya hiciera anteriormente con los categóricos, sino que también, muy influido por la lógica proposicional de los estoicos, expone su teoría sobre las proposiciones modales (*cum modo*). En ella establece dos grupos de tres proposiciones cada uno y expone diversos teoremas al respecto, relacionados con la oposición y la conversión de las proposiciones modales. Además, como se ha visto, en su comentario al *Περὶ ἑρμηνείας* revisó también las teorías de otras escuelas, como es el caso de la estoica y la megárica.

Aunque quizás lo más interesante para conocer el tratamiento que los filósofos medievales dieron a la lógica modal sea revisar el *Opusculum de propositionibus modalibus* de TOMÁS DE AQUINO, donde el santo trata las diferencias entre las proposiciones de *inesse* y las modales, relacionándolas con la división de los juicios hecha por el de Stagira, creo que merece la pena tratar antes la más famosa discusión medieval sobre cuestiones de lógica modal, protagonizada seguramente por ANSELMO DE CANTERBURY y su argumento en favor de la existencia de Dios. En el *Liber Apologeticus contra Gaunilonem respondentem pro insipiente*, en el que respondía a las críticas hechas por el abate Gaunilón al argumento expuesto en el *Proslogium*, ANSELMO

recurre al carácter necesario que acompaña a la idea de Dios para evitar la comparación con la fabulosa isla perdida de que habla el monje de Marmoutier. Razona diciendo que si Dios es *posible* -es decir: si la idea de un ser totalmente perfecto y necesario es posible- entonces Dios existe y negarlo sería incurrir en contradicción, haciendo depender toda la fuerza de su argumentación de los conceptos de necesidad y posibilidad.¹⁶

La distinción entre modalidades *de re* y modalidades *de dicto* es, sin lugar a dudas, el logro más importante de los lógicos medievales en este terreno. ARISTÓTELES había tratado en su obra las modalidades siempre como modalidades *de re* (acerca del objeto), pudiéndose interpretar raramente

¹⁶ Este argumento se podría formalizar en el lenguaje objeto, que será descrito más adelante, del siguiente modo:

$$\Diamond \Box \alpha \rightarrow \alpha.$$

Como se verá con posterioridad, esta fórmula es un teorema del sistema S5 de LEWIS. ANSELMO niega contra Gaunilón que el Ser necesario sea meramente posible (contingente), lo que se podría formalizar así:

$$\Box \alpha \wedge \Diamond (\alpha \vee \neg \alpha).$$

Este enunciado no es absurdo, sino que tiene un modelo; precisamente cuando $v(\alpha, \mu_1) = 1$. Es decir, que el enunciado del *insipiens* es verdadero precisamente cuando Dios existe, de donde se sigue lo contradictorio de negar su existencia, si se admite su posibilidad. Cfr. *Obras completas de San Anselmo*, editorial católica, B.A.C., Madrid, 1952, páginas 407-437.

que en algún texto el filósofo trate acerca de las modalidades de *dicto* (acerca de la proposición). Fue por lo tanto un acontecimiento importante en la lógica medieval, dedicada casi exclusivamente al comentario del *órganon* aristotélico, la aparición de esta distinción, que, como queda reseñado, estaba latente en las posiciones de TEOFRASTO frente a la teoría aristotélica del silogismo modal. A este respecto es muy interesante la obra de TOMÁS DE AQUINO antes reseñada y, en concreto, el siguiente texto:¹⁷

«De las sentencias modales, unas son acerca del *dictum*; otras, acerca de la cosa. Las sentencias modales acerca del *dictum* son aquellas en las que el *dictum* entero es sujeto y el modo predicado [...]. Una sentencia modal acerca de la cosa se da cuando se

¹⁷ TOMÁS DE AQUINO: *Opusculum de propositionibus modalibus*, 5-16. Sigo la traducción que aparece en la edición española del libro de BOCHENSKI, páginas 195-196. Cfr. también PEDRO ABELARDO: *Dialectica*, p. 206; WILLIAM OF SHYRESWOOD: *Introductiones in logicam*, 40, 10ss.; PEDRO HISPANO: *Summulae logicae*, 1.28 y WILLIAM OCKHAM: *Summa totius logicae*, I 7, 11-13; 82ss. Aunque la terminología no es la misma en los autores más antiguos (ABELARDO habla de *expositio de sensu* y *expositio de rebus* o también de *expositio per compositionem* y *expositio per divisionem* y SHYRESWOOD de *modi secundum constructionem* y *secundum rem*), todos están haciendo referencia a la misma distinción entre modalidades de *dicto* y modalidades de *re*.

coloca el modo dentro del *dictum* [...]. Y se ha de saber que todas las sentencias modales acerca del *dictum* son singulares, porque en ellas el modo se propone de este o aquel proceso como de un singular. La sentencia modal acerca de la cosa se concibe, en cambio, como universal, particular, singular o indefinida, según el sujeto del *dictum*, como en las sentencias asertóricas [...]. Se ha de saber también que se llama afirmativa o negativa a una sentencia modal según la afirmación o negación del modo y no según la afirmación o negación del *dictum*».

TOMÁS DE AQUINO distingue por tanto entre dos tipos diferentes de sentencias modales según el lugar que ocupe la palabra que introduce el modo en la frase. Antes, había definido el modo como «una determinación de la cosa», pero con la precaución de establecer tres clases distintas: el modo que determina al sujeto de la sentencia, el que determina al predicado y un tercero que determina a la composición del predicado con el sujeto. Este último es el que da lugar a las sentencias modales propiamente dichas, puesto que los otros dos dan lugar a sentencias de *inesse*. Esta misma concepción se encuentra también en ALBERTO MAGNO¹⁸

¹⁸ ALBERTO MAGNO: *Librum I Priorum Analyticorum*.

y la mayoría de los autores de la época. Así, en el PSEUDO-Escoto se pueden encontrar dos sistemas de silogística modal, uno de sentencias modales en sentido compuesto (*de dicto*) y otro en sentido dividido (*de re*).¹⁹ WILLIAM OCKHAM va aún más allá y propone un sistema silogístico mixto en el que las sentencias modales puedan ser tanto *de re* como *de dicto*, con lo que amplía cuantiosamente el ya grande número de formas propias del silogismo modal.²⁰

¹⁹ Los comentarios anónimos *In universam logicam quaestiones*, conocidos como el PSEUDO-ESCOTO por haber sido atribuidos primeramente a DUNS ESCOTO, añaden una novedad interesante a la concepción medieval de la modalidad. Según el autor de esta obra, además de los cuatro modos habituales también son modos de la frase "verdadero" y "falso", modos que nombra TOMÁS DE AQUINO en un texto algo anterior al aducido más arriba, aunque para rechazarlos, diciendo: «Ahora bien, los modos que determinan la composición son seis: "verdadero", "falso", "necesario", "posible", "imposible" y "contingente". Sin embargo, "verdadero" y "falso" no añaden nada a la significación de la sentencia asertórica [...]. Con los otros cuatro modos no sucede esto, [...] por lo cual vamos a dejar de lado "verdadero" y "falso" y vamos a considerar los otros cuatro». (Cfr. TOMÁS DE AQUINO: *Opusculum de propositionibus modalibus*, 5-16). Pero no se detiene ahí el PSEUDO-ESCOTO, sino que añade a los anteriores los modos subjetivos "por sí", "dudoso", "sabido", "creído", "conocido", "aparente", "querido" y "preferido", prefigurando un concepto de las modalidades que no se ha repetido hasta el siglo XX. Cfr. *In librum I Priorum Analyticorum Aristotelis Quaestiones*, 25, 5ss., en DUNS ESCOTO: *Opera Omnia*.

²⁰ Cf. WILLIAM OCKHAM: *Summa totius logicae*, parte III.

§2. Las modalidades en la lógica matemática. Los sistemas de Lewis y la semántica de los mundos posibles.

Este amplio interés por la lógica modal en la Edad Media no tiene, sin embargo, contrapartida en los siglos posteriores. Es difícil encontrar autores que traten las modalidades en un sentido lógico. La obra lógica más representativa desde el Renacimiento hasta el siglo XIX, la *Lógica de Port Royal*,²¹ que sirvió como modelo al resto de las obras sobre lógica aparecidas con posterioridad y que se consideró durante dos siglos como el manual oficial de lógica clásica, no trata para nada el silogismo modal, cifrándose por su contenido a las materias que ARISTÓTELES trató en las *Categorías*, *Sobre la interpretación* y los siete primeros capítulos del libro uno de los *Primeros Analíticos*.

También OCKHAM, como el PSEUDO-ESCOTO y quizás influido por éste, habla de *modos subjetivos*, incluyéndolos en algunos de sus silogismos.

²¹ NICOLE, P. & ARNAULT, A.: *Logique ou l'art de penser*, obra mejor conocida por la *Logique du Port Royal* y editada por vez primera en 1662.

Una ruptura tan tajante en ciertos aspectos con el saber y la ciencia desarrollados en la Edad Media explica que los grandes pensadores del XVII, el XVIII y gran parte del XIX, como dice BOCHENSKI, fueran, por lo que a la lógica respecta, sencillamente unos ignorantes, con la excepción de LEIBNIZ, a quien muchos consideran el padre de la actual lógica matemática. Sin embargo, la obra lógica de LEIBNIZ permaneció desconocida en su mayor parte hasta el final del siglo XIX, por lo que no influyó decisivamente en el desarrollo posterior de esta ciencia.

Sí lo hicieron, en cambio, PEANO y FREGE -este último con cierto retraso pero grandemente a través de RUSSELL-, autores que no trataron la modalidad en sus obras puesto que estaban más interesados por el lenguaje de la aritmética y de las matemáticas en general. Hay, sin embargo, un lógico que, indirectamente, introduce la modalidad en su sistema dos años antes del *Begriffsschrift* de FREGE. HUGH MACCOLL publicó en el año 1877 en las actas de la sociedad londinense de matemáticas un trabajo sobre lógica de enunciados (que en muchos aspectos se adelantó a los trabajos de FREGE) en el que, al definir el concepto de

inconsistencia, apela a la noción de posibilidad.²² Más tarde,²³ esto daría lugar a consideraciones más amplias sobre una lógica modal de las que sin duda obtuvo algún provecho C.I. LEWIS, quien es el verdadero fundador de la moderna lógica de las modalidades.²⁴

El principal interés de LEWIS cuando inició sus investigaciones sobre las modalidades era evitar las denominadas *paradojas de la implicación material* que, a su juicio, entorpecían los brillantes resultados obtenidos por el sistema de RUSSELL. El concepto de implicación material ya había sido expresamente rechazado (o al menos deslindado en la propia notación) en la obra de MACCOLL.²⁵ Pero MACCOLL

²² MACCOLL, H.: "The calculus of equivalent statements and integration limits" en *Proceedings of the London Mathematics Society*, 9 (1877/78), pp. 9-20 y 177-186.

²³ MACCOLL H.: *Symbolic Logic and its Applications*, de 1906.

²⁴ Cfr. LEWIS, C.I.: *A Survey of Symbolic Logic*, página 292, donde el autor reconoce su deuda con MACCOLL, y página 293, donde da una definición de consistencia en función del operador de imposibilidad de forma similar a lo que hiciera éste.

²⁵ En *Symbolic Logic and Its Applications*, MACCOLL niega que una implicación del tipo -y aquí sigo la notación que le atribuyen HUGHES & CRESSWELL en *Introducción a la lógica modal*- $(A:B)$ sea equivalente a la disyunción $(A'+B)$. Introduce dos símbolos ϵ y η (por "necesario" e "imposible", respectivamente) tales que $(A:B) = (A'+B)^{\epsilon} = (A \cdot B')^{\eta}$. De modo

no contaba con el poderoso instrumento que supuso el establecimiento de un sistema axiomático para la lógica en *Principia Mathematica*. LEWIS, en cambio, sí y ya desde 1912 mostró su inconformidad con la noción de implicación material allí usada. Las paradojas de la implicación ponían al descubierto, según LEWIS, la artificialidad de dicha noción, por lo que se propuso en varios artículos el desarrollo de una lógica axiomática en la que la implicación tuviese otro sentido, más fuerte y más natural a la vez, que aquél de la obra de RUSSELL. LEWIS no pretendía construir un sistema lógico sobre la base del rechazo de las tesis $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ y $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$, sino sobre otro concepto diferente de implicación del que no pudieran derivarse dichos teoremas, esto es: sobre el concepto de implicación estricta.

Con *A Survey of Symbolic Logic* C.I. LEWIS desarrolló una teoría lógica de la implicación estricta que desembocó en la formalización del sistema de las modalidades clásicas. Más tarde, en colaboración con C.H. LANGFORD, escribió un segundo libro escuetamente titulado *Symbolic Logic* en el que

que se tiene que un enunciado del tipo «A implica B» es equivalente a «Es necesario que no A o que B» y a «Es imposible que A y que no B».

se utiliza un lenguaje con variables proposicionales p , q , r , etcétera y como símbolos primitivos los signos $\sim$ para la negación, $\cdot$ para la conjunción y $\Diamond$ para la posibilidad, definiéndose a partir de ellos el signo $\rightarrow$ de modo que

$$(p \rightarrow q) =_{\text{def.}} \sim \Diamond (p \cdot \sim q).$$

El núcleo de la obra lo constituye el sistema lógico de *A Survey of Symbolic Logic*, a partir del cual se desarrollan dos sistemas más, menos fuertes que el primero. Ambos sistemas se conocen como S1 y S2, en tanto que el sistema primitivo de *A Survey of Symbolic Logic* es conocido como S3, apareciendo en un apéndice de la obra junto a otros dos sistemas (S4 y S5) obtenidos a partir de las observaciones de O. BECKER acerca de la reducción de las modalidades de *A Survey of Symbolic Logic*.²⁶ Las siguientes son las bases

²⁶ Cfr. BECKER, O.: "Zur Logik der Modalitäten". BECKER propuso dos principios de reducción para evitar la proliferación indefinida de modalidades en el sistema de LEWIS y aunque éste siempre abogó en favor de los sistemas sin los principios de reducción, sin embargo los introdujo en *Symbolic Logic* como los axiomas que más adelante se denominan [S4.1] y [S4.2]. Más tarde, J.C. MCKINSEY y W.T. PARRY darían algunas pruebas sobre las reducciones de las modalidades en los sistemas de LEWIS. Cfr. MCKINSEY J.C.: "A Reduction in the Number of Postulates for C.I. Lewis' System of Strict Implication" y "Proof that there are Infinitely

axiomáticas de los sistemas de LEWIS.

SISTEMA S1:

AXIOMAS²⁷

- [S1.1]: $(p \cdot q) \rightarrow (q \cdot p)$
 [S1.2]: $(p \cdot q) \rightarrow p$
 [S1.3]: $p \rightarrow (p \cdot p)$
 [S1.4]: $((p \cdot q) \cdot r) \rightarrow (p \cdot (q \cdot r))$
 [S1.5]: $p \rightarrow \sim \sim p$
 [S1.6]: $((p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
 [S1.7]: $(p \cdot (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

Many Modalities in Lewis' System S2", así como PARRY, W.T.: "The Postulates for 'Strict Implication'" y "Modalities in the Survey System of Strict Implication".

²⁷ Los siguientes axiomas están numerados de forma convencional, no como los numerara LEWIS en *Symbolic Logic* (B1-B7). Aparecen también allí otros dos axiomas de los que el primero es el que más adelante de denomina [S2.1] y el segundo el extraño axioma

$$B9: (\exists p, q)(\sim(p \rightarrow q) \cdot \sim(p \rightarrow \sim q))$$

que LEWIS incluyó probablemente para evitar una interpretación del signo $\rightarrow$ que lo asimilara a la implicación material en la regla de *Modus Ponens*. Por otra parte, el axioma [S1.5] no es independiente del resto de la base axiomática, como demostrara MCKINSEY en su artículo "A Reduction in the Number of Postulates for C.I. Lewis' System of Strict Implication", por lo que se puede prescindir de él.

REGLAS

- (Adj.): $\vdash \alpha, \vdash \beta \rightarrow \vdash (\alpha \cdot \beta)$
- (MP): $\vdash \alpha, \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \vdash \beta$
- (SU): $\vdash \alpha(p) \rightarrow \vdash \alpha(q/p)$, donde p y q son dos fbfs. cualesquiera y q sustituye uniformemente todas las apariciones de p en α .
- (TI): Si $\vdash \alpha$ y β difiere de α solamente en que donde en α aparece la fbf. γ en β aparece la fbf. δ y si $\vdash (\gamma \rightarrow \delta) \cdot (\delta \rightarrow \gamma)$ entonces $\vdash \beta$

S1 contiene el sistema de *Principia Mathematica* de modo que no era necesario adoptarlo como base. Por el contrario, LEWIS pretendió de esta forma confeccionar un sistema lógico más potente que el de *Principia Mathematica* y a la vez más riguroso por lo que al concepto de implicación se refería. Las bases axiomáticas para los restantes sistemas de LEWIS se obtienen a partir de S1 añadiéndole, en cada caso, uno de los siguientes axiomas:²⁸

$$[S2.1]: \quad \Diamond(p \cdot q) \rightarrow \Diamond p$$

²⁸ De todos los sistemas de LEWIS, S5 es el más fuerte puesto que contiene a los demás. En realidad, se puede demostrar fácilmente que $S1 \subset S2 \subset S3 \subset S4 \subset S5$.

$$[S3.1]: \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim \Diamond q \rightarrow \sim \Diamond p)$$

$$[S4.1]: \quad \sim \Diamond \sim p \rightarrow \sim \Diamond \sim \Diamond \sim p$$

$$[S5.1]: \quad \Diamond p \rightarrow \sim \Diamond \sim \Diamond p$$

La interpretación del signo $\rightarrow$ como la necesidad de la implicación material se debe al propio LEWIS, quien pensaba que $p \rightarrow q$ se satisface en el sistema cuando $p \supset q$ es una tautología. Pero esta interpretación, que se contradice incluso con el mismo desarrollo axiomático de LEWIS, no ofrecía el resultado que él mismo pretendía, sino que era algo asumido por los lógicos desde FREGE: la necesidad lógica entendida como validez lógica. Sería el tratamiento que GÖDEL hiciera en 1932 de un sistema equiparable a S4 el que daría la verdadera dimensión de lo que hoy se entiende por un sistema de lógica modal.²⁹ GÖDEL propuso el sistema S4 sobre una base axiomática de *Principia Mathematica* más los axiomas:

$$1. \quad \Box p \supset p$$

$$2. \quad \Box p \supset (\Box (p \supset q) \supset \Box q)$$

²⁹ Cfr. GÖDEL, K.: "Una interpretación del cálculo conectivo intuicionista" en *Obras completas*, Alianza Editorial, Madrid, 1981, pp.: 115-116.

3. $\Box p \rightarrow \Box \Box p$

y la regla (N): $\vdash \alpha \rightarrow \vdash \Box \alpha$. GÖDEL no utilizó el operador $\Box$ (que en los sistemas de LEWIS puede definirse como $\sim \Diamond \sim$), sino la letra B por *Beweisbar* (demostrable). Con todo, presentó S4 de una forma simple y elegante que se ha adoptado con posterioridad frente a la base axiomática de LEWIS. Indirectamente, también relaciona las modalidades con lo que podríamos llamar *lógica epistémica*. Con posterioridad, VON WRIGHT propondría explícitamente interpretar el operador $\Box$ como "se sabe que", inaugurando una corriente dentro de la lógica modal muy importante por sus consecuencias lógicas y filosóficas.³⁰

En sus comienzos, por tanto, la lógica modal moderna estuvo marcada por los diferentes tratamientos axiomáticos que partían de los sistemas desarrollados por LEWIS y LANGFORD. El estudio semántico de las modalidades, en

³⁰ Cfr. VON WRIGHT, G.H.: *An Essay in Modal Logic*, publicado en 1951. Allí propone la consideración de diversos tipos de modalidad: la alética (de la necesidad), la epistémica (del conocimiento), la deóntica (de la obligación) y la existencial (la clásica cuantificación sobre un dominio). Del mismo año es su artículo "Deontic Logic", que inaugura la moderna lógica deóntica.

cambio, no se desarrollaría hasta algunas décadas después, cuando los fundamentos de la teoría de modelos estuvieron suficientemente consolidados. En este sentido, la obra de R. CARNAP *Meaning and Necessity*, en la que el filósofo centroeuropeo desarrolla una teoría conjunta de la necesidad física y la necesidad lógica, marcó un hito importante.³¹ En esta obra se encuentra el origen de la denominada *semántica de los mundos posibles*, desarrollada en sus aspectos de teoría de modelos por el lógico S. KRIPKE, quien sin duda se inspira en las reflexiones de filosofía de la lógica tejidas por CARNAP en torno al concepto *state of affairs*. En síntesis, para KRIPKE un modelo para una fórmula bien formada α es una función $\Phi(P,H)$ cuyos argumentos son el conjunto de las subfórmulas atómicas de α , P , y un mundo o conjunto modelo cualquiera H , tal que $H \in K$, asociada a una estructura modelo $\langle G,K,R \rangle$, donde G es un conjunto modelo cualquiera, K un conjunto de conjuntos modelos y R una relación llamada de alternatividad. El rango de la función Φ es el conjunto $\{V,F\}$.³²

³¹ La primera edición es de 1947 y la segunda y definitiva del año 1956.

³² Cfr. KRIPKE, S.: "Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi" y "Semantical Analysis

A partir de aquí, la semántica de los mundos posibles fundada en las estructuras modelos kripkeanas ha conformado los fundamentos de la actual investigación semántica de multitud de lógicas no clásicas. En este sentido, importante ha sido también el tratamiento que de la semántica de los mundos posibles hiciera JAAKKO HINTIKKA referido a la lógica epistémica y a la lógica doxástica (o de la creencia) en su libro *Knowledge and Belief*. El concepto de conjunto modelo, emparentado con los trabajos de E.W. BETT sobre la decisión en lógica clásica de predicados, ha abierto nuevas perspectivas para el desarrollo semántico de las lógicas modales, en general. Sin duda, una parte importante de la literatura filosófica referida a cuestiones de metodología y teoría de la referencia y del significado ha abogado el tratamiento de la semántica de las modalidades por lo que la interpretación de éstas aporta al ámbito de la metodología y la epistemología.

of Modal Logic II: Non-Normal Modal Propositional Calculi". También es interesante confrontar algunos aspectos de su libro *Naming and Necessity* con el de CARNAP, aunque se trata de una obra posterior.

CAPÍTULO DOS:

LA SEMÁNTICA DE LOS MUNDOS POSIBLES.

§3. Los problemas de la intensionalidad.

Habr  de entenderse por enunciado en este trabajo de investigación, siempre que no se diga lo contrario, cualquier fórmula bien formada del lenguaje objeto; es decir: cualquier serie finita de signos del lenguaje objeto construida según las reglas de formación habituales. En este caso, los signos del lenguaje objeto son los propios de la lógica de predicados de primer orden a los que se añaden algunos operadores más, cuyo uso es similar al de los cuantificadores, y que llamar  operadores modales, representados por los signos $\Box$ (para la necesidad) y $\Diamond$ (para la posibilidad). Su válida combinatoria a la hora de construir las fórmulas va a ser aquí la usual en la lógica de predicados de primer orden con identidad, con la única salvedad de la adición de los operadores modales antes mencionados. Los signos del lenguaje objeto serán, por tanto, las letras predicativas mayúsculas Q, R, S, T , con la

posibilidad de aumentar su número en caso de necesidad añadiendo a su derecha uno o más apóstrofes; las letras variables individuales minúsculas x , y , z , con la posibilidad de aumentar su número mediante la adición de subíndices; las letras constantes individuales minúsculas a , b , c , también susceptibles de llevar subíndices; los signos constantes lógicos tradicionales $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$; los operadores cuantificacionales $\wedge$ y $\vee$ y los operadores modales $\Box$ y $\Diamond$. El uso de los paréntesis es también el habitual en los tratados de lógica. Usaré además como signos metalingüísticos las letras griegas minúsculas α , β , γ , δ , que pueden multiplicarse añadiéndoles apóstrofes según las necesidades, acompañadas o no por letras constantes o variables individuales entre paréntesis; las primeras indican cualesquiera fórmulas y las segundas, constantes o variables que aparecen en ellas. Así, por ejemplo, $\alpha(a)$, $\beta(x,y)$ o $\gamma(x,b)$ son esquemas de fórmulas o enunciados metalingüísticos que las sustituyen.³³ Un enunciado modal será, entonces, aquél cuyo valor de verdad sea una función de los signos constantes lógicos más los operadores

³³ Una definición más rigurosa del concepto de fórmula se dará en el próximo capítulo, §6, definición 6.1.

cuantificacionales más los operadores modales. De esta forma, el enunciado³⁴

$$(1) \quad \neg \Diamond \forall x (Qx \wedge \neg Qx)$$

puede leerse en lenguaje natural: «no es posible que haya un individuo que sea y no sea *algo* a la vez». O el enunciado

$$(2) \quad \Box \forall xy ((Rxy \vee x=y) \rightarrow Ryx)$$

se puede leer: «es necesario que para cualesquiera dos individuos, si el uno mantiene una determinada relación con el otro o ambos son el mismo individuo entonces el segundo mantiene esa misma relación con el primero».

Las modalidades plantean graves problemas al proyecto lógico tradicional que de algún modo puede verse representado por la obra de lógicos como WILLARD VAN ORMAN

³⁴ En este capítulo me referiré siempre a las fórmulas del lenguaje como enunciados puesto que para la argumentación pertinente éstas sólo aparecen como formalizaciones de algún enunciado del lenguaje natural.

QUINE y DONALD DAVIDSON.³⁵ En general, dos principios importantes de la lógica cuales son los de Sustituibilidad de la Identidad (SI) y Generalización Existencial (GE) no parecen ser operativos en contextos modales.³⁶ Y en particular, por lo que se refiere a la lógica deóntica, no es fácil considerar verdaderos o falsos los enunciados normativos, lo que supone que no se vea claramente la posibilidad de tratarlos desde un punto de vista lógico-formal, siempre que haya que atenerse a la concepción clásica de la ciencia lógica, heredada de aquellos que a

³⁵ «Existe una persistente corriente subterránea en gran parte de la moderna lógica al efecto de que la lógica de primer orden es de alguna manera definitiva, de que nada es verdaderamente inteligible a menos que se lo presente en forma de lógica de primer orden. Este punto de vista ha sido defendido por QUINE y por DAVIDSON, entre otros (en palabras de SUSAN HAACK, para QUINE "la extensionalidad es la piedra de toque de la inteligibilidad" -siendo el caso que la lógica de primer orden es extensional, mientras que las lógicas modales no lo son»). Cfr. A. GALTON: "Temporal Logics and Computer Science: An Overview" en A. GALTON (ed.): *Temporal Logics and Their Applications*, página 8.

³⁶ Ambos principios se pueden enunciar como sigue:

(SI): $\alpha(a), (a=b) \models \alpha(b)$. Esto es: dados dos términos a y b tales que a es igual a b , la sustitución de lo uno por el otro en un enunciado verdadero no supondrá nunca que el enunciado se vuelva falso ni viceversa.

(GE): $\alpha(a) \models \forall x\alpha(x)$. Es decir: si es verdad que un individuo concreto tiene una propiedad cualquiera entonces también lo es que hay al menos un individuo que tiene esa propiedad.

principios de siglo pusieron sus fundamentos.

Antes de comenzar a hacer matizaciones, se puede decir que en los contextos modales el Principio de extensionalidad (que es fundamental en la evaluación de los enunciados de la *gramática normada* que propone QUINE, elemento principal de la concepción lógica subyacente a sus "New Foundations") no es válido.³⁷ De aquí que, por oposición a aquellos lenguajes formales en los que sí es válido, los que incluyen operadores de modalidad sean considerados lenguajes intensionales. Esta circunstancia propicia que en contextos de este tipo aparezcan problemas de valoración y cuantificación de variables individuales, lo que da pie a que los principios (SI) y (GE) no sean operativos. Unos ejemplos serán suficientes para comprender el problema.

Tomando como referencia la oración «Juan cree que Larra fue un escritor español del siglo XIX» y suponiendo que sea cierto lo que declara, se puede pensar con sentido que es posible sustituir en la oración el nombre "Larra" por el pseudónimo bajo el que ese escritor solía escribir sus

³⁷ Cfr. QUINE, W.V.O.: *Philosophy of Logic*.

artículos, "Figaro", sin que el valor de verdad de la oración se vea modificado; o lo que es lo mismo, que se pueden sustituir dos términos que son coextensivos, ya que tienen un mismo y único referente, el uno por el otro *salva veritate*. Sin embargo, esto no es así. Basta reflexionar un poco para caer en la cuenta de que si Juan no conociese el pseudónimo del romántico Larra o pensase que Figaro es sólo el nombre de un célebre barbero sevillano, la oración resultante tras la sustitución, esto es, la oración «Juan cree que Figaro fue un escritor español del siglo XIX», dejaría de ser verdadera. En efecto, la creencia es uno de esos conceptos que introducen en nuestro lenguaje la intensionalidad.

Con la necesidad y la posibilidad pasa exactamente lo mismo. Sea por ejemplo el enunciado

(3) «Necesariamente 40 es menor que 41»,³⁸

donde las cifras "40" y "41" pueden tomarse como los nombres

³⁸ Para mayor claridad en la exposición considero que la cadena literal que aparece entre comillas francesas es el nombre del enunciado correspondiente del lenguaje objeto.

de dos números, no como los números mismos. Se trata de una verdad trivial de la aritmética que no plantea más problemas. También es verdadero el enunciado

- (4) «El número de años transcurridos desde la primera publicación de la novela *La vida breve* es 40».

Pero si se sustituye en (3) el término "40" por el término "el número de años...", lo que es posible ya que ambos tienen el mismo referente, se obtiene el siguiente enunciado:

- (5) «Necesariamente el número de años transcurridos desde la primera publicación de la novela *La vida breve* es menor que 41»,

que es a todas luces falso, puesto que dentro de dos hará cuarenta y dos años de la primera edición de esta gran novela de Juan Carlos Onetti, inexorablemente.

Al igual que el principio (SI) fallaba en los ejemplos anteriores, el principio (GE) lo hace en el siguiente. Sea el enunciado perteneciente al lenguaje objeto

$$(6) \quad Qa \wedge (a=9) \wedge \hat{O}(a>9).$$

Si éste es un enunciado verdadero entonces el enunciado (7) debe serlo también, pues ha sido obtenido a partir de (6) por generalización existencial:

$$(7) \quad \forall x (Qx \wedge (x=9) \wedge \hat{O}(x>9)).$$

Pero si se interpretan (6) y (7) respectivamente como los enunciados

(6') «El número de los planetas es igual a nueve, pero puede ser mayor»

(7') «Hay un número que es igual a nueve y que puede ser mayor que nueve»

se observa cuán lejos de la verdad está (7').

El fallo de estos dos principios (en realidad el fallo del principio de extensionalidad) supone la revisión de la semántica lógica que sigue los planteamientos más clásicos, si lo que se pretende es incluir las modalidades en el ámbito de los lenguajes formales. También el carácter no

declarativo de determinados conceptos modales supone la revisión de la semántica lógica tradicional, en particular de la noción de verdad lógica. Este es el caso de los conceptos normativos. Los enunciados propios de la lógica deóntica, es decir, aquellos enunciados que incluyen conceptos normativos, no son realmente ni verdaderos ni falsos, según el sentido que al término *verdad* suele dársele en lógica. En efecto, uno se inclina con facilidad a decir que el enunciado

(8) «Si es necesario que α entonces es el caso que α »

es verdadero. Pero ¿qué se puede decir del enunciado análogo

(9) «Si es obligatorio que α entonces es el caso que α »?

Si se piensa de él que es verdadero -o falso- en seguida uno se da cuenta de que lo es de forma diferente o por diverso motivo que (8); aunque lo normal será considerarlo al margen de cualquier posible valor de verdad. Pero entonces, ¿cómo se puede interpretar un enunciado normativo desde un punto de vista lógico? Es factible pensar en la posibilidad de sustituir en este caso los valores de verdad tradicionales

por otros valores como, por ejemplo, el par "bueno/malo". Sin embargo esto, desde una perspectiva estrictamente lógica, no supone ninguna ganancia con respecto a la situación anterior (simplemente habría dos fórmulas distintas para hablar de la *verdad* de un enunciado) y sí una evidente pérdida de claridad y simplicidad, además de los problemas filosóficos que introduciría en nuestro análisis un supuesto *valor de bondad*.

El lógico escandinavo JØRGEN JØRGENSEN ha propuesto en este sentido un célebre dilema que es necesario plantear llegados a este punto.³⁹ Resumidamente, el dilema de Jørgensen establece que o bien se mantiene la concepción clásica de la ciencia lógica según la cual ésta sólo trataría con enunciados a los que conviniese el ser verdaderos o falsos, descartando así como objeto suyo aquellos enunciados cuyo valor no sea una función de verdad de sus componentes lógicos pertinentes, o bien se considera a estos últimos objeto legítimo de la lógica y es menester que la concepción clásica sea modificada. Precisamente

³⁹ Cfr. JØRGENSEN, J.: "Imperatives and Logic" y KALINOWSKI, G.: *La logique des normes*, pp.: 58-59.

entiendo que a este toro hay que cogerlo por el segundo de sus cuernos para evitar los recortes fastidiosos que resultarían de desterrar todos aquellos conceptos que no encuentran su sitio en la ciencia lógica normal si lo agarramos por el primero. Y precisamente, también, ésta es la finalidad última del presente trabajo de investigación: extender la lógica clásica de predicados de primer orden al ámbito de las modalidades, sus capacidades y sus métodos, sin que esta ampliación sea traumática.

§4. Mundos posibles y semántica.

El uso normal que se hace en español de giros lingüísticos como "es necesario que" o "es posible que" suele ir acompañado de una imagen mental de la realidad con pretensiones de totalidad. *Grosso modo*, un hablante español tenderá a expresar su convicción de que algo siempre ha sido, es y será de una determinada factura, ocurra lo que ocurra con el resto del mundo, asertando su necesidad; y dirá que es posible aquello que, ocurra o no, es compatible con *esa misma realidad* que concibe como un todo.

El traslado de los términos "necesario" y "posible" a

la lógica supone también trasladar su significado del modo más preciso que se pueda. Uno de los resultados de esta mudanza desde la semántica natural hasta la semántica extensional de los lenguajes formales es lo que se ha dado en llamar semántica de los mundos posibles, nombre bajo el que se conocen los desarrollos de la lógica modal en el terreno del significado realizados entre los años 50 y 60 de forma más o menos concertada por varios autores entre los que destacan RUDOLF CARNAP, RICHARD MONTAGUE, SAUL KRIPKE, STIG KANGER y JAAKKO HINTIKKA.⁴⁰ Aunque la semántica de los mundos posibles se halla muy alejada de lo que tradicionalmente se entiende por metafísica, la deuda con la filosofía de LEIBNIZ y con la teoría de la figuración de WITTGENSTEIN es evidente; uno no se encuentra aquí ante una

⁴⁰ Este método de análisis semántico, cuya noción principal es la de mundo posible, ha tenido una fuerte implantación entre los lógicos escandinavos y anglosajones, principalmente, a mi entender, a causa de tres acontecimientos importantes. En primer lugar el hito que supuso para la filosofía del empirismo lógico la aparición en 1947 de la obra de R. CARNAP *Meaning and Necessity* y el uso lógico que allí se dio al concepto metafísico estado de cosas (*state of affairs*); en segundo lugar, la obra de R. MONTAGUE y el énfasis que sobre la semántica de los mundos posibles como piedra angular de su teoría del lenguaje y como herramienta de análisis filosófico puso en 1957; y finalmente, tampoco hay que considerar extraño a este proceso el desarrollo en los últimos tiempos de la teoría matemática de modelos.

simple coincidencia fraseológica, como puede comprobarse en el siguiente texto de *Meaning and Necessity*:

«Una clase de sentencias de S_1 que contenga para cada sentencia atómica o esta sentencia o su negación, pero no ambas, y ninguna otra sentencia, se llama una descripción del estado (*state-description*) de S_1 , porque obviamente da una descripción completa de un estado posible del universo de los individuos con respecto a todas las propiedades y relaciones expresadas por los predicados del sistema. Así las descripciones de estados representan los mundos posibles de Leibniz o los posibles estados de cosas de Wittgenstein». ⁴¹

El propio CARNAP reconoce pues esta deuda, por lo que a él concierne, y como sin duda su obra está en la base de la teoría semántica de los mundos posibles es lícito establecer una relación estrecha entre ésta y las teorías metafísicas antes mencionadas. De hecho, la proximidad entre los conceptos "estado de cosas" y "mundo posible" se entiende bien a través del pasaje citado. Intuitivamente ambos términos son sinónimos; su referente común es una

⁴¹ R. CARNAP: *Meaning and Necessity*, página 9.

determinada descripción del mundo, puesto que los dos indican un curso concreto de acontecimientos y hechos que tiene como elementos los objetos del discurso y al que hacen referencia los enunciados del mismo. De este modo se puede decir, por ejemplo, que la fantástica *Descripción del mundo* de Marco Polo y la rigurosa *Historia de la decadencia y ruina del imperio romano* de Edward Gibbon describen sendos mundos posibles, al igual que lo hacen Lewis Carroll en *Alicia a través del espejo* e Isaac Newton en sus *Principia Mathematica*. También puede decirse de diversas teorías matemáticas que describen diferentes mundos posibles: por ejemplo, los postulados y teoremas de la geometría de Euclides describen un mundo posible distinto del que retratan los de la geometría de Bolyai János.

La concepción *metafísica* de los mundos posibles debe precisarse, restringiéndola a límites propios de la lógica para que se adecúe más a los propósitos que ha de servir. El concepto "*complete novel*" introducido mediante una metáfora literaria por el americano R. JEFFREY en su obra *The Logic of Decision*⁴² da pie a esta otra definición más rigurosa,

⁴² Op. cit. páginas 196-97.

aunque menos intuitiva: un mundo posible es el referente -o aún mejor, el *descriptum*- de un conjunto coherente de enunciados de un determinado lenguaje, conjunto que no puede ser aumentado por la adición de un nuevo enunciado sin volverse inconsistente.⁴³

De la definición de modalidad que di en la introducción se dejaba entresacar que la particularidad semántica de los lenguajes que la formalizan consiste precisamente en que no es posible determinar aisladamente el valor de verdad de un enunciado que contenga operadores modales. La evaluación de un enunciado modal depende de la evaluación de otros (algunos, si no todos) enunciados del sistema al que pertenece el primero. Se percibe ahora por qué la noción de mundo posible dada anteriormente puede ser tan útil en este campo si se entiende que a fin de cuentas el conjunto de todos los enunciados verdaderos de un sistema es equivalente a una descripción exhaustiva de un posible estado de cosas. Con esta clave en la mente es fácil determinar el significado de los enunciados del lenguaje que incluyen operadores modales. Así el enunciado

⁴³ Cfr. J. HINTIKKA: *Models for Modalities*, pp.: 153-154.

(8) $\Box\alpha \rightarrow \alpha$

se traduce por

(8') «Si en todos los mundos posibles es el caso que α entonces es el caso que α ».

Y análogamente el enunciado

(10) $\neg\alpha \rightarrow \Diamond\neg\alpha$

se traduce por

(10') «si no es el caso que α entonces hay al menos un mundo posible en el que no es el caso que α ».

Seguramente esta transcripción de los antiguos giros por los nuevos "en todos los mundos posibles es el caso que" y "hay al menos un mundo posible en el que es el caso que" no contribuye, desde una perspectiva lingüística, a aclarar el significado de "necesario" y "posible"; en todo caso, a hacerlo menos natural. Sin embargo, desde el punto de vista de la lógica, la semántica de los mundos posibles

proporciona una útil herramienta para la resolución de los problemas que plantea la intensionalidad. Puede decirse que la semántica de los mundos posibles permite *extensionalizar* los lenguajes intensionales.

El fallo del principio (SI) en contextos modales -que atrae y supone el fallo de (GE)- puede verse corregido a través de lo que se ha dado en llamar identificación cruzada (*cross-world identification*) que ha de realizarse mediante las llamadas funciones de individuación (*individuation functions*). Lo que estos nuevos conceptos añaden al análisis semántico de las modalidades es, hasta cierto punto, casi trivial. La identificación cruzada consiste en el establecimiento de la identidad entre dos miembros de mundos posibles diferentes.⁴⁴ Una idea intuitiva de lo que significa la identificación cruzada la da la suposición de que todos los individuos idénticos de los diversos mundos posibles están conectados entre sí objetivamente en virtud de su corporeidad o rol desempeñado en una teoría por una especie de *hilo de Ariadna* -los autores anglosajones hablan de

⁴⁴ Aunque relacionados entre sí por la relación de alternatividad, que se tratará más adelante.

"*world lines*"- que conduce de un estado de cosas a otro. La identificación de un individuo consiste precisamente en seguir uno de estos hilos *inter mundos*. Para J. HINTIKKA, estos hilos de Ariadna forman una subclase de la clase de las funciones intensionales que CARNAP llamó conceptos individuales. Es esta subclase la que recibe por parte del filósofo finlandés el nombre de funciones de individuación, de las que, reproduciendo sus propias palabras, no es difícil ver que son las entidades más importantes sobre las que hay que cuantificar en contextos modales,⁴⁵ para más adelante añadir:

«Resumiendo, la semántica de Frege-Carnap explica el comportamiento de la identidad en contextos modales (y contextos de actitud proposicional) pero no el comportamiento de los cuantificadores en tales contextos. La diferencia entre los dos problemas es casi como la modificación de un cuantificador. En el caso de la identidad, el problema es decir cuándo *dos* términos singulares se refieren al mismo individuo en *cada* mundo posible (de un cierto tipo). En el caso de la cuantificación, tenemos que preguntar cuándo *uno* y

⁴⁵ «They are the most important entities we have to quantify over in these truth-conditions». Cfr. *The Intentions of Intentionality*, página 89.

el mismo término singular se refiere al mismo individuo en todos los mundos posibles (de una clase determinada)». ⁴⁶

§5. La relación de alternatividad.

Del mismo modo que un cuantificador liga una variable, cabe la posibilidad de pensar que un operador de modalidad ligue todo un enunciado. En la fórmula

$$(11) \quad \Diamond Vx\alpha(x)$$

$\alpha(x)$ cae bajo el alcance del cuantificador existencial en tanto que $Vx\alpha(x)$ se encuentra en el ámbito del operador de posibilidad. Se dice entonces que $Vx\alpha(x)$ es un enunciado modalizado. El valor de verdad de (11) está en función, por

⁴⁶ J. HINTIKKA: "Carnap's Heritage" en *The Intentions of Intentionality*, página 90. La cursiva es del propio autor. Cfr. también sobre este mismo aspecto el artículo "Existential and Uniqueness Presuppositions" en *Models for Modalities*, nota 13, página 147. En definitiva, las funciones de individuación proporcionan los indicadores rígidos (los nombres propios) de cada individuo, con lo que puede establecerse su identidad de un mundo posible a otro.

supuesto, del valor de verdad del enunciado modalizado, pero no puede depender exclusivamente de él porque, si así fuera, el operador modal no añadiría nada relevante al significado lógico del enunciado modalizado y, por ende, tampoco a la lógica de predicados de primer orden. Sería un simple adorno y nada más. Un enunciado modal como el precedente no depende semánticamente sólo de las asignaciones y valoraciones correspondientes de los enunciados modalizados que caigan bajo el alcance de los operadores modales ni de los signos constantes lógicos que en él ocurran, sino que también depende de otros factores por determinar relacionados con el significado de expresiones como "es posible que", "es necesario que", etcétera.

La adaptación de la noción de mundo posible a los lenguajes formales para los que se la requiere, con el fin de que sea útil para establecer los criterios de valoración de enunciados como (11), exige aún una mayor precisión en la *traducción* de tales expresiones que la hasta ahora alcanzada. Cabe evitar la ambigüedad resultante de traducirlas por "en algunos mundos posibles es el caso que" y "en todos los mundos posibles es el caso que", siendo así que siempre se puede imaginar una infinidad de mundos posibles, si se tienen en cuenta tan sólo aquellos estados

de cosas alternativos al actual que son verdaderamente relevantes. Esto solamente es posible si se limita el concepto de mundo posible y se trabaja no con descripciones globales del mundo sino con descripciones parciales. Por el momento, seguiré llamando a estas descripciones parciales *mundos posibles* (nombrados con las letras minúsculas griegas μ , ν ó λ) y consideraré que se trata de conjuntos no vacíos y finitos de enunciados *de algún modo pertinentes* para la teoría. De esta forma, tanto los mundos posibles entendidos como conjuntos de enunciados, como el número de éstos a considerar en la evaluación de un enunciado modal serán finitos. "Relevancia" y "pertinencia" no dejan de ser nociones ambiguas también, pero basten por el momento para continuar con la aproximación intuitiva que sirve como soporte a la discusión filosófica y lingüística desarrollada en este capítulo sobre los lenguajes intensionales y la semántica de los mundos posibles.

Según lo dicho, habría entonces que reformular los enunciados (8') y (10') del párrafo anterior del siguiente modo:

(8'') «Si en todos los mundos posibles relevantes para
 (o alternativos a) el actual es el caso que α

entonces es el caso que α (en el mundo posible actual)».

(10'') «Si no es el caso que α (en el mundo posible actual) entonces hay al menos un mundo posible relevante para (o alternativo a) el actual en el que no es el caso que α ».

Un enunciado como (11), por tanto, habrá de ser evaluado dentro de una *galaxia* o sistema de mundos posibles relevantes para el actual, de tal modo que si μ es el mundo posible actual y hay algún mundo posible relevante para μ , digamos λ , tal que el enunciado modalizado de (11) pertenece a λ entonces diremos que efectivamente es el caso que (11).

Esto significa que al adoptar la semántica de los mundos posibles, el valor de verdad de los enunciados del lenguaje deja de ser solamente una función de los valores de verdad de sus componentes y pasa a ser, además, una función del valor de verdad de otros enunciados pertenecientes al mismo sistema. Por tanto, decir de un enunciado modal α que es el caso -esto es: que α es verdadero- es encontrar un conjunto de enunciados μ y un sistema de mundos posibles de algún modo relevantes para μ (llámese Ω) tales que $\alpha \in \mu \in \Omega$.

Por lo tanto, de todo lo dicho se sigue que un sistema tal involucra la existencia de una nueva función que, junto con las funciones de verdad tradicionales, permite evaluar el enunciado modal α . Dicha función recibe el nombre de relación de alternatividad, que es un concepto básico en la semántica de los mundos posibles y que por su especial condición merece que se le dedique algún tipo de análisis previo a su definición formal.⁴⁷

Cabe definir la relación de alternatividad diciendo que un mundo posible es alternativo a otro si el estado de cosas que describe parcialmente el primero es una alternativa al que describe el segundo. O dicho de otro modo, si pudiera darse el estado de cosas descrito por el primero en lugar del que describe el segundo. Ahora bien, de esta definición podría desprenderse que todos los mundos posibles tienen que

⁴⁷ Algunos autores prefieren llamarla *de accesibilidad* o *de relevancia lógica*. Aquí adopto la terminología de HINTIKKA, quien en su libro *The Intentions of Intentionality* destaca la importancia de la relación de alternatividad en la semántica de los mundos posibles: «En general, con una ligera simplificación uno puede decir que todo lo que queremos decir en la semántica de la lógica modal puede ser dicho en términos de la relación de alternatividad». Op. cit., página 28.

ser alternativos entre sí, ya que sería lícito pensar que cualquier descripción parcial de un mundo posible supone una alternativa a cualquier otra, lo que supondría una trivialización hasta la inutilidad de este concepto. Conviene, por tanto, establecer más firmemente cuándo una descripción parcial del mundo puede ser una alternativa con respecto a otra.

Supónganse dos teorías físicas -es decir, dos descripciones parciales del mundo- que sólo se diferencien entre sí por los enunciados

(13) «Al nivel del mar el agua hierve a 100°C » y

(14) «Al nivel del mar el agua hierve a 110°C ».

Ambas descripciones pueden ser una alternativa, la una de la otra. Piénsese ahora en el significado del enunciado

(14') «Es posible que al nivel del mar el agua hierva a 110°C ».

Este último supone, según los criterios semánticos propuestos, la existencia de un mundo posible tal como aquél

a cuya descripción pertenecería el enunciado (14), aunque el propio (14') podría estar entre los enunciados del mundo posible descrito por el conjunto de los enunciados al que pertenece (13) -así como entre los enunciados del conjunto al que pertenece (14)-. Pero ¿qué ocurre si en el primero de ambos mundos posibles hay algo como eso que llamamos "agua" mientras que en el segundo no? Evidentemente, el término "agua" habría de tener referentes distintos en ambos casos, de donde se sigue que se daría una diferencia en el significado del enunciado (14') en un mundo posible y en otro; es decir: ninguno de los dos supondría una alternativa real con respecto al otro, al menos por lo que se refiere al punto de ebullición del agua.

Considero que esto es un efecto propio del hecho de que los enunciados toman una parte de su significado de la teoría en la que se encuadran, del sistema descriptivo de la realidad en el que se encuentran. Este sistema supone en última instancia una amplia red lingüística en la que reside el criterio de verdad apropiado para los enunciados que la componen, lo que se percibe de forma paradigmática cuando se trata con enunciados de los llamados *teóricos*. La relación de alternatividad se establece entre dos de estas redes lingüísticas, lo que significa una comunidad de términos y

una comunidad de constantes lógicas, aunque no, evidentemente, de enunciados; en definitiva, la traducibilidad de los enunciados propios de la una a los de la otra.⁴⁸ Así, por ejemplo, cabe considerar alternativas las teorías astronómicas geocéntrica y heliocéntrica contempladas como un conjunto de enunciados referidos al cosmos. El significado de las constantes lógicas que aparecen en ambos conjuntos de enunciados es el mismo y también sus términos constantes individuales en relación a sus referentes (los planetas, el sol, las estrellas), a pesar de que sufran un desplazamiento semántico del uno al otro. Lo que significa que dos conjuntos de enunciados que describen mundos posibles diversos pero alternativos han de tener algo en común: los términos individuales -aun contando con los desplazamientos semánticos, cuyos problemas asociados intenta resolver la teoría de las funciones de individuación- y el significado de los signos constantes lógicos -es decir, las condiciones que determinan un conjunto modelo-.

⁴⁸ Cfr. las teorías de la referencia y de la indeterminación de la traducción expuestas por QUINE respectivamente en "Two Dogmas of Empiricism" en *From a Logical Point of View* y en *Word and Object*.

Por tanto, dos mundos posibles son alternativos desde el punto de vista de la teoría del significado solamente si es posible establecer un criterio de traducibilidad entre sus enunciados, aunque éstos sean completamente diferentes e incluso contradictorios; es pensable un mundo en el que sea falso todo lo que en el actual es verdadero, pero los enunciados que componen sus descripciones tendrán sentido a partir de idénticos principios lógicos y lingüísticos, por lo que existe la potestad de que ambos sean alternativos.

Así definida, la relación de alternatividad permite sistematizar el significado de los giros del lenguaje natural "es posible que" y "es necesario que" de forma análoga a como se hiciera más arriba, aunque dando lugar a las siguientes traducciones:

«Es posible que α » =_{trad.} $\forall \mu \exists \lambda (\Diamond \alpha \in \mu \ \& \ \mu \Rrightarrow \lambda \ \& \ \alpha \in \lambda)$;

«Es necesario que α » =_{trad.} $\forall \mu \forall \lambda (\Box \alpha \in \mu \ \& \ \mu \Rrightarrow \lambda \ \rightarrow \ \alpha \in \lambda)$.

La relación de alternatividad R se establece entre conjuntos de enunciados y no entre los enunciados mismos. No será necesario para el lógico especificar de qué tipo de

relación se trata ya que lo verdaderamente importante es determinar en cada caso qué conjuntos de enunciados pertenecientes a un determinado sistema están relacionados entre sí y las propiedades de la relación que mantienen. Las traducciones anteriores, además, impiden que se tomen los operadores modales como dos maneras tipográficamente diferentes de decir que un enunciado es satisfactible o universalmente válido, en cada caso. La confusión de las modalidades con propiedades de los enunciados (como por ejemplo la confusión del operador $\Box$ con el predicado metalingüístico "analítico") también queda descartada con esta traducción que, además, abre una perspectiva de estudio de las modalidades desde la lógica de predicados de segundo orden.

CAPÍTULO TRES:

CONJUNTOS MODELOS.

§6. La noción de conjunto modelo.

Definición 6.1: El conjunto $\mathcal{F}$ de las fórmulas bien formadas (abreviadamente fbfs.) es el más pequeño conjunto de secuencias de signos del lenguaje⁴⁹ que cumple las siguientes condiciones:

A) $\mathcal{A}$ es una fbf.

B) Si t y s son términos⁵⁰ y Q una letra predicativa entonces:

a) $t=s$ es una fbf.

b) $Qt_1t_2\dots t_n$ es una fbf.

C) Si α y β son fbfs. entonces:

⁴⁹ En el capítulo anterior se dio una definición más informal de fórmula, exponiéndose entonces una lista de signos que son los que aquí se asume como signos del lenguaje con la sola adición del signo $\mathcal{A}$.

⁵⁰ Un término es una variable individual o una constante individual.

- a) $\neg\alpha$ es una fbf.
- b) $\alpha\wedge\beta$ es una fbf.
- c) $\alpha\vee\beta$ es una fbf.
- d) $\alpha\Rightarrow\beta$ es una fbf.

D) Si $\alpha(x)$ es una fbf. entonces:

- a) $\Lambda x\alpha(x)$ es una fbf.
- b) $\forall x\alpha(x)$ es una fbf.

E) Toda fbf. precedida por un operador modal es también una fbf.

F) Nada más es una fbf.

Definición 6.2: Un conjunto modelo (que será designado por una de las letras minúsculas del alfabeto griego λ, μ, ν , susceptibles de llevar subíndice) es un conjunto no vacío de fórmulas sin variables libres⁵¹ que satisface las siguientes condiciones:

- (C. $\mathcal{A}$): Para todo $\mu \in \Omega$, $\mathcal{A}\mu$.
- (C. $\neg$): Si $\alpha \in \mu$ entonces $\neg\alpha \notin \mu$.
- (C. $\vee$): Si $(\alpha\vee\beta) \in \mu$ entonces $\alpha \in \mu$ o $\beta \in \mu$.
- (C. $\wedge$): Si $(\alpha\wedge\beta) \in \mu$ entonces $\alpha \in \mu$ y $\beta \in \mu$.

⁵¹ En lo sucesivo se usará el término sentencia como sinónimo de fórmula sin variables libres.

- (C. $\rightarrow$): Si $(\alpha \rightarrow \beta) \in \mu$ entonces $\neg \alpha \in \mu$ o $\beta \in \mu$.
- (C. $=$): Si $\alpha(a) \in \mu$ y $(a=b) \in \mu$ entonces $\alpha(b) \in \mu$.
- (C.V): Si $\forall x \alpha(x) \in \mu$ entonces $\alpha(b) \in \mu$ para al menos una constante individual $b \in \mathcal{D}(\mu)$.
- (C. $\wedge$): Si $\wedge x \alpha(x) \in \mu$ entonces $\alpha(b) \in \mu$ para toda constante individual $b \in \mathcal{D}(\mu)$.
- (C. $\Diamond$): Si $\Diamond \alpha \in \mu$ entonces hay al menos un $\lambda \in \Omega$ tal que $\mu \lambda$ y $\alpha \in \lambda$.
- (C. $\Box$): Si $\Box \alpha \in \mu$ y si $\lambda \in \Omega$ y $\mu \lambda$ entonces $\alpha \in \lambda$.

Definición 6.3: Una clase modelo Ω es un conjunto no vacío de conjuntos modelos.

Definición 6.4: Un sistema modelo (S-modelo) es una cuádrupla ordenada $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ ⁵² donde Ω es una clase modelo, $\mathcal{R}$

⁵² JAAKKO HINTIKKA, a quien debo los conceptos y la terminología usados, define un sistema modelo como un par ordenado $\langle \Omega, \mathcal{R} \rangle$. Yo he optado por añadir a la definición, con la idea de hacerla más versátil, un dominio $\mathcal{D}$, que no es relevante para la lógica modal de proposiciones pero que sí será un elemento importante para la lógica modal de predicados, y la relación $\succ$ -evidentemente emparentada con el conjunto $\mathcal{E}$ de las condiciones que aparecen en la definición de conjunto modelo-, en el mismo sentido en que S. KRIPKE define sus *estructuras modelos*, pero sin restringir a un conjunto modelo cualquiera el primero de los elementos de la tripla ordenada. De este modo queda abierta la posibilidad de la adición o modificación de tales

es una relación llamada de alternatividad que se establece entre los conjuntos modelos pertenecientes a Ω de modo que $\mathcal{R} \subseteq \Omega^2$, $\mathcal{D}$ es una función definida en Ω tal que, para cada conjunto modelo $\mu \in \Omega$, $\mathcal{D}(\mu)$ es el conjunto de las constantes individuales que aparecen en las fórmulas de μ y $\succ$ es una relación que se establece entre los elementos de Ω y del conjunto $\mathcal{F}$ de las fbfs. tal que:

$$\mu \vdash \alpha \text{ sii } \alpha \in \mu;$$

$$\mu \vdash \neg \alpha \text{ sii no } \mu \vdash \alpha;$$

$$\mu \vdash \neg(a=a) \text{ sii } \mu \vdash \perp;$$

$$\mu \vdash \alpha \wedge \beta \text{ sii } \mu \vdash \alpha \text{ y } \mu \vdash \beta;$$

$$\mu \vdash \alpha \vee \beta \text{ sii } \mu \vdash \alpha \text{ ó } \mu \vdash \beta;$$

$$\mu \vdash \alpha \rightarrow \beta \text{ sii } \mu \vdash \neg \alpha \text{ ó } \mu \vdash \beta;$$

$$\mu \vdash (a=b) \text{ sii } \mu \vdash \alpha(a) \leftrightarrow \alpha(b);^{53}$$

$$\mu \vdash \forall x \alpha(x) \text{ sii } \mu \vdash \alpha(b) \text{ para algún } b \in \mathcal{D}(\mu);$$

condiciones, lo que permitirá extender sin problemas esta teoría semántica a otros ámbitos intensionales, como el epistémico, el deóntico o el temporal, o incluso a otras concepciones no clásicas de los signos constantes lógicos. Cfr. HINTIKKA, J.: *Models for Modalities*, página 61, KRIPKE, S.: "Semantical analysis of modal logic I: Normal modal propositional calculi", páginas 68ss. así como "Semantical analysis of modal logic II: Non-normal modal propositional calculi", pp.: 206-220 y también FITTING, M.: "Tableau Methods of Proof for Modal Logics", página 238.

⁵³ La fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una abreviatura de $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

$\mu \vdash \Lambda x \alpha(x)$ sii $\mu \vdash \alpha(b)$ para todo $b \in \mathcal{D}(\mu)$;

$\mu \vdash \Diamond \alpha$ sii $\exists \lambda \in \Omega$ $\mu \mathcal{R} \lambda$ y $\lambda \vdash \alpha$;

$\mu \vdash \Box \alpha$ sii $\forall \lambda \in \Omega$ $\mu \mathcal{R} \lambda$, $\lambda \vdash \alpha$.

No debe confundirse un S-modelo con un modelo que satisface una fórmula. En general, un S-modelo no es una interpretación, sino un marco general para las interpretaciones semánticas de los enunciados modales. Dicho de otro modo, un S-modelo es un sistema de conjuntos modelos relacionados entre sí y son precisamente los conjuntos modelos (en tanto que pertenecientes a una clase modelo) los que *determinan* un modelo para un enunciado concreto; el S-modelo *provee* de interpretaciones pero no es él mismo una interpretación. Si así no fuera, sería fácil despojar de toda relevancia lógica a los operadores modales. Por ejemplo, si se dijera siguiendo la definición de S-validez que el enunciado

$$(12) \quad \Box \forall x \alpha(x)$$

es válido sii para toda interpretación $\exists \forall x \alpha(x)_{\mathcal{I}} = 1$, se estaría tratando el operador modal de necesidad en el mismo sentido en el que se dice que el enunciado modalizado es válido. Esto significa que (12) sería lo mismo que

(12') $\models Vx\alpha(x);$

y en verdad para ese viaje no se necesitaban tales alforjas.⁵⁴

Definición 6.5: Una fórmula α es S-satisfactible sii para algún S-modelo hay un $\mu \in \Omega$ tal que $\alpha \in \mu$.

Definición 6.6: Una fórmula α es S-válida (abreviadamente $\models_S \alpha$) sii para todo S-modelo y para todo conjunto modelo $\mu \in \Omega$, $\alpha \in \mu$.

⁵⁴ Creo que de algún modo RUDOLF CARNAP comete este error en *Meaning and Necessity*. Allí propone interpretar la necesidad lógica en función de su concepto de L-verdad y dice: «39-1. Para cualquier sentencia '...', 'N(...)' es verdadera si y sólo si '...' es L-verdadera» (página 174). Pero si se tiene en cuenta que al comienzo del libro (página 8) definió el concepto L-verdadero diciendo que «L-verdadero se utiliza como un *explicatum* de lo que Leibniz llamó verdad necesaria y Kant verdad analítica», lo que traslada luego (página 10) a la teoría de modelos mediante la siguiente definición: «Una sentencia G_i es L-verdadera (en S_1) $\equiv_{df}$ G_i vale en toda descripción de estado (en S_1)» -que es lo mismo que decir que G_i es satisfactible por cualquier modelo (siempre en S_1)-, entonces se comprueba que efectivamente para CARNAP la necesidad lógica y el concepto de analiticidad o universal validez son lo mismo, con lo que el operador de necesidad N y el signo $\models$ se confunden.

Definición 6.7: Una fórmula α es consecuencia lógica de un conjunto no vacío de fórmulas Γ en el sistema S (abreviadamente $\Gamma \vdash_S \alpha$) sii hay una fórmula γ que es la fórmula que se consigue al conjuntar mediante el signo $\wedge$ todas las fórmulas de un subconjunto finito $\Gamma' \subset \Gamma$ tal que $\vdash_S \gamma \rightarrow \alpha$.

Con el aparato semántico descrito es fácil dar cuenta de los sistemas axiomáticos más importantes de la lógica modal. En concreto, de los denominados sistemas normales de lógica modal, por cuyos sistemas modelos se interesa principalmente este trabajo puesto que permiten una aproximación global a problemas relacionados con la teoría de la referencia, la teoría de las normas y la epistemología.

Sea un conjunto de axiomas cualquiera para la lógica de proposiciones similar al de la base axiomática de los *Principia Mathematica* {PM} y los siguientes axiomas y reglas de inferencia:

[K]: $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

[D]: $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$

[T]: $\Box\alpha \rightarrow \alpha$

[B]: $\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$

- [S4]: $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$
 [S5]: $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$
 (MP): $\vdash\alpha, \vdash\alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash\beta$
 (N): $\vdash\alpha \Rightarrow \vdash\Box\alpha$
 (E): $\vdash\alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \vdash\Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta$

KRIPKE denomina *sistema normal de lógica modal* a todo aquél que sea una extensión del sistema cuya base axiomática es la siguiente:

$$\{PM\} + [K] + [T] + (MP) + (N).^{55}$$

En general se puede decir que un sistema normal de lógica modal es toda extensión del sistema K que sea cerrada respecto de la regla (N) de necesariedad. Esto deja a un lado el sistema estándar de lógica deóntica D, cuya base axiomática se define por:

⁵⁵ Cfr. KRIPKE, S.: "Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi", pp.: 67-69 y "Semantical Analysis of Modal Logic II: Non-Normal Modal Propositional Calculi", pp.: 207-209.

$$\{PM\}+[K]+[D]+(MP)+(E),^{56}$$

pero no a los denominados sistemas básicos de lógica deóntica, cuyo principal exponente es el sistema KD, que sí son cerrados respecto de (N).⁵⁷

Volviendo a la semántica descrita, determinados cambios en la definición de la relación diádica $\mathcal{R}$, por ejemplo, aportarían diferentes sistemas modelos de acuerdo con los principales sistemas axiomáticos normales. Con $\mathcal{R}$ reflexiva se obtiene un S-modelo que conviene al sistema T propuesto por FEYS en 1937 (así como al sistema M de VON WRIGHT,

⁵⁶ En el capítulo siete se trata con más detalle el sistema estándar de lógica deóntica.

⁵⁷ La semántica de los sistemas normales es especialmente atractiva para el estudio de los problemas de referencialidad en lenguajes intensionales. Por otra parte, estos sistemas incluyen aquellos axiomas y teoremas más interesantes para una primera aproximación a la lógica deóntica y a la lógica epistémica desde una perspectiva filosófica. En efecto, los axiomas $[K]+[D]$ dan lugar, como se ha dicho, a lo que se denomina *sistemas básicos de lógica deóntica*, en tanto que si se los complementa con $[S4]$ o con $[S5]$ -esto es, si se toma como base axiomática $[K]+[D]+[S4]$ o bien $[K]+[D]+[S5]$ - se obtienen diversas lógicas de la creencia. Del mismo modo, $[K]+[T]$ fundamentan los sistemas de lógica modal alética y con $[S4]$ o con $[B]$ (o $[S5]$ en su lugar) proveen de sistemas para la lógica epistémica o del conocimiento.

equivalente a T como demostró en 1953 SOBOCIŃSKI).⁵⁸ Igualmente, si $\mathcal{R}$ es reflexiva y transitiva se obtiene un S-modelo semántico del sistema axiomático propuesto por LEWIS en 1932 que conocemos como S4, y si es reflexiva y simétrica se tiene el sistema B (o *Sistema Brouweriano*) propuesto por KRIPKE en 1963. Del mismo modo, si $\mathcal{R}$ es euclidiana (o, paralelamente, reflexiva, simétrica y transitiva) se tiene el equivalente semántico de S5 de LEWIS, etcétera. El siguiente cuadro ofrece la definición de la relación de alternatividad para algunos de los sistemas modales normales más importantes:

⁵⁸ Cfr. R. FEYS: "Les logiques nouvelles des modalités"; G.H. VON WRIGHT: *An Essay in Modal Logic*; B. SOBOCIŃSKI: "Note on a modal system of Feys-Von Wright".

Sistema.	Propiedad.	Cláusulas que cumple la relación.
K	—	—
KD	Serialidad	$\forall \lambda \exists \mu (\lambda R \mu)$
T	Reflexividad	$\forall \mu (\mu R \mu)$
B	Reflexividad Simetría	$\forall \mu (\mu R \mu)$ $\forall \lambda \mu (\lambda R \mu \rightarrow \mu R \lambda)$
S4	Reflexividad Transitividad	$\forall \mu (\mu R \mu)$ $\forall \lambda \mu \nu (\lambda R \mu \ \& \ \mu R \nu \rightarrow \lambda R \nu)$
S5	Euclidianidad	$\forall \lambda \mu \nu (\lambda R \mu \ \& \ \lambda R \nu \rightarrow \mu R \nu)$

Cada uno de los S-modelos semánticos que surgen de definir en un sentido o en otro la relación de alternatividad como en el cuadro anterior puede recibir el nombre, respectivamente, de K-modelo, T-modelo (o M-modelo), D-modelo, y así sucesivamente.⁵⁹

⁵⁹ Se puede pensar de forma análoga en los S-modelos correspondientes a otros sistemas axiomáticos de lógica

§7. Algunos resultados con conjuntos modelos y mundos posibles.

Teorema 7.1, (Lema de Hintikka): *Todo conjunto modelo μ es simultáneamente S-satisfactible.*

Demostración: El teorema es evidente por la definiciones de conjunto modelo y S-satisfactibilidad. Sea $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ un S-modelo cualquiera tal que $\mu \in \Omega$. Luego para todo $\alpha \in \mu$, α es S-satisfactible por la definición 6.5.

Definición 7.1: Un conjunto Γ finito de fórmulas es semánticamente consistente sii es simultáneamente S-satisfactible.

modal modificando Ω mediante la introducción de cambios, bien en la definición de $\mathcal{R}$, bien en el conjunto $\mathcal{E}$. Así, por ejemplo, J. HINTIKKA ofrece en *Models for Modalities*, pp.: 60-61, las siguientes condiciones como las propias de un sistema semántico equivalente a M:

- (C.M^{*}): Si $\exists \alpha \in \mu \in \Omega$ entonces hay en Ω al menos un conjunto modelo λ alternativo a μ tal que $\alpha \in \lambda$.
 (C.N): Si $\forall \alpha \in \mu$ entonces $\alpha \in \mu$.
 (C.N⁺): Si $\forall \alpha \in \mu \in \Omega$ y si $\lambda \in \Omega$ y λ es alternativo a μ entonces $\alpha \in \lambda$.
-

Definición 7.2: Un conjunto máximamente consistente en sentido semántico $\mathcal{M}$ es un conjunto de fórmulas semánticamente consistente y ejemplificado (es decir, para toda fbf. de la forma $\forall x\delta(x)$, si $\forall x\delta(x) \in \mathcal{M}$ entonces hay al menos una constante individual b tal que $\delta(b) \in \mathcal{M}$) tal que ninguna extensión propia de $\mathcal{M}$ es semánticamente consistente.⁶⁰

Definición 7.3: Un conjunto veritativo $\mathcal{V}$ es un conjunto de sentencias tal que para cualesquiera sentencias α y β :

- a) $\perp \notin \mathcal{V}$;
- b) $\alpha \in \mathcal{V}$ sii $\neg\alpha \notin \mathcal{V}$;
- c) $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{V}$ sii $\alpha \in \mathcal{V}$ o $\beta \in \mathcal{V}$;
- d) $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{V}$ sii $\alpha \in \mathcal{V}$ y $\beta \in \mathcal{V}$;
- e) $(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{V}$ sii $\neg\alpha \in \mathcal{V}$ o $\beta \in \mathcal{V}$;
- f) $\forall x\alpha(x) \in \mathcal{V}$ sii hay al menos una constante individual b tal que $\alpha(b) \in \mathcal{V}$;
- g) $\Lambda x\alpha(x) \in \mathcal{V}$ sii para toda constante individual

⁶⁰ Por una extensión propia de $\mathcal{M}$ se entiende la adición de una fórmula cualquiera γ tal que $\gamma \notin \mathcal{M}$. Se puede observar que todo mundo posible, tal y como fue definido en el capítulo anterior, es el *descriptum* de un conjunto de sentencias máximamente consistente en sentido semántico.

$b, \alpha(b) \in \mathcal{V}$;

h) $\Diamond \alpha \in \mathcal{V}$ sii, para algún conjunto veritativo $\mathcal{V}'$ tal que $\{\Diamond \delta \mid \delta \in \mathcal{V}'\} \subseteq \mathcal{V}, \alpha \in \mathcal{V}'$;

i) $\Box \alpha \in \mathcal{V}$ sii, para todo conjunto veritativo $\mathcal{V}'$ tal que $\{\delta \mid \Box \delta \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{V}', \alpha \in \mathcal{V}'$.

Lema 7.1: *Para todo conjunto modelo μ hay un conjunto veritativo $\mathcal{V}$ tal que $\mu \in \mathcal{V}$.*

Demostración: Extendiendo el conjunto modelo μ a un conjunto veritativo.

Sean $A = \langle \alpha_1, \dots \rangle$ la secuencia de todas las fórmulas de $\mathcal{F}$ con una y sólo una variable libre, $P = \langle a_1, \dots \rangle$ la secuencia de todos los parámetros que no ocurren en μ y $B = \langle \beta_1, \dots \rangle$ la secuencia de todas las sentencias del lenguaje.

Sea $\mathcal{V}_w = \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 \cup \dots$, donde $\mathcal{V}_0 = \mu$ y $\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{V}_n \cup \{\forall x \delta(x) \rightarrow \delta(b/x)\}$, siendo δ la n -ésima fórmula de A y b el primer parámetro de P que no está ni en $\mathcal{V}_n$ ni en δ .

Sea $\mathcal{V}^w = \mathcal{V}^0 \cup \mathcal{V}^1 \cup \dots$, donde $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}_w$ y $\mathcal{V}^{n+1} = \mathcal{V}^n \cup \{\beta_n\}$ si no $\mathcal{V}^n \models_S \neg \beta_n$ o bien $\mathcal{V}^{n+1} = \mathcal{V}^n$ en caso contrario, siendo β_n la n -ésima sentencia de B .

Se obtiene de este modo un conjunto $\mathcal{V}^w$ del que se puede probar:

1° $\mathcal{V}^w$ es simultáneamente S -satisfactible. En efecto, $\mathcal{V}_0$

es simultáneamente S-satisfactible por el teorema 7.1. Ahora bien, si $\mathcal{V}_n$ es simultáneamente S-satisfactible entonces $\mathcal{V}_{n+1}$ también lo es. Supóngase que $\mathcal{V}_{n+1}$ no es simultáneamente S-satisfactible. Entonces, como por hipótesis $\mathcal{V}_n$ sí lo es, es que $\mathcal{V}_n \models_S \neg(\forall x \delta(x) \rightarrow \delta(b/x))$. Por tanto, $\mathcal{V}_n \models_S \forall x \delta(x)$ y $\mathcal{V}_n \models_S \neg \delta(b/x)$. Pero, como b es un parámetro nuevo con respecto a $\mathcal{V}_n$ y δ , entonces se tiene que $\mathcal{V}_n \models_S \wedge x \neg \delta(x)$ y de aquí que $\mathcal{V}_n \models_S \neg \forall x \delta(x)$, lo que hace que $\mathcal{V}_n$ no sea simultáneamente S-satisfactible, contra la hipótesis. De todo esto se sigue que $\mathcal{V}_w$ es simultáneamente S-satisfactible y por tanto lo es $\mathcal{V}^0$, por definición. Basta entonces con demostrar que si $\mathcal{V}^n$ es simultáneamente S-satisfactible también lo es $\mathcal{V}^{n+1}$, lo que es evidente por el propio proceso de construcción.

2° $\mathcal{V}^w$ es un conjunto veritativo. En efecto:

- a) $\mathcal{A} \notin \mathcal{V}^w$, puesto que $\mathcal{V}^w$ es simultáneamente S-satisfactible.
- b) $\alpha \in \mathcal{V}^w$ sii $\neg \alpha \notin \mathcal{V}^w$, puesto que, en el supuesto de que $\alpha \in \mathcal{V}^w$ entonces, si también $\neg \alpha \in \mathcal{V}^w$ entonces $\mathcal{V}^w$ no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a la hipótesis, y en el supuesto de que $\neg \alpha \notin \mathcal{V}^w$ entonces, por el criterio de construcción de $\mathcal{V}^w$, $\alpha \in \mathcal{V}^w$.

c) $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{V}^w$ sii $\alpha \in \mathcal{V}^w$ o $\beta \in \mathcal{V}^w$, puesto que en el supuesto de que $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{V}^w$, si $\alpha \notin \mathcal{V}^w$ y $\beta \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg \alpha \in \mathcal{V}^w$ y $\neg \beta \in \mathcal{V}^w$; luego $\mathcal{V}^w \models_S \neg \beta$. Pero es evidente que $(\alpha \vee \beta), \neg \alpha \models_S \beta$ y por tanto $\mathcal{V}^w$ no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo ya demostrado. Y en el supuesto de que $\alpha \in \mathcal{V}^w$ o $\beta \in \mathcal{V}^w$, si $(\alpha \vee \beta) \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{V}^w$ y por tanto $\mathcal{V}^w \models_S \neg(\alpha \vee \beta)$; pero $\alpha \models_S (\alpha \vee \beta)$ y nuevamente $\mathcal{V}^w$ no sería simultáneamente S-satisfactible.

d) $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{V}^w$ sii $\alpha \in \mathcal{V}^w$ y $\beta \in \mathcal{V}^w$, puesto que en el supuesto de que $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{V}^w$, si $\alpha \notin \mathcal{V}^w$ o $\beta \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg \alpha \in \mathcal{V}^w$ o $\neg \beta \in \mathcal{V}^w$; luego $\mathcal{V}^w \models_S \neg \beta$ o $\mathcal{V}^w \models_S \neg \alpha$, aunque es evidente que $(\alpha \wedge \beta) \models_S \alpha$ y $(\alpha \wedge \beta) \models_S \beta$, por lo que $\mathcal{V}^w$ no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo ya demostrado. Y en el supuesto de que $\alpha \in \mathcal{V}^w$ y $\beta \in \mathcal{V}^w$, si $(\alpha \wedge \beta) \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{V}^w$ y por tanto $\mathcal{V}^w \models_S \neg(\alpha \wedge \beta)$; pero $\alpha, \beta \models_S (\alpha \wedge \beta)$ y nuevamente $\mathcal{V}^w$ no sería simultáneamente S-satisfactible.

e) $(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{V}^w$ sii $\neg \alpha \in \mathcal{V}^w$ o $\beta \in \mathcal{V}^w$, puesto que en el supuesto de que $(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{V}^w$, si $\neg \alpha \notin \mathcal{V}^w$ y $\beta \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\alpha \in \mathcal{V}^w$ y $\neg \beta \in \mathcal{V}^w$; luego $\mathcal{V}^w \models_S \neg \beta$. Pero es evidente que $(\alpha \rightarrow \beta), \alpha \models_S \beta$ y por tanto $\mathcal{V}^w$ no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo que ya ha sido demostrado. Y en el supuesto de que $\neg \alpha \in \mathcal{V}^w$ o

$\beta \in \mathcal{V}^w$, si $(\alpha \rightarrow \beta) \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{V}^w$ y por tanto $\mathcal{V}^w \models_S \neg(\alpha \rightarrow \beta)$; pero $\neg\alpha \models_S (\neg\alpha \vee \beta)$, o lo que es lo mismo $\mathcal{V}^w \models_S (\alpha \rightarrow \beta)$ y nuevamente $\mathcal{V}^w$ no sería simultáneamente S-satisfactible.

f) $\forall x \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$ sii hay al menos una constante individual b tal que $\alpha(b) \in \mathcal{V}^w$, puesto que en el caso de que $\forall x \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$, por el criterio de construcción debe haber al menos una fórmula del tipo $\forall x \alpha(x) \rightarrow \alpha(b) \in \mathcal{V}^w$, y por tanto $\mathcal{V}^w \models_S \alpha(b)$; y en el caso de que $\alpha(b) \in \mathcal{V}^w$, si $\forall x \alpha(x) \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg \forall x \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$ y, por tanto, $\wedge x \neg \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$, de donde $\mathcal{V}^w \models_S \neg \alpha(b)$, y $\mathcal{V}^w$ no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo establecido.

g) $\wedge x \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$ sii para toda constante individual, $\alpha(b) \in \mathcal{V}^w$, puesto que en el caso de que $\wedge x \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$ entonces $\mathcal{V}^w \models_S \alpha(b)$; y en el caso de que $\alpha(b) \in \mathcal{V}^w$, si $\wedge x \alpha(x) \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg \wedge x \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$ y, por tanto, $\vee x \neg \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$, de donde $\mathcal{V}^w \models_S \neg \alpha(b)$ por el propio criterio de construcción, y $\mathcal{V}^w$ no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo establecido.

h) $\Diamond \alpha \in \mathcal{V}^w$ sii, para algún conjunto veritativo $\mathcal{V}$ tal que $\{\Diamond \delta \mid \delta \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{V}^w$, $\alpha \in \mathcal{V}$, puesto que en el caso de que $\Diamond \alpha \in \mathcal{V}^w$, si, para todo conjunto veritativo $\mathcal{V}$ como el

caracterizado, $\alpha \notin \mathcal{V}$ entonces $\neg\alpha \in \mathcal{V}^w$. Por tanto, $\mathcal{V}^w \models_S \neg\alpha$, lo que significa, por la definición 6.6 que para todo conjunto $\mu \in \Omega$ $\neg\alpha \in \mu$. Luego $\mathcal{V}^w \models_S \Box\neg\alpha$ y de aquí que $\mathcal{V}^w \models_S \neg\Diamond\alpha$, no siendo $\mathcal{V}^w$ S-satisfactible. Por otra parte, si hay un conjunto veritativo $\mathcal{V}$ del tipo descrito con respecto a $\mathcal{V}^w$ tal que $\alpha \in \mathcal{V}$ entonces $\Diamond\alpha \in \mathcal{V}^w$.

i) $\Box\alpha \in \mathcal{V}^w$ sii, para todo conjunto veritativo $\mathcal{V}$ tal que $\{\delta \mid \Box\delta \in \mathcal{V}^w\} \subseteq \mathcal{V}$, $\alpha \in \mathcal{V}$, puesto que si $\Box\alpha \in \mathcal{V}^w$ entonces, por la propia caracterización del conjunto veritativo $\mathcal{V}$, $\alpha \in \mathcal{V}$. Por otro lado, si para todo conjunto veritativo $\mathcal{V}$ del tipo descrito $\alpha \in \mathcal{V}$ entonces $\mathcal{V}^w \models_S \alpha$ y, por la definición 6.6, $\mathcal{V}^w \models_S \Box\alpha$ y por tanto $\Box\alpha \in \mathcal{V}^w$.

Corolario: *Todo conjunto veritativo $\mathcal{V}^w$ es un conjunto máximamente consistente en sentido semántico $\mathcal{M}$.*

Lema 7.2, (Lema de Lindenbaum): *Todo conjunto modelo μ es un subconjunto de algún conjunto máximamente consistente en sentido semántico $\mathcal{M}$.*

Demostración: La demostración es directa a partir del lema 7.1 y su corolario.

Teorema 7.2, (Teorema de compacidad): *Dado un conjunto (finito o infinito) de fórmulas Γ , si para todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subset \Gamma$, Γ_0 es simultáneamente S-satisfactible entonces Γ es simultáneamente S-satisfactible.*

Demostración: Sea Γ_0 un subconjunto finito cualquiera de Γ . Como por hipótesis Γ_0 es simultáneamente S-satisfactible entonces, por el teorema 7.1, Γ_0 puede ser extendido a un conjunto modelo. Por tanto, por el lema 7.2, hay un conjunto máximamente consistente en sentido semántico $\mathcal{M}$, obtenido por el mismo procedimiento por el que se obtiene el conjunto $\mathcal{V}^w$ más arriba con la salvedad de que en este caso $A = \langle \alpha_1, \dots \rangle$ es la secuencia de todas las fórmulas de Γ con una y sólo una variable libre, $P = \langle a_1, \dots \rangle$ la secuencia de todos los parámetros que no ocurren en Γ_0 y $B = \langle \langle \gamma_1, \dots \rangle, \beta_1, \dots \rangle$ la secuencia de todas las sentencias del lenguaje cuyo primer elemento es la secuencia de todas las sentencias de Γ , tal que $\Gamma_0 \subset \Gamma \subseteq \mathcal{M}$, por lo que Γ es al menos consistente en sentido semántico y por lo tanto, atendiendo a la definición 7.1, Γ es simultáneamente S-satisfactible.

CAPÍTULO CUATRO:

UN PROCEDIMIENTO SEMÁNTICO DE DECISIÓN.

§8. Árboles semánticos para la lógica modal alética de proposiciones.

En este capítulo me propongo establecer un procedimiento semántico de decisión para los sistemas normales de lógica modal de proposiciones. El procedimiento se basa directamente en la *semántica de los mundos posibles*, por una parte, y el método de tablas o árboles semánticos de E.W. BETH y RAYMOND SMULLYAN, por otra.⁶¹

⁶¹ Cfr. E.W. BETH: "Semantic Entailment and Formal Derivability" en J. HINTIKKA (ed.): *The Philosophy of Mathematics*, pp.: 9-41, y RAYMOND SMULLYAN: *First-Order Logic*, respectivamente. M. FITTING ha aplicado también el método de tablas semánticas a la lógica modal en su libro *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*, con notables resultados de los que también me considero deudor. Tampoco puedo, ni debo, olvidar aquí el magisterio del profesor EMILIO DÍAZ ESTEVEZ ni su trabajo inédito "Reducciones finitas de árboles semánticos infinitos", al cual también debo lo esencial del procedimiento aquí expuesto.

Definición 8.1: Un árbol semántico es una secuencia de secuencias de expresiones del tipo β/n , donde β es una fórmula del lenguaje y n es un índice numérico (siendo $n > 0$), tal que se constituye a partir de una primera expresión $\alpha/1$ según las reglas de construcción que se establecerán debidamente. En rigor llamaré a esta secuencia de secuencias de expresiones que tiene a $\alpha/1$ como primera de todas ellas árbol S de α , o esquemáticamente $\mathcal{A}_S\alpha$.⁶²

Definición 8.2: Una fórmula cualquiera δ está asociada a un índice i en la secuencia $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}_S\alpha$ sii en $\mathcal{J}$ aparece la expresión δ/i .

Las reglas de formación del árbol semántico que van a ser establecidas a continuación son una aplicación formal

⁶² Opto por tratar los índices que acompañan a las fórmulas en el árbol como parte del metalenguaje y no del lenguaje objeto. Ambas opciones están presentes en la literatura sobre árboles modales. La primera, por ejemplo, se encuentra en COPELAND, B.J.: "Tense Trees: A Tree System for K_t ". La segunda, en cambio, puede encontrarse en FITTING, M.: "Tableau Methods of Proof for Modal Logics" y en DAVIDSON, JACKSON & PARGETTER: "Modal Trees for T and S5". Considero que el tratamiento de los índices como parte del metalenguaje es más elegante, además de reforzar el carácter *semántico* de los árboles modales.

del concepto de conjunto modelo para el análisis semántico de una fórmula modal. En síntesis, pueden describirse como la traslación al procedimiento de las tablas semánticas del conjunto de condiciones $\mathcal{E}$. En este sentido, es posible concebir el árbol semántico como una secuencia de enunciados metalingüísticos acerca de un conjunto Ω de conjuntos modelos que puede mostrarse efectivamente por el solo agrupamiento, según corresponda, de todas las fórmulas que aparecen en el árbol en el conjunto modelo que determine el índice al que cada fórmula está asociada,⁶³ siendo así que a partir de $\mathcal{A}_S\alpha$ es posible obtener en tal caso un S-modelo que satisfaga a α .

Definición 8.3: Una expresión de $\mathcal{A}_S\alpha$ está debidamente marcada o, simplemente, marcada sii aparece junto a ella uno de los siguientes signos: $\langle \neg \rangle$, $\langle \vee \rangle$, $\langle \wedge \rangle$, $\langle \leftrightarrow \rangle$, o uno o más índices numéricos -o bien uno o más parámetros- entre $\langle \rangle$.

Una de estas marcas junto a una expresión significa que ya ha sido aplicada a la misma alguna de las reglas de

⁶³ Con la salvedad de aquellos árboles que resulten *cerrados*, pues en ellos no podrán interpretarse los índices como conjuntos modelos *stricto sensu*, como se verá más adelante.

formación del árbol semántico, encabezadas por las siguientes:

- (R. $\vee$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{S} \subset A_{\mathcal{S}} \alpha$ es de la forma $(\beta \vee \gamma)/i$ entonces se obtienen dos secuencias diferentes $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tales que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} + \beta/i$ y $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} + \gamma/i$ y se marca la expresión con el signo $\langle \vee \rangle$.
- (R. $\wedge$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{S} \subset A_{\mathcal{S}} \alpha$ es de la forma $(\beta \wedge \gamma)/i$ entonces se añaden a la secuencia $\mathcal{S}$ tanto la expresión β/i como la expresión γ/i y se marca con el signo $\langle \wedge \rangle$.
- (R. $\rightarrow$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{S} \subset A_{\mathcal{S}} \alpha$ es de la forma $(\beta \rightarrow \gamma)/i$ entonces se obtienen dos secuencias diferentes $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tales que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} + \neg\beta/i$ y $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} + \gamma/i$ y se marca la expresión con el signo $\langle \rightarrow \rangle$.

Como se adelantara, es fácil observar la correspondencia directa que hay entre estas tres reglas y las condiciones (C. $\vee$), (C. $\wedge$) y (C. $\rightarrow$), respectivamente. Con el objeto de añadir nuevas reglas de formación del árbol semántico se pueden establecer nuevas condiciones; por ejemplo, a partir de las anteriores y la condición (C. $\neg$):

- (C. $\neg$): Si $\neg\alpha\in\mu$ entonces $\alpha\in\mu$.
- (C. $\neg\vee$): Si $\neg(\alpha\vee\beta)\in\mu$ entonces $\neg\alpha\in\mu$ y $\neg\beta\in\mu$.
- (C. $\neg\wedge$): Si $\neg(\alpha\wedge\beta)\in\mu$ entonces $\neg\alpha\in\mu$ ó $\neg\beta\in\mu$.
- (C. $\neg\rightarrow$): Si $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\in\mu$ entonces $\alpha\in\mu$ y $\neg\beta\in\mu$.
- (C. $\neg\Diamond$): Si $\neg\Diamond\alpha\in\mu$ entonces $\Box\neg\alpha\in\mu$.
- (C. $\neg\Box$): Si $\neg\Box\alpha\in\mu$ entonces $\Diamond\neg\alpha\in\mu$.

Estas nuevas condiciones son fácilmente derivables apelando a las anotadas en el capítulo anterior. Derivo, como ejemplo, (C. $\neg\wedge$). Supóngase que $\neg(\alpha\wedge\beta)\in\mu$; entonces por (C. $\neg$) no se da el caso que $(\alpha\wedge\beta)\in\mu$. Luego por (C. $\wedge$) no es el caso que $\alpha\in\mu$ y $\beta\in\mu$; esto es: o bien no es el caso que $\alpha\in\mu$ o bien no lo es que $\beta\in\mu$ (o ambos), y apelando nuevamente a (C. $\neg$) se obtiene que $\neg\alpha\in\mu$ ó $\neg\beta\in\mu$. (C. $\neg\Diamond$) y (C. $\neg\Box$) se fundamentan intuitivamente.

De estas seis condiciones se siguen las reglas correspondientes:

- (R. $\neg$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{J}^{\mathcal{A}}\alpha$ es de la forma $\neg\beta/i$ entonces se añade a la secuencia $\mathcal{J}$ la expresión β/i y se marca con el signo $\langle\neg\rangle$.
- (R. $\neg\vee$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{J}^{\mathcal{A}}\alpha$ es de

la forma $\neg(\beta \vee \gamma)/i$ entonces se añaden a la secuencia $\mathcal{S}$ tanto la expresión $\neg\beta/i$ como la expresión $\neg\gamma/i$ y se marca con el signo $\langle \neg \rangle$.

(R. $\neg\wedge$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{S}}\alpha$ es de la forma $\neg(\beta \wedge \gamma)/i$ entonces se obtienen dos secuencias diferentes $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tales que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} + \neg\beta/i$ y $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} + \neg\gamma/i$ y se marca con el signo $\langle \neg \rangle$.

(R. $\neg\rightarrow$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{S}}\alpha$ es de la forma $\neg(\beta \rightarrow \gamma)/i$ entonces se añaden a la secuencia $\mathcal{S}$ las expresiones β/i y $\neg\gamma/i$ y se marca con el signo $\langle \neg \rangle$.

(R. $\neg\Diamond$): Si la primera expresión no convenientemente marcada de $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{S}}\alpha$ es de la forma $\neg\Diamond\beta/i$ entonces se añade a la secuencia $\mathcal{S}$ la expresión $\Box\neg\beta/i$ y se marca con el signo $\langle \neg \rangle$.

(R. $\neg\Box$): Si la primera expresión no convenientemente marcada de $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{S}}\alpha$ es de la forma $\neg\Box\beta/i$ entonces se añade a la secuencia $\mathcal{S}$ la expresión $\Diamond\neg\beta/i$ y se marca con el signo $\langle \neg \rangle$.

Se puede prever que a estas nueve reglas de construcción del árbol semántico haya que añadir las correspondientes a las condiciones propias de la cuantificación y de los operadores modales aléticos. Las

primeras se verán en el capítulo siguiente puesto que, como queda dicho ya, la cuantificación en los contextos no puramente referenciales, que es el caso de los contextos modales, supone problemas específicos que han de tratarse a su vez específicamente. Por otra parte, las condiciones $(C.\Diamond)$ y $(C.\Box)$ darán lugar a tantas reglas de formación cuantas definiciones de la relación de alternatividad haya que manejar en relación con el S-modelo según el que se evalúe la fórmula que da lugar al árbol. La regla correspondiente a $(C.\Diamond)$ es común a todos los S-modelos de los sistemas normales de lógica modal:

$(R.\Diamond)$: Si la primera expresión de $\mathcal{S} \vdash \alpha$ no convenientemente marcada es de la forma $\Diamond\beta/i$ entonces se añade a la secuencia $\mathcal{S}$ la expresión β/j , donde j es el menor índice mayor que i no aparecido hasta el momento en la secuencia, y se marca con $\langle j \rangle$.

Las reglas correspondientes a $(C.\Box)$, en cambio, difieren en función del S-modelo elegido para revisar la fórmula.

Definición 8.4: Se dice que un índice j es relevante

para otro índice i en la secuencia $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}_{S\alpha}$ (abreviadamente, $i \sim j$) sii el índice j aparece en $\mathcal{J}$ al marcar una fórmula del tipo $\Diamond\beta$ asociada al índice i .

La noción de relevancia entre índices también podría denominarse de *K-relevancia* (lo que podría escribirse $i \sim_K j$, para dos índices cualesquiera i y j), por lo que cabe definir las nociones oportunas de relevancia para cada sistema normal T, B, S4 y S5:⁶⁴

Definición 8.5: a) $\forall i, j \in \mathcal{J} \ i \sim_T j$ sii $i \sim j$ ó $i = j$.

b) $\forall i, j \in \mathcal{J} \ i \sim_B j$ sii $i \sim j$ ó $j \sim i$.

c) $\forall i, j \in \mathcal{J} \ i \sim_{S_4} j$ sii $i \sim j$ ó $\exists k \in \mathcal{J} \ i \sim k \sim j$.

⁶⁴ La noción de relevancia entre índices en el árbol semántico está evidentemente emparentada con la relación de alternatividad definida entre los miembros de una clase modelo. Las definiciones de T-relevancia, B-relevancia, etcétera son la forma de trasladar a los árboles lo que se dijo en el capítulo anterior sobre la relación de alternatividad y sus propiedades en los diversos sistemas modelos. En este sentido, cabe destacar la definición de S5-relevancia que no recoge ninguna restricción especial relacionada con la definición de relevancia entre índices, puesto que la relación de alternatividad en S5 es una relación de equivalencia: todos los índices que aparecen en la secuencia $\mathcal{J}$ son relevantes los unos para los otros. La definición de D-relevancia aparece en el capítulo siete, dedicado a la interpretación deóntica de los operadores de modalidad.

$$d) \forall i, j \in \mathcal{J} \quad i \sim_{S_5} j.$$

(R_S.□):⁶⁵ Si la primera expresión no debidamente marcada en $\mathcal{J} \vdash_{S_5} \alpha$ es de la forma $\Box \beta / i$ entonces se añaden a la secuencia $\mathcal{J}$ todas las expresiones $\beta / j_1, \dots, \beta / j_n$, estando $j_1, \dots, j_n$ por todos los índices que aparecen en la secuencia tales que $i \sim_{S_5} j_k$, para $1 \leq k \leq n$, y se marca con $\langle j_1, \dots, j_n \rangle$.

Es conveniente establecer un orden de aplicación de las reglas de formación del árbol cuando en una misma secuencia hay más de una fórmula no convenientemente marcada. Con este fin, las reglas anteriores pueden ser divididas en tres grupos diferentes:

1° Aquellas reglas que provocan la aparición de nuevos índices en el árbol: (R.◇).

2° Aquellas reglas que provocan la bifurcación del árbol: (R.∨), (R.→) y (R.¬∧).

⁶⁵ La *ese* subscripta está por cualquiera de los sistemas tratados K, T, etcétera. A partir de esta regla, por tanto, podrá hablarse de las reglas (R_K.□), (R_T.□) y así sucesivamente.

3° El resto de las reglas de formación del árbol semántico.

Dados una secuencia abierta $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$ y un conjunto de expresiones no convenientemente marcadas $\Gamma \subset \mathcal{J}_n$, las reglas de formación del árbol deben aplicarse a Γ en orden de prioridad inverso al establecido en su división por grupos anterior.

Definición 8.6: Se dice que una secuencia $\mathcal{J}_n$ es cerrada si aparecen en ella dos expresiones de la forma β/i y $\neg\beta/i$, donde la fórmula β es atómica, esto es: no ocurre en ella ninguno de los signos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ni operadores lógicos y, por tanto, no se le puede aplicar ya ninguna de las reglas de construcción. El cierre de una secuencia se simboliza mediante un aspa al final de la misma. Cuando todas las secuencias de un árbol son cerradas se dice que el árbol mismo es cerrado.

Evidentemente, cuando una secuencia $\mathcal{J}$ es cerrada, el índice i al que aparecen asociadas las fórmulas β y $\neg\beta$ no puede ser interpretado como un conjunto modelo, puesto que por la definición 6.2 si $\beta \in \mu_i$ entonces $\neg\beta \notin \mu_i$. Luego en una secuencia tal los índices no representan conjuntos modelos,

debiendo ser interpretada la secuencia como un intento fallido por construir un S-modelo que satisfaga la fórmula inicial.

§9. El teorema fundamental de los árboles semánticos.

Definición 9.1: Se dice que una expresión β/i perteneciente a una secuencia $\mathcal{J}$ depende de cualquier otra expresión α/j aparecida en la secuencia si β/i es α/j o aparece en $\mathcal{J}$ por la aplicación de una de las reglas de formación del árbol sobre una expresión $\gamma/h \in \mathcal{J}$ que dependa de α/j .

Teorema 9.1: Si α es S-satisfactible entonces hay al menos una secuencia $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$ tal que si, para un índice cualquiera i y una fórmula cualquiera β , $\beta/i \in \mathcal{J}_n$ depende de $\alpha/1$ entonces β es también S-satisfactible.

Demostración: El teorema se demuestra por inducción sobre el número de aplicaciones de las reglas de formación del árbol. Sea m dicho número y $m=0$. Entonces $\mathcal{J}_n = \{\alpha/1\}$ y por hipótesis α es S-satisfactible. Quede demostrado el teorema para cualquier $m>0$ y demuéstrese ahora que también vale para

$m+1$. La $m+1$ -ésima aplicación de las reglas de formación del árbol puede ser de una de las siguientes:

- (R. $\wedge$) sobre una expresión del tipo $(\gamma \wedge \delta)/i$. Luego se obtienen en la secuencia $\mathcal{J}_n$ las expresiones γ/i y δ/i . Como $(\gamma \wedge \delta)$ es S-satisfactible por la hipótesis de la inducción hay un μ_i que es consistente, pues ha de cumplir la condición (C. $\neg$), tal que $(\gamma \wedge \delta) \in \mu_i$, $\gamma \in \mu_i$ y $\delta \in \mu_i$; y por las definiciones 6.2 (de conjunto modelo) y 6.5 (de S-satisfactibilidad), γ y δ han de ser ambas S-satisfactibles.

- (R. $\vee$) sobre una expresión de la forma $(\gamma \vee \delta)/i$. Luego se obtienen dos secuencias diferentes a partir de $\mathcal{J}_n$ tales que la primera es $\mathcal{J}_n + \gamma/i$ y la segunda es $\mathcal{J}_n + \delta/i$. Por hipótesis de la inducción $(\gamma \vee \delta)$ es S-satisfactible, lo que significa que hay un conjunto modelo μ_i tal que o bien $\gamma \in \mu_i$ o bien $\delta \in \mu_i$; de modo que por la definición 6.2 (de conjunto modelo) y la definición 6.5 (de S-satisfactibilidad) al menos una de ambas fórmulas γ o δ es S-satisfactible.

- (R. $\rightarrow$) sobre una expresión de la forma $(\gamma \rightarrow \delta)/i$. Luego se obtienen dos secuencias diferentes a partir de $\mathcal{J}_n$ tales que la primera es $\mathcal{J}_n + \neg \gamma/i$ y la segunda es $\mathcal{J}_n + \delta/i$. Por hipótesis de la inducción $(\gamma \rightarrow \delta)$ es S-satisfactible, de donde se sigue que hay un conjunto modelo μ_i tal que

o bien $\neg\gamma \in \mu_i$ o bien $\delta \in \mu_i$; de modo que nuevamente por la definición 6.2 (de conjunto modelo) y la definición 6.5 (de S-satisfactibilidad) al menos una de ambas fórmulas $\neg\gamma$ o δ es S-satisfactible.⁶⁶

• (R. $\Diamond$) sobre una expresión del tipo $\Diamond\delta/i$. Luego se obtiene δ/j , siendo j un índice nuevo tal que $i \sim_S j$. Hay, por tanto, un μ_i y un μ_j tales que $\Diamond\delta \in \mu_i$ y $\delta \in \mu_j$ y $\mu_i \mathcal{R} \mu_j$, y por tanto, por las definiciones 6.2 y 6.5, δ es S-satisfactible.

• (R_S. $\Box$) sobre una expresión de la forma $\Box\delta/i$. Luego se obtiene la secuencia $\langle \alpha/1, \dots, \Box\delta/i, \delta/j_1, \dots, \delta/j_n \rangle$, donde $j_1, \dots, j_n \in \mathcal{J}_n$ y $i \sim_S j_1, \dots, i \sim_S j_n$. Hay, por lo tanto, unos $\mu_i, \mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}$ tales que $\Box\delta \in \mu_i, \delta \in \mu_{j_1}, \dots, \delta \in \mu_{j_n}$, con $\mu_i \mathcal{R} \mu_{j_1}, \dots, \mu_i \mathcal{R} \mu_{j_n}$ y nuevamente por las definiciones 6.2 y 6.5, δ es S-satisfactible.⁶⁷

Definición 9.2: Se llama secuencia asociada $\mathcal{F}_i$ a la secuencia $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$ a la n-tupla ordenada $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \rangle$ tal que $\mathcal{F}_0$ es el conjunto de todas las fórmulas elementales de

⁶⁶ La prueba para (R. $\neg\wedge$), (R. $\neg\vee$), (R. $\neg\rightarrow$), etcétera se desarrolla en términos idénticos.

⁶⁷ La prueba para (R. $\neg\Diamond$) y (R. $\neg\Box$) se desarrolla de la misma forma.

$\mathcal{F}_n$ (es decir, las fórmulas atómicas y atómicas negadas que aparecen en $\mathcal{F}_n$) y $\mathcal{F}_m$, con $0 < m \leq n$, el más pequeño conjunto de fórmulas de $\mathcal{F}_n$ tal que:

1. a) $\neg\neg\delta/i \in \mathcal{F}_m$ sii $\delta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.
 b) $\neg(\delta \wedge \eta)/i \in \mathcal{F}_m$ sii $\neg\delta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$ ó $\neg\eta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.
 c) $\neg(\delta \vee \eta)/i \in \mathcal{F}_m$ sii una de las dos fórmulas $\neg\delta/i$ ó $\neg\eta/i$ pertenece a $\mathcal{F}_{m-1}$ y la otra pertenece a $\mathcal{F}_j$ con $j \leq m-1$.
 d) $\neg(\delta \rightarrow \eta)/i \in \mathcal{F}_m$ sii una de las dos fórmulas δ/i ó $\neg\eta/i$ pertenece a $\mathcal{F}_{m-1}$ y la otra pertenece a $\mathcal{F}_j$ con $j \leq m-1$.
 e) $\neg\Box\delta/i \in \mathcal{F}_m$ sii $\Diamond\neg\delta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.
 f) $\neg\Diamond\delta/i \in \mathcal{F}_m$ sii $\Box\neg\delta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.
 g) $\neg\Lambda x\delta(x) \in \mathcal{F}_m$ sii $\vee x\neg\delta(x) \in \mathcal{F}_{m-1}$.
 h) $\neg\vee x\delta(x) \in \mathcal{F}_m$ sii $\Lambda x\neg\delta(x) \in \mathcal{F}_{m-1}$.
2. $\delta \vee \eta/i \in \mathcal{F}_m$ sii $\delta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$ ó $\eta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.
3. $\delta \wedge \eta/i \in \mathcal{F}_m$ sii una de las fórmulas δ/i ó η/i pertenece a $\mathcal{F}_{m-1}$ y la otra pertenece a $\mathcal{F}_j$ con $j \leq m-1$.
4. $\delta \rightarrow \eta/i \in \mathcal{F}_m$ sii $\neg\delta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$ ó $\eta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.
5. $\Box\delta/i \in \mathcal{F}_m$ sii, siendo $\langle j, k, \dots, n \rangle$ la secuencia de todos los índices que aparecen en $\mathcal{F}_n$ tales que $i \sim_S j$, $i \sim_S k, \dots$, $i \sim_S n$, $\delta/j \in \mathcal{F}_{m-1}$, $\delta/k \in \mathcal{F}_{m-1}, \dots$, $\delta/n \in \mathcal{F}_{m-1}$.

6. $\nexists \delta/i \in \mathcal{F}_m$ sii hay un índice $j \in \mathcal{J}_n$ tal que $i \sim_S j$ y $\delta/j \in \mathcal{F}_{m-1}$.
7. $\wedge x \delta(x)/i \in \mathcal{F}_m$ sii, siendo $\langle a_k, \dots, a_n \rangle$ la secuencia de todos los parámetros que aparecen en $\mathcal{J}_n$ en cualesquiera fórmulas asociadas a cualquier índice j tal que $j \sim_S i$, $\delta(a_k)/i \in \mathcal{F}_{m-1}, \dots, \delta(a_n) \in \mathcal{F}_{m-1}$.
8. $\forall x \delta(x)/i \in \mathcal{F}_m$ sii aparece un parámetro a_k en la secuencia $\mathcal{J}_n$ tal que $\delta(a_k)/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.

Lema 9.1: *Para toda fórmula α y toda secuencia $\mathcal{J}_n$ no cerrada de $\mathcal{A}_S$, hay un S-modelo que S-satisface simultáneamente a todas las fórmulas de $\mathcal{J}_n$.*

Demostración: Este lema se demuestra por inducción sobre el subíndice de los conjuntos de la secuencia asociada a $\mathcal{J}_n$. Se crea un S-modelo tal que para todas las fórmulas pertenecientes a la secuencia asociada $\mathcal{F}_0$ a la secuencia $\mathcal{J}_n$, si $\alpha/i \in \mathcal{F}_0$ entonces $\alpha \in \mu_1$, siendo $\Omega = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$, donde m representa al número de índices que aparecen en $\mathcal{J}_n$ y $1 \leq i \leq m$, observando la relación de alternatividad las cláusulas propias del S-modelo en cuestión. Efectivamente, por la definición 6.2 de conjunto modelo, un S-modelo como el anterior hace S-satisfactibles a todas las fórmulas

elementales de $\mathcal{F}_0$ puesto que no se viola en ningún caso la condición (C. $\neg$), lo que es obvio ya que la secuencia no es cerrada. Supóngase ahora que el lema es válido para todas las fórmulas pertenecientes a $\mathcal{F}_n$. Se demuestra entonces que también lo es para todas las fórmulas pertenecientes a $\mathcal{F}_{n+1}$ indagando todos los casos posibles. Sea β una fórmula cualquiera tal que $\beta/i \in \mathcal{F}_{n+1}$:

1. a) Sea $\beta: \neg\neg\delta$. Por hipótesis $\neg\neg\delta/i \in \mathcal{F}_{n+1}$ y por la definición 9.8(1a) $\delta/i \in \mathcal{F}_n$. Como por hipótesis de la inducción δ es S-satisfactible es que hay un S-modelo $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ y un conjunto modelo $\mu_1 \in \Omega$ tal que $\delta \in \mu_1$ (definición 6.5). Si β no fuera S-satisfactible entonces, por la definición 6.4, para todo $\mu_1 \in \Omega$, no $\mu_1 \succ \neg\neg\delta$, de donde $\mu_1 \succ \neg\delta$ y por tanto $\neg\delta \in \mu_1$, contra (C. $\neg$) y la hipótesis de la inducción.
- b) Sea $\beta: \neg(\delta \wedge \eta)$. Por hipótesis, $\neg(\delta \wedge \eta)/i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Por la definición 9.8(1b) $\neg\delta/i \in \mathcal{F}_n$ ó $\neg\eta/i \in \mathcal{F}_n$. De este modo, como por la hipótesis de la inducción toda fórmula indexada perteneciente a $\mathcal{F}_n$ es S-satisfactible, por la definición 6.5 hay un S-modelo $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ y un $\mu_1 \in \Omega$ tal que $\neg\delta \in \mu_1$ ó $\neg\eta \in \mu_1$. Supóngase que β no es S-satisfactible. Entonces por la definición 6.4 es que para todo conjunto modelo $\mu_1 \in \Omega$, no $\mu_1 \succ \neg(\delta \wedge \eta)$, de donde $\mu_1 \succ \delta \wedge \eta$; entonces $\mu_1 \succ \delta$ y

$\mu_i \succ \eta$ y por tanto $\delta \in \mu_i$ y $\eta \in \mu_i$, contraviniendo (C. $\neg$).

c) Sea $\beta: \neg(\delta \vee \eta)$. La prueba se desarrolla como en el caso anterior.

d) Sea $\beta: \neg(\delta \rightarrow \eta)$. Como en los casos anteriores.

e) Sea $\beta: \neg \Box \delta$. Por hipótesis $\neg \Box \delta / i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Por la definición 9.8(1e) $\Diamond \neg \delta / i \in \mathcal{F}_n$ y, por la hipótesis de la inducción, $\Diamond \neg \delta$ es S-satisfactible, lo que significa, atendiendo a la definición 6.5, que hay un S-modelo $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ y un $\mu_i \in \Omega$ tal que $\Diamond \neg \delta \in \mu_i$; luego por (C. $\Diamond$) en la definición 6.2 hay un $\mu_j \in \Omega$ tal que $\mu_i \mathcal{R} \mu_j$ y $\neg \delta \in \mu_j$. En el supuesto de que β no fuese S-satisfactible, por la definición 6.4 para todo $\mu_i \in \Omega$ no $\mu_i \succ \neg \Box \delta$; de aquí se sigue que $\mu_i \succ \Box \delta$ y de aquí que $\forall \mu_j \in \Omega \mu_i \mathcal{R} \mu_j \mu_j \succ \delta$; y por tanto $\delta \in \mu_i$. Pero como por hipótesis de la inducción $\neg \delta \in \mu_j$ se viola la condición (C. $\neg$) en la definición 6.2 de conjunto modelo.

f) Sea $\beta: \neg \Diamond \delta$. Como en el caso anterior, pero apelando a (C. $\Box$).

2. Sea $\beta: \delta \vee \eta$. Por hipótesis, $\delta \vee \eta / i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Por la definición 9.8(2) se tiene que $\delta / i \in \mathcal{F}_n$ ó $\eta / i \in \mathcal{F}_n$ y por hipótesis de la inducción o bien δ es S-satisfactible o bien lo es η . Luego, por la definición 6.5 hay un S-modelo $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ y un $\mu_i \in \Omega$

tal que $\delta \in \mu_1$ ó $\eta \in \mu_1$. Pero si β no fuera S-satisfactible entonces, por la definición 6.4, para todo $\mu_1 \in \Omega$, no $\mu_1 \succ \delta \vee \eta$; entonces $\mu_1 \succ \neg(\delta \vee \eta)$; luego $\mu_1 \succ \neg\delta \wedge \neg\eta$; de aquí que tanto $\mu_1 \succ \neg\delta$ como $\mu_1 \succ \neg\eta$; y por tanto $\neg\delta \in \mu_1$ y $\neg\eta \in \mu_1$, contrariando (C. $\neg$).

3. Sea $\beta: \delta \wedge \eta$. La demostración sigue el curso del caso anterior. Hay que tener en cuenta para el paso de la inducción que por la definición 9.8(3) sólo una de las dos subfórmulas de β pertenecerá a $\mathcal{F}_n$, perteneciendo la otra a $\mathcal{F}_k$; pero $k \leq n$, por lo que el paso de la inducción es correcto.

4. Sea $\beta: \delta \rightarrow \eta$. Como en los casos anteriores.

5. Sea $\beta: \Box \delta$. Por hipótesis, $\Box \delta / i \in \mathcal{F}_{n+1}$. De nuevo por la definición 9.8(5) se tiene que $\langle \delta / j, \delta / k, \dots, \delta / m \rangle \in \mathcal{F}_n$, donde $j, k, \dots, m \in \mathcal{I}_n$ y $i \sim_S j, i \sim_S k, \dots, i \sim_S m$. Por hipótesis de la inducción, todas las fórmulas pertenecientes a $\mathcal{F}_n$ son S-satisfactibles. Luego hay en virtud de la definición 6.5 un S-modelo $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ y unos $\mu_j, \mu_k, \dots, \mu_m \in \Omega$ tales que $\mu_1 \mathcal{R} \mu_j, \mu_1 \mathcal{R} \mu_k, \dots, \mu_1 \mathcal{R} \mu_m$ y $\delta \in \mu_j, \delta \in \mu_k, \dots, \delta \in \mu_m$. Si β no fuera S-satisfactible entonces, apelando a la definición 6.4, para todo $\mu_1 \in \Omega$, no $\mu_1 \succ \Box \delta$; luego $\mu_1 \succ \neg \Box \delta$, lo que significa que $\mu_1 \succ \Diamond \neg \delta$ y por tanto que $\exists \mu_j \in \Omega \mu_1 \mathcal{R} \mu_j \mu_j \succ \neg \delta$, de donde se obtiene que $\neg \delta \in \mu_j$, contra (C. $\neg$) y

lo establecido en la hipótesis de la inducción.

6. Sea $\beta: \Diamond \delta$. De aquí que $\Diamond \delta / i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Por la definición 9.8(6) de secuencia asociada $\delta / j \in \mathcal{F}_n$, donde j es un índice tal que $j \in \mathcal{J}_n$ y $i \sim_S j$. Por hipótesis de la inducción δ es S-satisfactible. Luego por la definición 6.5 hay un S-modelo $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ y un $\mu_j \in \Omega$ tal que $\mu_i \mathcal{R} \mu_j$ y $\delta \in \mu_j$. En el supuesto de que β no fuese S-satisfactible entonces, por la definición 6.4, para todo $\mu_i \in \Omega$, no $\mu_i \succ \Diamond \delta$; es decir, $\mu_i \succ \neg \Diamond \delta$; luego $\mu_i \succ \Box \neg \delta$; de aquí que $\forall \mu_j \in \Omega$ $\mu_i \mathcal{R} \mu_j$ $\mu_j \succ \neg \delta$; y por tanto $\neg \delta \in \mu_j$, violándose una vez más la condición (C.7).

Lema 9.2: *Dada una fórmula S-satisfactible cualquiera α , hay al menos una secuencia $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$ tal que se puede mostrar un S-modelo que hace a todas las fórmulas de $\mathcal{J}_n$ simultáneamente S-satisfactibles.*

Demostración: Este segundo lema se demuestra por inducción sobre la longitud de una secuencia cualquiera $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$. Sea $\text{long}(\mathcal{J}_n) = 1$. Por tanto $\mathcal{J}_n = \langle \alpha / i \rangle$. Como por hipótesis α es S-satisfactible queda demostrado el lema. Supóngase ahora que ha sido demostrado para $\text{long}(\mathcal{J}_n) = m$ y demuéstrese para $\text{long}(\mathcal{J}_n) = m+1$. Sea β / i la $m+1$ -ésima fórmula

de la secuencia $\mathcal{J}_n$. Por hipótesis de la inducción hay un S-modelo que S-satisface a todas las fórmulas de la secuencia $\mathcal{J}_n - \beta/i$. Si una vez añadida a la secuencia la última fórmula no hay ningún S-modelo que satisfaga a todas las fórmulas de la secuencia entonces para cualquier S-modelo se puede encontrar una fórmula en la secuencia $\mathcal{J}_n$ que no es S-satisfactible. Esta fórmula ha de ser β , lo que va contra lo establecido por el teorema 9.1, ya que β/i depende de α/i por sucesivas aplicaciones de las reglas de formación del árbol y debe haber alguna secuencia en la que β sea S-satisfactible. Por tanto, debe haber un S-modelo que satisfaga a todas las fórmulas de la secuencia $\mathcal{J}_n = \langle \alpha/i, \dots, \beta/i \rangle$.

El siguiente teorema es una *prueba mediata* de corrección y completitud. Lo llamo teorema fundamental de los árboles semánticos.⁶⁸

⁶⁸ Tanto el nombre como el teorema mismo los debo a DÍAZ ESTÉVEZ, E.: "Reducciones finitas de árboles semánticos infinitos". Más adelante, en el capítulo ocho, se utilizará este teorema para demostrar la completitud de los sistemas normales de lógica modal proposicional. Es en este sentido que lo considero una *prueba mediata*.

Teorema 9.2: $\mathcal{A}_S\alpha$ es cerrado sii α no es S-satisfactible.

Demostración: Este teorema se demuestra en dos partes:

1ª Si α fuese S-satisfactible entonces por el lema 9.2 habría una secuencia $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}_S\alpha$ cuyas fórmulas serían simultáneamente S-satisfactibles. Pero si $\mathcal{J}_n$ fuese cerrada sería, por definición de cierre, porque aparecieran en la secuencia una fórmula atómica y su negación, por lo que las fórmulas de $\mathcal{J}_n$ no serían simultáneamente S-satisfactibles. De donde si $\mathcal{J}_n$ es cerrada entonces α no es S-satisfactible.

2ª Si $\mathcal{A}_S\alpha$ no es cerrado es porque hay una secuencia $\mathcal{J}_n$ abierta. Por el lema 9.1 si $\mathcal{J}_n$ es abierta entonces es posible mostrar un S-modelo que S-satisface a todas las fórmulas de $\mathcal{J}_n$. Luego α es S-satisfactible. Y por contraposición si α no es S-satisfactible entonces $\mathcal{A}_S\alpha$ es cerrado.

Corolario 1: α es S-válida ($\models_S \alpha$) sii $\mathcal{A}_S\neg\alpha$ es cerrado.

Corolario 2: α es consecuencia lógica de un conjunto no vacío de fórmulas Γ en el sistema S ($\Gamma \models_S \alpha$) sii hay una fórmula γ que es la fórmula que se consigue al conjuntar

mediante el signo $\wedge$ todas las fórmulas de un subconjunto finito $\Gamma' \subset \Gamma$ tal que $\mathcal{A}_S \neg(\gamma \rightarrow \alpha)$ es cerrado.

§10. El procedimiento de los árboles semánticos aplicado a los sistemas normales de lógica modal proposicional.

En virtud del corolario 1 del teorema 9.2 queda claro que puede utilizarse el procedimiento de los árboles semánticos como una prueba semántica de S-validez simplemente construyendo el árbol de la negación de la fórmula que se quiere demostrar S-válida y comprobando que cada una de las secuencias que lo constituyen es cerrada. Siguiendo esta línea se puede fácilmente mostrar que los diferentes S-modelos aquí tratados son los equivalentes semánticos de los sistemas axiomáticos normales de lógica modal; es decir: que toda fórmula demostrable en un sistema dado S es S-válida. Las siguientes son las pruebas de T-validez de los dos axiomas que caracterizan al sistema T de FEYS:⁶⁹

⁶⁹ Cfr. FEYS, R.: *Modal Logics*, p.: 123. Los D-modelos serán tratados en un capítulo aparte por su interés para la teoría de las normas.

[T] $\Box\alpha \rightarrow \alpha$

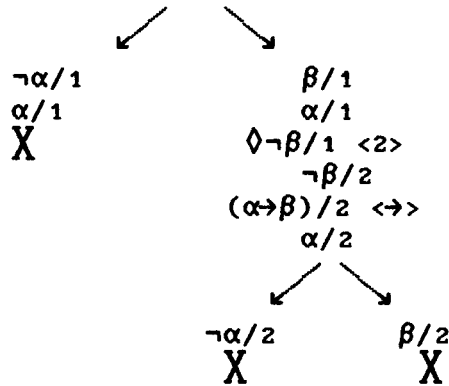
$$\begin{array}{c} \neg(\Box\alpha \rightarrow \alpha)/1 \langle \neg \rangle \\ \Box\alpha/1 \langle 1 \rangle \\ \neg\alpha/1 \\ \alpha/1 \\ X \end{array}$$

[T] o *axioma de la necesidad* es, consecuentemente al árbol desarrollado arriba y a lo expuesto, T-válido, ya que la única secuencia del árbol es cerrada, lo que significa que la fórmula $\neg(\Box\alpha \rightarrow \alpha)$ no tiene ningún T-modelo que la satisfaga.⁷⁰

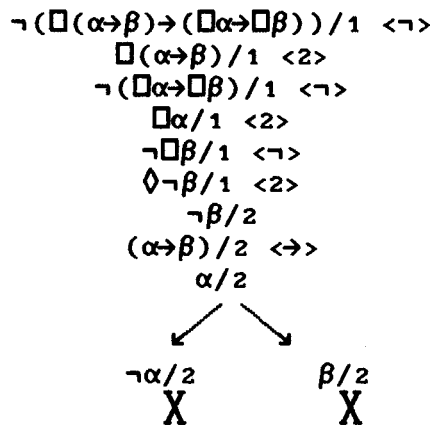
[K] $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

$$\begin{array}{c} \neg(\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta))/1 \langle \neg \rangle \\ \Box(\alpha \rightarrow \beta)/1 \langle 1, 2 \rangle \\ \neg(\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)/1 \langle \neg \rangle \\ (\alpha \rightarrow \beta)/1 \langle \rightarrow \rangle \\ \Box\alpha/1 \langle 1, 2 \rangle \\ \neg\Box\beta/1 \langle \neg \rangle \end{array}$$

⁷⁰ El axioma de la necesidad no sólo es T-válido, sino también B-válido, S4-válido y S5-válido, como se puede comprobar con facilidad. La verdad es que toda fórmula T-válida es B-válida o S4-válida y toda fórmula B-válida o S4-válida es S5-válida, a su vez, sin que se dé tal relación en el sentido contrario. De los sistemas normales de lógica modal, S5 es, evidentemente, el más fuerte, pudiéndose probar la inclusión del resto de los sistemas normales de lógica modal de proposiciones en este último mediante el procedimiento de los árboles semánticos.



Este segundo axioma del sistema T expuesto por FEYS es, evidentemente, el axioma característico del sistema K, el cual, por su simplicidad, sólo es interesante en la medida en que el resto de los sistemas denominados normales son una extensión suya. El árbol para [K], aplicando $(R_K. \Box)$ en lugar de $(R_T. \Box)$, sería el siguiente:



El siguiente es el árbol T de la negación del axioma característico de S4:

[S4] $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$

$$\begin{array}{l}
 \neg(\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha)/1 \langle \neg \rangle \\
 \Box\alpha/1 \langle 1, 2 \rangle \\
 \neg\Box\Box\alpha/1 \langle \neg \rangle \\
 \Diamond\Diamond\neg\alpha/1 \langle 2 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/2 \langle 3 \rangle \\
 \neg\alpha/3 \\
 \alpha/1 \\
 \alpha/2
 \end{array}$$

El árbol se acaba sin que se produzca cierre alguno si se emplea la regla $(R_T.\Box)$, lo que significa que [S4] no es T-válido desde el momento en que se puede establecer a partir de la secuencia abierta un modelo que T-satisface su negación. Sin embargo, se puede ampliar el árbol utilizando la regla $(R_{S4}.\Box)$ en lugar de $(R_T.\Box)$, esto es: marcando la segunda expresión del árbol también con $\langle 3 \rangle$, puesto que si $1 \sim 2$ y $2 \sim 3$ entonces, por la definición 8.5(c), $1 \sim_{S4} 3$, con lo que $\mathcal{A}_{S4} \neg[S4]$ queda del siguiente modo:

$$\begin{array}{l}
 \neg(\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha)/1 \langle \neg \rangle \\
 \Box\alpha/1 \langle 1, 2, 3 \rangle \\
 \neg\Box\Box\alpha/1 \langle \neg \rangle \\
 \Diamond\Diamond\neg\alpha/1 \langle 2 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/2 \langle 3 \rangle \\
 \neg\alpha/3 \\
 \alpha/1 \\
 \alpha/2 \\
 \alpha/3 \\
 X
 \end{array}$$

Otro tanto pasa con $\mathcal{A}_T[B]$, la negación del axioma característico del sistema B:

$$[B] \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha$$

$$\begin{array}{l} \neg(\alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha) / 1 <\neg> \\ \alpha / 1 \\ \neg \Box \Diamond \alpha / 1 <\neg> \\ \Diamond \Box \neg \alpha / 1 <2> \\ \Box \neg \alpha / 2 <2> \\ \neg \alpha / 2 \end{array}$$

$\mathcal{A}_T[B]$ se acaba sin cerrarse, por lo que puede mostrarse un modelo que T-satisface a la negación del axioma característico del sistema B. En realidad no sólo se trata en el caso anterior de $\mathcal{A}_T[B]$, sino que también es $\mathcal{A}_{S4}[B]$, por lo que [B] no es tampoco S4-válida. Lo mismo ocurre si se desarrolla $\mathcal{A}_B[S4]$, por lo que los sistemas S4 y B son independientes entre sí:

$$\begin{array}{l} \neg(\Box \alpha \rightarrow \Box \Box \alpha) / 1 <\neg> \\ \Box \alpha / 1 <1> \\ \neg \Box \Box \alpha / 1 <\neg> \\ \Diamond \Box \neg \alpha / 1 <2> \\ \Diamond \neg \alpha / 2 <3> \\ \neg \alpha / 3 \\ \alpha / 1 \end{array}$$

El siguiente árbol, aplicando $(R_B, \Box)$, sí es una prueba de que $\models_B[B]$:

$$\begin{array}{c}
\neg(\alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha) / 1 \quad \langle \neg \rangle \\
\alpha / 1 \\
\neg \Box \Diamond \alpha / 1 \quad \langle \neg \rangle \\
\Diamond \Box \neg \alpha / 1 \quad \langle 2 \rangle \\
\Box \neg \alpha / 2 \quad \langle 1 \rangle \\
\neg \alpha / 1 \\
X
\end{array}$$

Efectivamente, por la definición 8.5(b), como $1 \sim 2$ entonces $2 \sim 1$ y la expresión $\Box \neg \alpha / 2$ se marca con $\langle 1 \rangle$, dando lugar al cierre.

La S5-validez del axioma característico de S5 se demuestra con el cierre de $\mathcal{A}_{S5} \neg[S5]$, la negación de su axioma característico:

[S5] $\Diamond \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha$

$$\begin{array}{c}
\neg(\Diamond \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha) / 1 \quad \langle \neg \rangle \\
\Diamond \alpha / 1 \quad \langle 2 \rangle \\
\neg \Box \Diamond \alpha / 1 \quad \langle \neg \rangle \\
\alpha / 2 \\
\Diamond \Box \neg \alpha / 1 \quad \langle 3 \rangle \\
\Box \neg \alpha / 3 \quad \langle 1, 2 \rangle \\
\neg \alpha / 1 \\
\neg \alpha / 2 \\
X
\end{array}$$

Un árbol T (o S4 o B), en cambio, no se hubiera cerrado:

$$\begin{array}{c}
\neg(\Diamond \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha) / 1 \quad \langle \neg \rangle \\
\Diamond \alpha / 1 \quad \langle 2 \rangle \\
\neg \Box \Diamond \alpha / 1 \quad \langle \neg \rangle
\end{array}$$

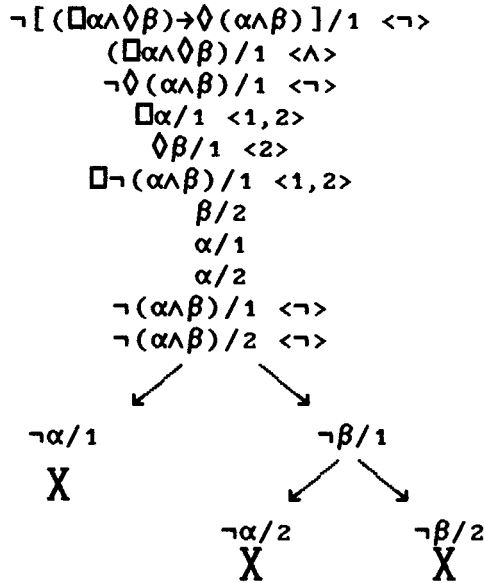
$$\begin{array}{l}
 \alpha/2 \\
 \Diamond \Box \neg \alpha/1 <3> \\
 \Box \neg \alpha/3 <3> \\
 \neg \alpha/3
 \end{array}$$

El sistema S5 es independiente de los demás sistemas normales de lógica modal de proposiciones, pero no así al revés, dándose el caso que [K], [T], [S4] y [B] son teoremas de S5, lo que resulta evidente si se comprueba que todo árbol T, S4 y B es a su vez un árbol S5.

§11. El uso de los árboles semánticos como tablas semánticas.

El procedimiento de los árboles semánticos no sólo permite demostrar la S-validez de aquellas fórmulas que son teoremas de cualquiera de los sistemas lógicos tratados, sino que también es efectivo para otros menesteres tales como obtener un modelo para las fórmulas que son S-satisfactibles o decidir si una fórmula es consecuencia lógica de otra u otras en un determinado sistema. En este último caso el procedimiento es simple si se apela al corolario 2 del teorema 9.2. Sea, por ejemplo, la siguiente demostración de consecuencia lógica mediante el procedimiento de los árboles semánticos:

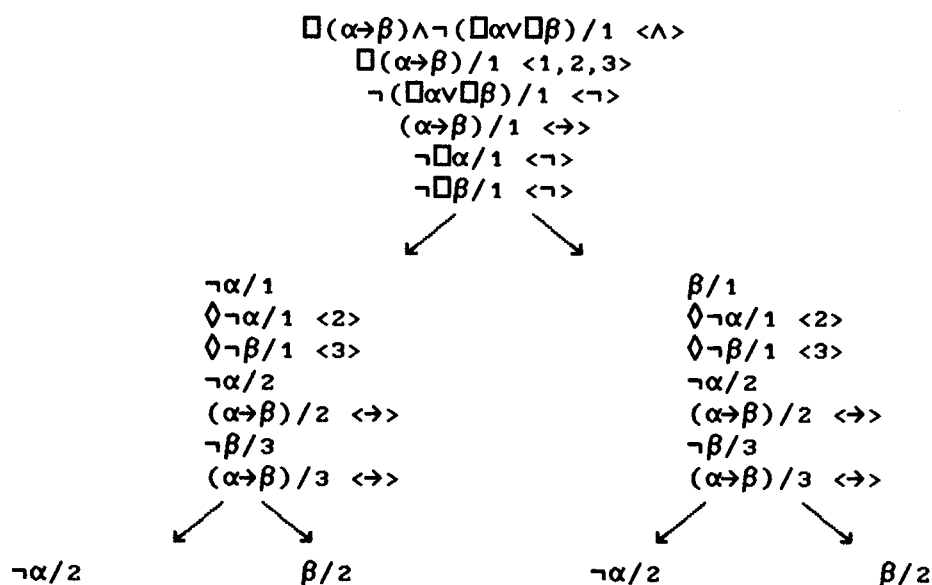
$$\Box\alpha, \Diamond\beta \vdash_T \Diamond(\alpha\wedge\beta)$$

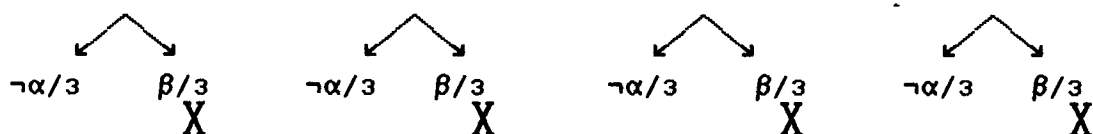


El uso de los árboles semánticos como tablas para obtener modelos de fórmulas S-satisfactibles se fundamenta en la demostración del lema 9.2. Se ha dicho que cuando un árbol tiene todas sus ramas cerradas la fórmula inicial no es S-satisfactible y, por tanto, su negación es universalmente válida. Pero si alguna de las secuencias que componen el árbol no se cierra entonces, merced a lo establecido por el lema 9.1, puede encontrarse un modelo efectivo que S-satisface a la fórmula inicial del siguiente modo: a partir de una de las secuencias abiertas se adjudica cada fórmula que aparezca en la misma a un conjunto modelo

μ_1 , μ_2 , etcétera, según el índice al que se encuentre asociada en el árbol y se marca con un 1 en la tabla (si el signo principal de la fórmula es $\neg$ entonces se coloca en la tabla la fórmula sin la negación, la cual, por la condición (C. $\neg$) en la definición 6.2, no pertenece al mismo conjunto modelo y se marca con un 0 en la tabla); la definición de índices relevantes provee la relación de alternatividad entre conjuntos modelos.

Con estos elementos es fácil establecer un modelo de cualquier fórmula satisfactible en cualquiera de los sistemas normales de lógica modal de proposiciones. Sea, por ejemplo, $\mathcal{A}_T \Box(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg(\Box\alpha \vee \Box\beta)$.

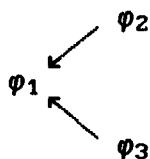




De las ocho secuencias que componen este árbol, cuatro son abiertas; lo que supone que se pueden dar cuatro T-modelos diferentes de la fórmula inicial. Basta con confeccionar cuatro tablas de las que doy una a título de ejemplo:

T	α	β	$(\alpha \rightarrow \beta)$	$\Box \alpha$	$\Box \beta$	$\Diamond \neg \alpha$	$\Diamond \neg \beta$	$(\Box \alpha \vee \Box \beta)$	$\Box (\alpha \rightarrow \beta)$	Σ
μ_1	0	-	1	0	0	1	1	0	1	1
μ_2	0	-	1	-	-	-	-	-	-	-
μ_3	0	0	1	-	-	-	-	-	-	-

Esta tabla corresponde a la primera secuencia abierta por la izquierda en el árbol. Se trata de un T-modelo de la fórmula $\Sigma: \Box(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg(\Box \alpha \vee \Box \beta)$ en el que $\Omega = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle$ y la relación $\mathcal{R}$ posee la propiedad reflexiva, de modo que se puede establecer el siguiente y simple gráfico que explicita la relación de relevancia entre índices en el árbol, estando φ_n por el conjunto de las fórmulas de la secuencia asociadas al índice n :



§12. Árboles semánticos infinitos por causa de la iteración de operadores de modalidad.

Los árboles semánticos son, como se ha visto, secuencias de fórmulas indexadas que se obtienen a partir de una fórmula inicial cualquiera. En esencia, se trata de un procedimiento analítico que *disuelve* en sus componentes básicos una fórmula del lenguaje, pudiéndose prever el desarrollo de la secuencia por la mera forma de la fórmula inicial, ya que es factible diseñar árboles semánticos característicos de tipos diferentes de fórmulas si se las agrupa siguiendo criterios puramente estructurales. Esta observación, por otra parte obvia, tiene interés para el estudio de aquellas secuencias que, en virtud de la aplicación de las reglas de formación (R. $\Box$) y (R. $\Diamond$) se desarrollan infinitamente sin que se dé un cierre efectivo de todas sus ramas o queden todas las expresiones que las componen debidamente marcadas; lo cual significa que se puede encontrar algún tipo de fórmula cuyo árbol ni se

cierra ni se termina, por lo que se hace imposible decidir, apelando al procedimiento descrito, si la fórmula inicial es S-satisfactible o no lo es, así como mostrar un S-modelo efectivo en el caso de que lo fuera.

El método de los árboles semánticos pretende ser decisorio. De hecho, tal y como queda expuesto, es un procedimiento efectivo de decisión para algunos sistemas normales de lógica modal de proposiciones como, por ejemplo, para el sistema modal T, pero falla por lo que respecta a los sistemas S4 y S5, ya que para ambos cabe la posibilidad de encontrar árboles modales que se desarrollan hasta el infinito en el sentido apuntado más arriba. Obsérvese, por ejemplo, $\mathcal{A}_{S4} \neg(\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha)$:⁷¹

$$\begin{array}{l} \neg(\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha) / 1 \langle \neg \rangle \\ \Box\Diamond\alpha / 1 \langle 1, 2, 3, 4 \dots \rangle \\ \neg\Diamond\Box\alpha / 1 \langle \neg \rangle \\ \Diamond\alpha / 1 \langle 2 \rangle \\ \Box\Diamond\neg\alpha / 1 \langle 1, 2, 3, 4 \dots \rangle \\ \alpha / 2 \\ \Diamond\alpha / 2 \langle 3 \rangle \end{array}$$

⁷¹ Esta fórmula es usada también como ejemplo por HUGHES & CRESSWELL para ilustrar su regla de las cadenas repetidoras, con el que el aquí expuesto, sugerido por el profesor ALFREDO BURRIEZA, tiene un indudable débito. Cfr. HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.J.: *Introducción a la lógica modal*, pp.: 98-101.

$$\begin{array}{c}
\Diamond \neg \alpha / 1 < 4 > \\
\Diamond \neg \alpha / 2 \\
\alpha / 3 \\
\Diamond \alpha / 3 \\
\Diamond \neg \alpha / 3 \\
\neg \alpha / 4 \\
\Diamond \alpha / 4 \\
\Diamond \neg \alpha / 4 \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots
\end{array}$$

La existencia de secuencias infinitas en S4 y S5 se debe a la proliferación de índices generada por la iteración de operadores modales y a la particular naturaleza de la relación de alternatividad, que es transitiva en ambos sistemas. En general puede mostrarse que si en una secuencia cualquiera $\mathcal{S}$ de un árbol S4 o S5 aparece una fórmula tal que uno o más operadores de posibilidad caen bajo el alcance de uno o más operadores de necesidad o bien $\mathcal{S}$ es cerrada o bien no se termina, desarrollándose indefinidamente.

Efectivamente, las segunda y cuarta fórmulas indexadas de la secuencia anterior son del tipo descrito. De hecho, si se observa la secuencia con detenimiento, son ellas las responsables de que el árbol se prolongue hasta el infinito. Generalizando la estructura de esta secuencia se observa el

La estructura de un árbol S5 infinito es similar aunque algo más compleja puesto que todas las expresiones cuyo signo principal sea el operador $\Box$ han de marcarse con la totalidad de los índices aparecidos en la secuencia.

Lo importante aquí es apreciar que en una secuencia sin fin de este tipo más tarde o más temprano acaban reproduciéndose estructuras anteriormente aparecidas. En el caso anterior, las fórmulas asociadas a los índices m y n son las mismas y, por el desarrollo del árbol, puede preverse que a partir del punto donde ha quedado abandonado se volverá a reproducir una secuencia idéntica de fórmulas asociadas a otro índice aún por aparecer. Estas observaciones llevan a la conclusión de que, interpretados los índices como mundos posibles, si μ_n es una alternativa a μ_m y lo componen exactamente los mismos enunciados que a éste entonces μ_m y μ_n son el mismo mundo posible; o dicho de otro modo, los conjuntos modelos μ_m y μ_n son iguales, puesto que los componen los mismos elementos, lo que hace que la relación R que mantienen pueda reinterpretarse matemáticamente como una relación de igualdad: $\mu_m = \mu_n$. Tal apreciación permite definir una nueva e importante noción referente a los índices que aparecen en una secuencia arbórea:

Definición 12.1: Se dice que un índice j es congruente con otro índice i en la secuencia $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}_{S\alpha}$ (abreviadamente, $i \approx j$) sii $i \sim j$ y para toda fórmula $\gamma \in \mathcal{J}$ asociada a j , γ también está asociada a i .

El concepto de congruencia va a permitir obtener un procedimiento para evitar el decurso infinito de la secuencia mediante la siguiente restricción a las reglas (Rs4.□) y (Rs5.□):⁷³

Restricción: Si $i \approx j$ en la secuencia $\mathcal{J}$ y para toda fórmula $\gamma \in \mathcal{J}$, $\gamma/i \in \mathcal{J}$ y $\gamma/j \in \mathcal{J}$ entonces se escribe el signo $\dagger$

⁷³ DAVIDSON, JACKSON & PARGETTER proponen en su artículo "Modal Trees for T and S5" una regla especial para S5 que evita el decurso hasta el infinito de los árboles para este sistema. Esta regla es, traducida a la terminología empleada por mí, la siguiente:

(Rs5.◇): Si la primera expresión de $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}_{S\alpha}$ no convenientemente marcada es de la forma $\Diamond \beta/i$ entonces se añade a la secuencia $\mathcal{J}$ la expresión β/j , donde j es el menor índice mayor que i no aparecido hasta el momento en la secuencia, excepto en el caso de que ya hubiera en $\mathcal{J}$ una expresión del tipo β/k en cuyo caso $j=k$, y se marca con $\langle j \rangle$.

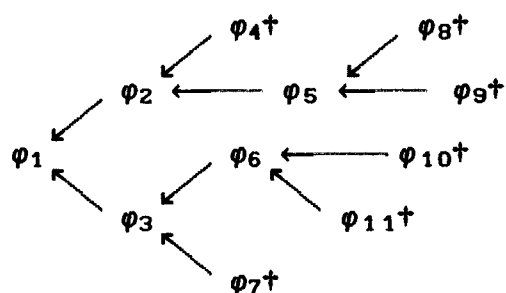
En este sentido cfr. también BURRIEZA, A. & LEÓN, J.C.: "Modal Trees: Correction to a Decision Procedure for S5 (and T)", página 386.

tras cada fórmula $\gamma/j \in \mathcal{J}$ y se la considera marcada a efectos exclusivamente de la propia secuencia $\mathcal{J}$.

De modo que el árbol anterior se desarrollaría de la siguiente guisa:

$$\begin{array}{l}
 \neg(\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha)/1 \langle \neg \rangle \\
 \Box\Diamond\alpha/1 \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rangle \\
 \neg\Diamond\Box\alpha/1 \langle \neg \rangle \\
 \Diamond\alpha/1 \langle 2 \rangle \\
 \Box\Diamond\neg\alpha/1 \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/1 \langle 3 \rangle \\
 \alpha/2 \\
 \Diamond\alpha/2 \langle 4 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/2 \langle 5 \rangle \\
 \neg\alpha/3 \\
 \Diamond\alpha/3 \langle 6 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/3 \langle 7 \rangle \\
 \alpha/4 \dagger \\
 \Diamond\alpha/4 \dagger \\
 \Diamond\neg\alpha/4 \dagger \\
 \neg\alpha/5 \\
 \Diamond\alpha/5 \langle 8 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/5 \langle 9 \rangle \\
 \alpha/6 \\
 \Diamond\alpha/6 \langle 10 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/6 \langle 11 \rangle \\
 \neg\alpha/7 \dagger \\
 \Diamond\alpha/7 \dagger \\
 \Diamond\neg\alpha/7 \dagger \\
 \alpha/8 \dagger \\
 \Diamond\alpha/8 \dagger \\
 \Diamond\neg\alpha/8 \dagger \\
 \neg\alpha/9 \dagger \\
 \Diamond\alpha/9 \dagger \\
 \Diamond\neg\alpha/9 \dagger \\
 \alpha/10 \dagger \\
 \Diamond\alpha/10 \dagger \\
 \Diamond\neg\alpha/10 \dagger \\
 \neg\alpha/11 \dagger \\
 \Diamond\alpha/11 \dagger \\
 \Diamond\neg\alpha/11 \dagger
 \end{array}$$

El árbol se termina en seguida sin ningún problema y es fácil construir a partir de él un modelo que S4-satisface a la fórmula $\neg(\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha)$. En éste se consideran únicamente cinco mundos posibles: μ_1 , μ_2 , μ_3 , μ_5 y μ_6 , de forma que el siguiente diagrama representa la relación de alternatividad entre ellos a través de la relación de relevancia entre los índices de la secuencia:

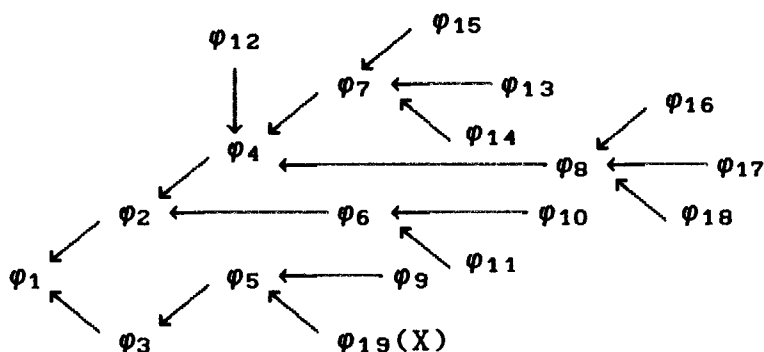


La tabla que sigue, unida al diagrama anterior, provee un S4-modelo para la fórmula $\neg(\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha)$, interpretados los conjuntos φ_1 , φ_2 , etc. como conjuntos modelos:⁷⁴

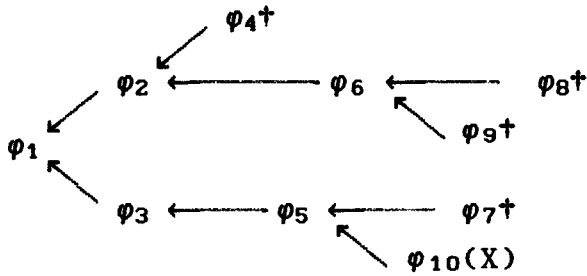
⁷⁴ Los conjuntos de fórmulas seguidos por el signo $\dagger$ no se tienen en cuenta para la confección del modelo que satisface a la fórmula inicial, aunque los coloco en el diagrama para una mejor comprensión del desarrollo del árbol semántico anterior.

S4	α	$\Box\alpha$	$\Diamond\alpha$	$\Box\Diamond\alpha$	$\Diamond\Box\alpha$	$\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha$
μ_1	-	0	1	1	0	0
μ_2	1	0	1	-	-	-
μ_3	0	0	1	-	-	-
μ_5	0	0	1	-	-	-
μ_6	1	0	1	-	-	-

Este procedimiento es útil también para evitar árboles excesivamente complejos en determinadas pruebas de S-validez. Así por ejemplo, en el caso de $\mathcal{A}_{S4} \neg (\Box\Diamond\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha)$, donde es el caso que $\models_{S4} \Box\Diamond\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$, se obtiene el siguiente diagrama de la relación de relevancia si no se aplica la restricción:



En cambio, aplicando la restricción, el diagrama (y, por supuesto, $\mathcal{A}_{S4} \neg (\Box\Diamond\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha)$) se vuelve más simple:



En este caso, los dos diagramas expuestos no pueden considerarse como una representación de la relación de alternatividad puesto que los conjuntos de fórmulas φ_1 , φ_2 , etc. no pueden ser interpretados como conjuntos modelos, al ser el árbol cerrado, lo que se simboliza en los diagramas anteriores mediante el aspa entre paréntesis que aparece justamente al lado del conjunto de fórmulas inconsistente. Aun así, cada diagrama ilustra perfectamente la estructura de las secuencias arbóreas a las que me he referido, al menos a los efectos pertinentes.

CAPÍTULO CINCO:

CUANTIFICACIÓN Y MODALIDAD.

§13. La opacidad referencial en lógica modal alética de predicados con identidad.

La cuantificación en contextos modales supone la emergencia de algunos problemas que ya fueron apuntados en el capítulo dos y que afectan principalmente a un posible tratamiento extensional de las modalidades. El fallo de los principios de sustituibilidad de la identidad (SI) y de generalización existencial (GE) exige aquí el análisis de las causas y un especial esfuerzo por encontrar una solución que permita ampliar el método de decisión expuesto en el capítulo anterior a la lógica de predicados de primer orden con identidad, dejando a salvo ambos principios.

El fallo de (SI) se relaciona con la existencia de lo que QUINE llama "contextos referencialmente opacos",

"opacidad referencial" o simplemente "opacidad".⁷⁵ Un ejemplo bastará para establecer claramente el concepto. Sea éste el enunciado verdadero

(15) «"Fígaro" lleva tilde en su sílaba tónica».

Se dice que el término entrecomillado "Fígaro" que aparece en (15) no ocupa una posición puramente referencial desde el momento en que el enunciado

(16) «Fígaro = Larra»

es cierto y sin embargo no es posible sustituir un término por el otro en (15) *salva veritate*, puesto que como resultado se obtendría el enunciado falso

(15') «"Larra" lleva tilde en su sílaba tónica».

La opacidad referencial de (15) y (15') -a partir de ahora adopto la terminología de QUINE- se debe al hecho de

⁷⁵ Cfr. QUINE, W.V.O.: *From a Logical Point of View*, pp.: 139-159 y *Palabra y objeto*, pp.: 153-166 y 175-179.

que los términos "Fígaro" y "Larra" no se usan, como en (16), sino que sólo se mencionan. El entrecomillado determina aquí un contexto referencialmente opaco. QUINE reduce a éste otros casos de opacidad. Por ejemplo, el que se da en el enunciado

(17) «Giorgione era llamado así a causa de su gran estatura»,

donde no se puede sustituir el apodo del pintor italiano por su apellido, Barbarelli de Castelfranco, sin que el enunciado de esta forma obtenido se vuelva falso. Tanto "Giorgione" como "Giorgio Barbarelli de Castelfranco" tienen un mismo y único referente, pero no son términos intercambiables en (17) por la misma razón por la que no lo eran "Fígaro" y "Larra" en (15), lo que se ve claramente cuando se parafrasea (17) del modo siguiente:

(17bis) «Giorgione era llamado "Giorgione" a causa de su gran estatura».

El término "Barbarelli de Castelfranco" puede sustituir a la instancia referencial del término "Giorgione" en (17bis) *salva veritate*, pero no a la instancia no referencial, que

es la que aparece entrecomillada.

El entrecomillado proporciona un buen ejemplo para comprender qué son los contextos opacos y cómo se comporta la referencialidad en ellos. Sin embargo, no es el caso más interesante para los propósitos de este capítulo. También QUINE hace hincapié en señalar que en los contextos que caen bajo el alcance de determinados verbos y giros lingüísticos el fallo de (SI) se debe a las mismas causas que en los ejemplos anteriores. "Creer", por ejemplo, es uno de los verbos que intrducen contextos opacos en el discurso. El ejemplo que aparece en el capítulo dos puede servir de nuevo:

(18) «Juan cree que Larra fue un célebre escritor español del siglo XIX».

Si se sustituye en (18), que es un enunciado efectivamente verdadero, el término "Larra" por "Fígaro", merced a (16) se obtiene el enunciado

(18') «Juan cree que Fígaro fue un célebre escritor español del siglo XIX»,

cuyo valor de verdad depende de las creencias de Juan y no tiene por qué ser el mismo de (18). El enunciado que introduce el verbo "creer" en (18) y que se encuentra a su derecha se halla en un contexto opaco, lo que significa que el término "Larra" no es sustituible *salva veritate* por el término correferente "Fígaro". Se verá mejor si se transforma (18) en el enunciado

(18bis) «Juan cree "Larra fue un célebre escritor español del siglo XIX"».

Idéntico fenómeno se observa en otros verbos de los llamados de actitud proposicional como "saber", "percibir", "esperar", etcétera. Para evitar la opacidad introducida por éstos, QUINE propone transformar el enunciado (18), siguiendo con el ejemplo, en el enunciado

(18*) «Juan cree como un célebre escritor español del siglo XIX a Larra»,

interpretando el verbo "creer como un célebre..." como si de un predicado diádico se tratara, en cuyo caso el término

"Larra" sí mantendría una posición puramente referencial.⁷⁶
 Llamaré a (18bis) la interpretación opaca de (18) y a (18*)
 la interpretación transparente.

En otros casos esta doble interpretación de un
 enunciado modal es mucho más natural y evidente. Sirva como
 ejemplo el enunciado

(19) «Juan vio en la puerta al decano de la facultad»

y sea verdadero el enunciado

(20) «El decano de la facultad es el presidente del
 claustro universitario».

Si merced a estos dos enunciados se colige

(21) «Juan vio en la puerta al presidente del claustro
 universitario»,

⁷⁶ Cfr. QUINE, W.V.O.: *From a Logical Point of View*, pp.:
 141-143 y también CHURCH, A.: "On Carnap's analysis of
 statements of assertion and belief".

y en el supuesto de que Juan no sepa que el decano de la facultad y el presidente del claustro universitario son la misma persona, (19) puede considerarse transparentemente -en cuyo caso (21) es un enunciado verdadero- o puede considerarse de forma opaca -lo que haría de (21) un enunciado falso-. Todo depende de la interpretación que se haga del verbo de actitud proposicional: si por ver se entiende percibir, se introduce un contexto opaco y, por tanto, hay que enfrentar (21) como un enunciado intensional; si por ver se entiende abarcar algo dentro del propio campo ocular mediante el órgano de la vista y en un momento dado entonces se trata el verbo como si fuera un predicado diádico que pone en relación al sujeto con un campo visual.

La consideración opaca de los verbos de actitud proposicional comporta su tratamiento lógico modal; es decir, su formalización como operadores lógicos. En este caso, si se piensa en los ejemplos anteriores, lo que se establece es una relación entre un sujeto, Juan, y el objeto de sus creencias o percepciones, que es un estado de cosas. Por el contrario, su interpretación transparente permite tratar los enunciados en que aparecen de forma puramente extensional, puesto que los verbos de actitud proposicional se consideran como predicados diádicos que ponen en relación

dos términos que se refieren a sendos individuos.

Esto que se ha discutido en relación con los verbos de actitud proposicional es trasladable a las modalidades aléticas tal cual. Los enunciados (3)-(5) constituyen un buen ejemplo de opacidad referencial introducida por el término "es necesario". Del mismo modo se encuentra un contexto opaco en el siguiente enunciado:

- (22) «Es necesario que los animales cordiados tengan corazón».

La zoología enseña que corazón y riñón son dos vísceras que aparecen siempre juntas y que no hay ningún animal, conocido al menos, que posea una sin tener también la otra. Por lo tanto, a la luz de la experiencia, el enunciado

- (23) «los animales cordiados = los animales reniados»

es verdadero, pero no así el enunciado

- (22') «Es necesario que los animales reniados tengan corazón»,

que resulta de sustituir un término por otro en (22), puesto que nada obliga lógicamente a que ambas vísceras aparezcan conjuntamente en las mismas especies.⁷⁷

En definitiva, la posible interpretación opaca de determinados enunciados es lo que hace que el principio (SI) falle en los mismos, dando lugar a la introducción de la intensionalidad en la lógica cuando ésta se ocupa de ellos. También es la causa del fallo de (GE), como señala acertadamente QUINE, puesto que no es posible cuantificar en contextos opacos.⁷⁸ Por tanto, la interpretación transparente de los enunciados en los que aparecen verbos de actitud proposicional o giros de modalidad, tratándolos como si fueran predicados diádicos, evita el fallo del principio (SI), y aquéllos se dejan tratar de forma puramente extensional, con lo que la lógica general de las modalidades

⁷⁷ Se está hablando siempre de necesidad lógica. No entro aquí en si es *fisiológicamente necesario* o no que los animales reniados también tengan corazón.

⁷⁸ QUINE en *Palabra y Objeto* establece la siguiente máxima: «Un término singular indeterminado situado fuera de una construcción opaca no liga variable dentro de la construcción». En último análisis esta máxima supone que un cuantificador situado a la izquierda de un operador modal no podrá ligar un término individual situado a su derecha. Cfr. loc. cit., página 159.

se reduce a la lógica de predicados de primer orden.

Encuentro varias objeciones a esta propuesta de QUINE. En primer lugar, si bien es verdad que el fallo del principio (SI) en contextos intensionales se debe a la interpretación opaca de determinados enunciados, o dicho de otro modo, si bien es cierto que la interpretación opaca de determinados contextos los hace intensionales, también lo es que la propuesta quineana acaba con la enfermedad merced a la muerte del enfermo y no sugiere otra cosa que el abandono del estudio de la lógica modal por inútil, a pesar de la larga tradición que tiene detrás el análisis lógico de los verbos modales.

La segunda objeción es más importante. Pueden encontrarse fácilmente enunciados modales para los que no es posible de ningún modo dar una interpretación transparente. Considérese, por ejemplo, el enunciado

(24) «Juan cree que vio en la puerta al decano de la facultad».

La iteración de verbos de actitud proposicional en este enunciado no permite un tratamiento completamente trans-

parente. En cualquier caso sólo es posible interpretar transparentemente el contexto más restringido que introduce el verbo "vio", pero no el más amplio, bajo cuyo alcance se encuentra, introducido por el verbo "cree", que relaciona ineludiblemente el término "Juan" con un estado de cosas y no con un individuo, lo que hace del contexto en el que se encuentra el término individual "el decano de la facultad" opaco en última instancia.

Existe aún otra objeción importante a la teoría de QUINE. Se trata de la conocida paradoja de Sleigh-Kaplan,⁷⁹ que el propio QUINE aceptó como una contraprueba de su propuesta, al menos en los términos en que él la desarrolló en su artículo "Quantifiers and Propositional Attitudes".⁸⁰

⁷⁹ La paradoja recibe el nombre de los autores que la propusieron por vez primera, al parecer independientemente el uno del otro. Cfr. SLEIGH, R.C.: "On a Proposed System of Epistemic Logic", *Noûs* 2 (1968), pp.: 391-398 y KAPLAN, D.: "Quantifying in", *Synthese*, 19 (1968), pp.: 178-214.

⁸⁰ QUINE, W.V.O.: "Quantifiers and Propositional Attitudes", *The Journal of Philosophy*, vol. 53 (1956), pp.: 177-187. Reimpreso en *The Ways of Paradox*, pp.: 183-194, a cuya paginación me remito en las referencias de los siguientes párrafos. QUINE aceptó la validez del argumento en los siguientes términos: «En 1956 yo pensaba que si

(1) Raúl cree que Ortcutt es un espía,
entonces, suponiendo que Ortcutt existe,
(2) Raúl cree de Ortcutt que es un espía.

La paradoja puede desarrollarse del modo siguiente.

Supóngase que se modifica (24) en el siguiente sentido:

(25) «Juan cree que el hombre que vio en la puerta es decano de facultad».

La interpretación transparente de (25), que permite sin problemas la generalización existencial, obliga a QUINE a definir el sentido transparente de "cree" frente a su sentido opaco. QUINE establece en el mencionado artículo respecto a esta distinción que el tipo de exportación que lleva desde la interpretación opaca de (25), que escribo (25)_o, a su interpretación transparente, que escribo (25)_T,

Posteriormente, sin embargo, Sleight planteó una dificultad relacionada con este punto. Como todos nosotros, Juan cree que hay espías, pero, a diferencia de Raúl, no abriga sospechas acerca de ninguna persona determinada. Juan también cree, razonablemente, que no hay dos nacimientos que sean por completo simultáneos. En consecuencia, Juan cree que el espía más joven es un espía. Por lo tanto, si la inferencia de (1) a (2) es correcta, Juan cree del espía más joven que es un espía. Pero entonces, por generalización existencial a partir de esta construcción transparente, podemos inferir después de todo que hay alguien a quien Juan cree un espía. Kripke me observó que esta paradoja de Sleight puede resolverse si rechazamos la forma de inferencia que lleva de (1) a (2)». Cfr. *Synthese*, vol. 19, n^{os} 1-2, (1968), pp.: 307-308.

es de implicación.⁸¹ SLEIGH propone entonces la necesidad de admitir la siguiente definición del sentido transparente de "cree", que reescribo:

(25)_T es verdadera sii hay un término singular definido *a* tal que «*a* = el hombre que Juan vio en la puerta» es verdadera y (25(*a*/el hombre que Juan vio en la puerta))_O es verdadera.⁸²

Pero si, como es lógico pensar, Juan cree que hay decanos y cree también, por ejemplo, como dice KAPLAN,⁸³ que difieren ampliamente en altura y que por tanto uno de ellos es el más bajo de todos, entonces es verdadero el enunciado

(26)_O «Juan cree que el decano más bajo de todos es decano».

⁸¹ Cf. op. cit., página 190.

⁸² Cfr. SLEIGH, R.C.: "Sobre el artículo de Quine 'Cuantificadores y actitudes proposicionales'" en SIMPSON T.M. (ed.): *Semántica filosófica. Problemas y discusiones*, página 236.

⁸³ Cfr. KAPLAN, D.: "Quantifying in", partes VI y VII. El argumento de KAPLAN es muy parecido al de SLEIGH, hasta el punto de que utilizan ejemplos similares.

Pero por la definición anterior se obtiene que también (26)_T es verdadera, por lo que se puede aplicar (GE) para obtener

(25') « $\forall x$ (Juan cree que x es decano de facultad)»,

contrariamente a los presupuestos de QUINE.

De la paradoja de Sleigh-Kaplan solamente se sigue que no queda nada claro el sentido en que la interpretación transparente de un enunciado se relaciona con la interpretación opaca para sustituirla con ventaja frente al problema de la cuantificación, y en concreto que esta relación no puede ser de implicación. Esto es suficiente motivo, según creo, junto con las otras razones apuntadas, para considerar que interesa mantener la interpretación opaca de los enunciados que incluyen nociones modales frente a la interpretación transparente propuesta por QUINE. Lo que hace necesario encontrar un método que permita *traducir* a una semántica extensional la intensionalidad asociada a ese carácter referencialmente opaco de los enunciados modales. Para ello hay que añadir a la semántica de los mundos posibles descrita en los capítulos anteriores varios conceptos nuevos que paso a considerar.

§14. Identificación cruzada y funciones de individuación.

La interpretación opaca de los enunciados modales es la fuente de su intensionalidad que, como se ha dicho, impide la cuantificación con sentido sobre variables individuales que aparezcan en contextos referencialmente opacos. En definitiva, puede decirse que el fallo de (SI) provoca el fallo de (GE).⁸⁴ Sin embargo, la interpretación opaca de estos enunciados es más natural y provechosa desde el punto de vista de la lógica que la interpretación transparente, por lo que no es posible sino a riesgo de pagar un muy alto precio prescindir de la primera en favor de esta otra. Es necesario por todo ello que la semántica de los mundos posibles provea un modo de resolver el fallo de ambos principios sin renunciar a dicha interpretación.

En lógica, los términos individuales cumplen una

⁸⁴ Esta es la opinión que mantiene QUINE tras realizar un análisis similar al que aparece en el párrafo anterior. HINTIKKA, sin embargo, piensa que ambos fallos son independientes. Cfr. supra nota 45.

función similar a la que corresponde a los nombres propios en las lenguas naturales. Los términos individuales han de tener como referente inmediato individuos concretos del dominio, pero esto no ocurre en los contextos referencialmente opacos, en los que la referencia de los términos individuales se vuelve ambigua y oscura. Los contextos intensionales, en concreto los propiamente modales, anulan esta función referencial de los términos individuales en relación con aspectos determinados de la lógica de predicados de primer orden, como en el caso de la cuantificación. Ya me he referido a la máxima que QUINE establece al respecto. Basándose en ese principio, el filósofo norteamericano llega a negar la posibilidad de establecer una lógica modal cuantificada.⁸⁵

⁸⁵ «De hecho, si falla la referencialidad de forma que vicie (GE) y (SI), la cuantificación tiene poco sentido. Porque ¿Qué sentido tendría preguntar si existe un individuo que satisface una sentencia abierta $F(x)$ si la satisfacción por parte de un individuo de esta sentencia abierta no depende de él sino también de la forma en que nos referimos a él?». Cfr. HINTIKKA, J.: "Quine on quantifying in: a dialogue" en *The Intentions of Intentionality and Other New Models for Modalities*, p.: 106. HINTIKKA toma estas palabras de una cinta magnética grabada durante una discusión mantenida entre DAGFIN FØLLESDAL, DAVID KAPLAN, BURTON DREBEN, CHARLES PARSONS, el propio JAAKKO HINTIKKA y WILLARD VAN ORMAN QUINE, a quien las atribuye por su contenido aunque no afirma que las pronunciara el mismo QUINE. Aduzco, sin embargo, este texto porque considero que resume

Cuando no cabe la posibilidad de determinar de forma unívoca qué individuo o individuos del dominio satisfacen en un momento concreto un enunciado del tipo indicado, que en la notación propuesta podría escribirse $\alpha(x)$, tampoco tiene sentido un enunciado en el que se diga que alguno o todos los individuos del dominio lo satisfacen. Esto es: no tiene sentido ningún enunciado cuantificado del tipo $\forall x\alpha(x)$ o del tipo $\exists x\alpha(x)$. O lo que es igual: no es posible inferir de la sentencia $\alpha(b)$ la sentencia $\forall x\alpha(x)$, que es precisamente lo que permite hacer el principio lógico de generalización existencial.

En definitiva, QUINE tiene razón y no es posible una lógica modal con cuantificadores a menos que pueda encontrarse un método que permita establecer de forma unívoca la correspondencia entre los términos y sus respectivos *relata*, aun cuando dichos términos aparezcan en contextos opacos y, por tanto, intensionales, lo que vendría a significar la urgencia de hallar un método que

correctamente las ideas que QUINE expresa en diversos lugares.

posibilitase el tratamiento extensional de los denominados lenguajes intensionales. La solución a este problema va a llevar el título genérico de identificación cruzada y está íntimamente relacionada con la esencia misma del concepto ya familiar de mundo posible.⁸⁶

La identificación cruzada permite la restauración de la referencialidad de los términos que aparecen en contextos opacos únicamente a condición de que se abandone la tradicional teoría de la referencia, según la cual un término solamente significa algo cuando es posible establecer su referencia en relación con individuos actuales. Tal teoría es demasiado estrecha para los propósitos de esta tesis e indeseable en general por lo que a su aplicación a las teorías científicas concierne; precisamente es su asunción, propiciada por la aceptación de los supuestos epistémicos del empirismo lógico, la que obliga a QUINE a mantener una postura adversa hacia la

⁸⁶ El término inglés es *crossed identification* y a veces también se usa el término *cross world identification* que podría traducirse, utilizando una analogía deportiva, por identificación mundo a través, lo que da una idea aproximada de lo que la identificación cruzada pretende si se la considera en el marco de la semántica de los mundos posibles.

lógica modal.⁸⁷ A esta teoría de la referencia se suele oponer una teoría más flexible que suele denominarse teoría del significado y que propone que la significación de un término no se limita al correlato objetual que sustituye en el lenguaje, sino que también supone la forma en que esa correlación se establece. Se trata aquí, evidentemente, de la célebre distinción fregueana entre sentido y referencia.⁸⁸

En el caso de la identificación cruzada, lo que se busca no es el referente de un término individual entre los objetos actuales del dominio; se busca la regla o función

⁸⁷ Cfr. QUINE, W.V.O.: *Word and Object*, sobre todo los capítulos 3, 4 y 6, y *From a Logical Point of View*. Para observar la evolución a este respecto en la obra de uno de los clásicos del empirismo lógico, cfr. también CARNAP, R.: *The Logical Structure of the World, Meaning and Necessity y Philosophical Foundations of Physics*.

⁸⁸ Cfr. FREGE, G.: "Sobre sentido y referencia". Precisamente la distinción fregueana entre sentido y referencia (*Sinn und Bedeutung*) aparece para explicar los fallos del principio de extensionalidad que el propio FREGE enuncia, equivocándose también FREGE al hablar de referencia solamente respecto de las cosas actualmente existentes en el mundo real. Creo que no se debe hablar, por tanto, de dos teorías enfrentadas (la teoría de la referencia y la teoría del significado), sino de dos concepciones más o menos estrechas de la referencialidad de los términos individuales, pues como JAAKKO HINTIKKA ha escrito, «la teoría de la referencia es la teoría del significado para ciertos tipos simples de lenguaje». Cfr. HINTIKKA, J.: *Models for Modalities*, p.: 87.

que lleva desde el uso del término hasta su referencia -*die Art des Gegebenseins* de la que hablaba FREGE- en cada uno de los mundos posibles manejados. Aunque no siempre se encuentre la referencia de un término individual en el estado de cosas observado, -porque como señala el propio FREGE no a todo sentido corresponde una referencia-⁸⁹ cada vez que se entienda el significado del término lo que se hará será aprehender la función que determina su referencia en los diferentes mundos posibles alternativos al actual. En definitiva, la identificación de los diversos referentes de un término individual de un mundo posible a otro será factible merced a una función tal. Este tipo de funciones recibe el nombre de funciones de individuación.⁹⁰

"Identificación cruzada" y "función de individuación" son dos vocablos técnicos que definen simplemente una actividad que el ser humano suele realizar con frecuencia cual es la del reconocimiento. El hombre está habituado a

⁸⁹ Ibidem, páginas 52 y siguientes.

⁹⁰ Por el término "funciones de individuación" traduzco el término inglés *individuating functions*, que debo a HINTIKKA quien lo utiliza abundantemente en sus obras *Models for Modalities* y *The Intentions of Intentionality*, a las que me remito.

reconocer a personas y objetos fuera de aquellos ámbitos en que le son familiares. Así, aunque no cabe duda de que la composición en el cuadro de Velázquez *Las Meninas* confiere a cada una de las figuras una *personalidad propia*, uno es capaz de reconocer a cualquiera de ellas fuera de su contexto pictórico, e incluso reconocerlas a todas en los estudios que Pablo Ruiz Picasso hizo de la célebre pintura. Se puede pensar en el cuadro original como si fuera un mundo posible y en los estudios abstractos de Picasso como si se tratase de mundos posibles alternativos. En tal caso, unas veces es la relación espacial, otras el volumen o la forma, la postura o algún rasgo característico lo que permite decir que se reconoce a los personajes de una pintura a otra. La relación espacial, el volumen, la forma, la postura son aquí diversas funciones de individuación. Sin ellas no habría posibilidad de decir que tanto *Las Meninas* de Velázquez como *Las Meninas* de Picasso representan la misma escena: al propio Diego Velázquez retratando a los monarcas en presencia de las infantas y algunos personajes pintorescos de la corte.

La cuantificación sobre variables individuales que aparecen en contextos opacos y la restauración de (GE) va a descansar sobre estas funciones, porque ellas garantizan el

cumplimiento de una condición ineludible en la semántica propuesta para aplicar (GE) sobre dichas variables individuales. Es necesario que, supuesta la existencia de un individuo, llámeselo x , en un mundo posible cualquiera, se establezca rígidamente su referente; es decir, es necesaria la condición de que la variable en cuestión tome el mismo valor en todos los mundos posibles alternativos a tener en cuenta para determinar el valor de verdad del enunciado. Esto es precisamente lo que queda garantizado si se puede definir una función de individuación f tal que $f(x, \mathcal{D}(\mu_1)) = f(x, \mathcal{D}(\mu_2)) = \dots = f(x, \mathcal{D}(\mu_n))$, donde x es una variable individual cualquiera y $\mathcal{D}(\mu_1), \mathcal{D}(\mu_2), \dots, \mathcal{D}(\mu_n)$ son los dominios de conjuntos modelos entre los que se ha definido la relación de alternatividad.

Cada uno de los rangos de estas funciones llamadas de individuación va a aportar, por tanto, una interpretación rígida de los términos -variables individuales- que aparecen en contextos referencialmente opacos, lo que hace de cada una de ellas «los principales ingredientes de las condiciones de verdad para los enunciados cuantificados. Ellas son las entidades más importantes sobre las que

tenemos que cuantificar en estas condiciones de verdad». ⁹¹

Sentado lo hasta aquí dicho, ya es posible una definición más rigurosa de las funciones de individuación mediante los conceptos propios de la semántica de los mundos posibles:

Definición 14.1: El conjunto Φ de las funciones de individuación es tal que para toda función $f \in \Phi$ y para todo par de dominios $\mathcal{D}(\mu)$ y $\mathcal{D}(\lambda)$ tal que $\mu \mathcal{R} \lambda$, si $f(x, \mathcal{D}(\mu)) = a$ y $f(x, \mathcal{D}(\lambda)) = b$, entonces si $\mu \vDash (a=b)$, $\lambda \vDash (a=b)$.

Como podía preverse por lo dicho en el capítulo dos y todas las consideraciones hechas hasta ahora sobre identificación cruzada, las funciones de individuación y la relación de alternatividad están implicadas íntimamente las unas con la otra y al revés, y ambas nociones con lo que podría denominarse *el problema de la existencia y de la permanencia intermundos en la semántica de los mundos posibles*, una variante del problema filosófico del

⁹¹ HINTIKKA, J.: *The Intentions of Intentionality*, página 89. Cfr. también *Models for Modalities*, páginas 104-106.

esencialismo que en este momento paso a considerar.

§15. Presuposiciones de existencia e indicadores rígidos.

Se ha dicho en el párrafo anterior que la semántica adoptada tiene que cumplir una condición sin la que no es posible reestablecer en contextos referencialmente opacos la operatividad del principio (GE). Esta condición dice que, supuesta la existencia de un individuo cualquiera en un mundo posible, tal individuo debe permanecer identificable en todos los mundos posibles alternativos al primero. Se ha definido entonces, en virtud de los conceptos de conjunto modelo y de relación de alternatividad, una nueva noción, la de función de individuación, que permite a la semántica cumplir la condición referida. Este párrafo está dedicado a determinar cómo se incluyen y son operativas las funciones de individuación en la semántica de los mundos posibles.

En la definición de conjunto modelo (definición 6.2), las condiciones propias de los cuantificadores aparecen, siguiendo la interpretación tradicional de la cuantificación, de la siguiente forma:

(C.V): Si $\forall x\alpha(x)\in\mu$ entonces $\alpha(b)\in\mu$ para al menos una constante individual $b\in\mathcal{D}(\mu)$.

(C.A): Si $\wedge x\alpha(x)\in\mu$ entonces $\alpha(b)\in\mu$ para toda constante individual $b\in\mathcal{D}(\mu)$.

Como quedan formuladas, las dos condiciones (C.V) y (C.A) presuponen la existencia actual en un dominio concreto del individuo b que sustituye a la variable x en la fórmula α desde el momento en que responden, como queda dicho, a la interpretación clásica -también llamada objetual- de los cuantificadores. Considero que esta presuposición existencial no estorba los propósitos de este capítulo, aunque sí es cierto que, al proveer las funciones de individuación a los términos individuales de referentes tanto actuales como no actuales, la existencia de individuos particulares en un mundo posible concreto debe establecerse explícitamente en relación con los individuos existentes en los mundos posibles alternativos.

Algunos autores, como la doctora RUTH BARCAN MARCUS, han propuesto como alternativa, a este respecto, una

interpretación sustitucional de la cuantificación.⁹² La cuantificación sustitucional supone que un enunciado cuantificado existencialmente es verdadero sólo en el caso de que lo sea alguna instancia de la subfórmula que cae bajo el alcance del cuantificador obtenida al sustituir la variable ligada por un nombre propio. De idéntica manera será verdadero un enunciado cuantificado universalmente si y sólo si son verdaderos todos los casos de sustitución de la variable ligada por nombres propios en la subfórmula que cae bajo el alcance del cuantificador. El atractivo de esta interpretación de los cuantificadores reside en que, adoptándola para la semántica de los mundos posibles, se evitan, como queda dicho, las presuposiciones existenciales. Plantea, sin embargo, un problema nada grato para los propósitos perseguidos y es que la interpretación sustitucional de la cuantificación exige que todos los objetos del universo manejado tengan su nombre propio,

⁹² Cfr. MARCUS, R.B.: "Modalities and Intensional Languages" y las reiteradas críticas a la interpretación sustitucional de la cuantificación en QUINE, W.V.O.: "Ontological Relativity" y "Existence and Quantification" en *Ontological Relativity and Other Essays* y "Reply to Professor Marcus", "The variable" y "Truth and disquotation" en *The Ways of Paradox and Other Essays*. Cfr. también KRIPKE, S.: "Is there a problem about substitutional quantification?".

exigencia sumamente restrictiva en algunos aspectos ya que no permite tratar con universos lo suficientemente ricos; en ellos, a efectos de la cuantificación, podría decirse de los objetos innominados que no existen y esa consecuencia no interesa. Por ejemplo, la admisión de los números reales como entidades del dominio hace imposible asignar un nombre a cada uno de los individuos del mismo porque el conjunto de los números reales no es enumerable, lo que se demuestra fácilmente por el método de la diagonal de CANTOR, mientras que sí lo es el conjunto de todos los nombres propios, a cuyos elementos se les puede asignar emulando a GÖDEL enteros distintos. Esto implica la imposibilidad de dar un nombre propio a cada uno de los números reales, por lo que en el dominio habrá entidades innominadas de las que un lenguaje formal con cuantificación no podrá decir nada.

Por ello, para los propósitos de esta tesis, la interpretación de los cuantificadores en las fórmulas modalizadas ha de quedar desembarazada no ya de las presuposiciones existenciales que comporta, sino de sus *presupuestos de particularidad*, a fin de que, incluso cuando se trate con individuos posibles en lugar de con objetos actualmente existentes, también los primeros puedan ser

parte del rango de la cuantificación.⁹³ De otro modo, la caricatura del concepto de individuo posible que QUINE realiza en las primeras páginas de *From a Logical Point of View* para desterrar del círculo de los términos cuantificables aquellos que aparecen en contextos modales, conforme a su concepción empírico-referencial de la categoría de los términos cuantificables que se resume en su famoso adagio «ser es ser el valor de una variable ligada», se convertiría de hecho en un retrato hiperrealista.⁹⁴ Por tanto, es necesario adaptar (C.V) y (C.Λ) a esta exigencia; es decir, es necesario introducir en ambas condiciones una cláusula que permita sustituir una variable individual por un término, por ejemplo el término *b*, sin que éste tenga necesariamente una referencia entre los individuos de un dominio concreto y sí entre los de una clase de dominios representada por el conjunto Φ de las funciones de individuación.

⁹³ Todo este análisis se debe a J. HINTIKKA: "Existential Presuppositions and Uniqueness Presuppositions" en *Models for Modalities*, pp.: 112-147.

⁹⁴ Cfr. QUINE, W.V.O.: "On what there is" en *From a Logical Point of View*.

Si se quisiera establecer, por ejemplo, un sistema sin presuposiciones existenciales, habría que modificar (C.V) y (C. $\wedge$) de forma que fuese necesario declarar explícitamente la existencia de cada individuo b en cada mundo posible; esto es, habría que añadirles la condición de que el individuo cuyo término sustituye a la variable individual existe, puesto que se van a permitir términos que no designan a individuos actualmente existentes. Esta condición se puede establecer mediante la adición de una cláusula de existencia, formalizada en el lenguaje objeto por el enunciado

$$(27) \quad \forall x(x=b)$$

y modificando (C.V) y (C. $\wedge$) de la siguiente manera:

(C.V₀): Si $\forall x\alpha(x)\in\mu$ entonces $\alpha(b)\in\mu$ y $\forall x(x=b)\in\mu$ para al menos una constante individual $b\in\mathcal{D}(\mu)$.

(C. $\wedge$ ₀): Si $\wedge x\alpha(x)\in\mu$ y si $\forall x(x=b)\in\mu$ entonces $\alpha(b)\in\mu$ para toda constante individual $b\in\mathcal{D}(\mu)$.

Ahora bien, las condiciones (C.V₀) y (C. $\wedge$ ₀) que determinan un sistema sin presuposiciones de existencia son

demasiado restrictivas.⁹⁵ No se trata de suspender los supuestos sobre la referencia del término b entre los individuos de un dominio $\mathcal{D}(\mu)$, sin más, sino de establecer que la referencia del término b que aparece en las fórmulas del conjunto modelo μ no tiene por qué encontrarse en $\mathcal{D}(\mu)$ y sí en, por ejemplo, $\mathcal{D}(\lambda)$, siendo $\mu \mathcal{R} \lambda$; o lo que es lo mismo, el asunto que aquí se trata no es el de la existencia de un individuo concreto en un mundo posible, sino el de su permanencia en el resto de los mundos alternativos al primero. Esto se consigue sustituyendo la cláusula de existencia en $(C.V_0)$ por lo que llamo un indicador rígido:⁹⁶

(27') $\Box \forall x(x=b).$

Las condiciones propias de la cuantificación quedan entonces del siguiente modo:

⁹⁵ Aceptar estas cláusulas puede desembocar en una *free logic* para las modalidades, puesto que (27) traduce perfectamente el significado que el predicado predefinido E en la fórmula Eb (existe b) tiene.

⁹⁶ Por indicador rígido traduzco el término inglés *rigid designator* usado frecuentemente por SAUL KRIPKE quien lo definió como un índice que «designa al mismo objeto en todos los mundos posibles; [...] en todos los mundos posibles donde el objeto en cuestión existe». Cfr. KRIPKE, S.: "Identity and Necessity".

(C.V^{*}): Si $\forall x \alpha(x) \in \mu$ entonces $\alpha(b) \in \mu$ y $\Box \forall x (x=b) \in \mu$ para al menos una constante individual $b \in \mathcal{D}(\mu)$.

(C.Λ^{*}): Si $\Lambda x \alpha(x) \in \mu$ y si $\forall x (x=b) \in \mu$ entonces $\alpha(b) \in \mu$ para toda constante individual $b \in \mathcal{D}(\mu)$.

No es difícil comprobar que el enunciado (27') no sólo establece la existencia en un mundo posible de un individuo cualquiera -esto es, la referencia de un término individual b en un conjunto modelo μ -, sino su permanencia en el resto de los mundos posibles alternativos al primero -es decir, la rigidez de la referencia del término individual b en los conjuntos modelos alternativos a μ - merced a la interpretación que del operador de necesidad ha sido dada en la semántica propuesta.

De este modo desaparecen los problemas que la interpretación opaca de los enunciados modales lleva aparejados. Pero, además se desvanece una distinción medieval relacionada con la dualidad de interpretaciones -la opaca y la transparente- de estos enunciados. Me estoy refiriendo a la distinción entre modalidades *de dicto* y modalidades *de re*. En resumen, tal distinción está fundada en la ambigüedad de significados que surge en los contextos

modales con respecto a la relación de los operadores con los términos individuales que aparecen bajo su alcance: si aquéllos se refieren a la cosa (*de re*) o si hacen referencia a lo que se dice de la cosa (*de dicto*). Esto se puede parafrasear en términos de la semántica de los mundos posibles diciendo que el alcance del operador modal puede pensarse de dos modos diferentes, de los que es el primero interpretarlo como si hiciese referencia al individuo concreto relacionado con un término bajo su alcance en el mundo actual, y el segundo como si la referencia la hiciese a todos los diversos individuos que corresponden a un término en los diferentes mundos posibles que hay que considerar para la evaluación del enunciado modal. Así el enunciado «necesariamente el médico siempre tiene razón» indica una necesidad *de re* si se piensa que está referido a una persona en particular que se dedica a la medicina, en tanto que indica una necesidad *de dicto* si se refiere a cualquier individuo que sea médico de profesión. Pero tan pronto como se tiene la referencia del término "el médico" rígidamente establecida en todos los mundos posibles mediante el método de las funciones de individuación ya no tiene sentido considerar ambas interpretaciones como diferentes. Puede afirmarse, por tanto, que los enunciados modales en general gozan de los privilegios de los contextos

de re por lo que a la cuantificación se refiere, incluso cuando, por interés en la formalización, se prefiere la interpretación opaca a la transparente y entonces se los considera principalmente como enunciados modales *de dicto*.

CAPÍTULO SEIS:

ÁRBOLES SEMÁNTICOS PARA LÓGICA MODAL CUANTIFICACIONAL.

§16. Árboles semánticos para lógica modal con cuantificadores.

Una vez desarrollado el método de las funciones de individuación y resueltos los problemas que plantea la cuantificación en contextos modales ya es posible ampliar las reglas de construcción del árbol expuestas en el capítulo anterior de forma que el método entonces descrito pueda ser empleado en un lenguaje con cuantificadores e identidad. El método no podrá ser un procedimiento efectivo de decisión, pero aporta un semialgoritmo que permite obtener modelos y conclusiones de validez para la mayoría de las fórmulas de la lógica modal con cuantificadores.

Para un lenguaje de este tipo que mantenga los presupuestos existenciales de la cuantificación, las reglas de construcción del árbol correspondientes a las condiciones (C.V) y (C.Λ) son las siguientes:

(R.V): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\forall x \beta(x)/i$ entonces se añade a $\mathcal{S}$ la expresión $\beta(a_k)/i$, donde a_k es un parámetro nuevo aún no aparecido en la secuencia, y se marca con el signo $\langle a_k \rangle$.

(R.Λ): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\Lambda x \beta(x)/i$ entonces se añaden a la secuencia $\mathcal{S}$ las expresiones $\beta(a_1)/i$, $\beta(a_2)/i, \dots \beta(a_n)/i$, estando $a_1, a_2, \dots, a_n$ por todos los parámetros aparecidos en la secuencia, o la expresión $\beta(a_1)/i$ si no hubiera aparecido ninguno, y se marca con el signo $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

En (R.V) el requisito de que el parámetro a_k sea nuevo garantiza el cumplimiento de la cláusula de la indicación rígida en el sentido de que no permite que en μ_i haya ninguna variable individual que no tenga referente en $\mathcal{D}(\mu_i)$.

(R.Λ), sin embargo, no cumple con esta cláusula ya que podría darse el caso de que uno de los términos a_m , con $m \leq n$, no tuviese referente ni en $\mathcal{D}(\mu_i)$ ni en ningún otro dominio $\mathcal{D}(\mu_j)$, siendo $\mu_i \mathcal{R} \mu_j$. Se trata de una regla poco general, tan

sólo válida en el caso de que haya un único dominio $\mathcal{D}(\mu_i)$ o de que para cualesquiera μ_i y μ_j , $\mathcal{D}(\mu_i) = \mathcal{D}(\mu_j)$. Sin embargo, es posible modificarla a fin de que sirva también para los casos en que no se dé esta homogeneidad de dominios:

(R. $\wedge^*$): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{J} \vdash \alpha$ es de la forma $\wedge x \beta(x)/i$ entonces se añaden a la secuencia $\mathcal{J}$ las expresiones $\beta(a_k)/i, \dots, \beta(a_n)/i$, donde $a_k, \dots, a_n$ son todos los parámetros aparecidos en la secuencia a partir de cualquier expresión $\forall y \delta(y)/j$ tal que $j \sim i$ (o la expresión $\beta(a_m)/i$, donde a_m es un parámetro nuevo en $\mathcal{J}$, si no hubiera aparecido ninguno tal), y se marca con el signo $\langle a_k, \dots, a_n \rangle$.

A estas reglas hay que añadir algunas otras, análogamente a lo hecho para la lógica modal de proposiciones. Estas serán las correspondientes a las condiciones (C.=), (C. $\neg\wedge$) y (C. $\neg\vee$):

(R.=): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{J} \vdash \alpha$ es de la forma $(a_n = a_k)/i$ entonces se sustituyen en $\mathcal{J}$ todas las apariciones del parámetro de mayor subíndice de la

igualdad en fórmulas asociadas a cualquier índice j tal que $i \sim j$ por el parámetro de menor subíndice y se marca con el signo $\Leftrightarrow$.⁹⁷

(R. $\neg\wedge$): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\neg \wedge x \beta(x)/i$ entonces se añade a $\mathcal{J}$ la expresión $\vee x \neg \beta(x)/i$ y se marca con el signo $\neg$.

(R. $\neg\vee$): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\neg \vee x \beta(x)/i$ entonces se añade a $\mathcal{J}$ la expresión $\wedge x \neg \beta(x)/i$ y se marca con el signo $\neg$.

Junto con estas reglas habría que modificar la definición 8.6 de cierre de una secuencia:

Definición 16.1: Se dice que una secuencia $\mathcal{J}_n$ es cerrada sii aparecen en ella o bien dos expresiones de la forma β/i y $\neg \beta/i$, donde la fórmula β es atómica, o bien una expresión del tipo $\neg(a=a)$, donde a es un parámetro

⁹⁷ Normalmente no se utilizarán parámetros con subíndices en la construcción del árbol, sino las letras minúsculas a, b, c , etcétera, por lo que el criterio de sustitución puede ser alfabético, por ejemplo.

cualquiera de la secuencia.

Con esto queda descrito en líneas generales el método de los árboles para su aplicación a los sistemas normales de lógica modal de predicados de primer orden.

§17. El teorema fundamental de los árboles semánticos para lógica modal de predicados.

A los sistemas de lógica modal de predicados de primer orden correspondientes a los sistemas K, T, B, S4 y S5 los llamaré, respectivamente, K^* , T^* , B^* , $S4^*$ y $S5^*$. Un sistema S y su correspondiente sistema S^* se diferencian exclusivamente por lo que se refiere a la base axiomática en que se fundamentan, de forma que S^* añade a los axiomas de S los propios de la lógica de predicados de primer orden.

Definición 17.1: Un S-modelo es de dominio fijo sii para todo $\mu, \lambda \in \Omega$, si $\mu R \lambda$ entonces $\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{D}(\lambda)$. Un S-modelo es de dominio variable sii no es de dominio fijo.

Según la definición anterior, en los sistemas modelos de dominio fijo se da la igualdad entre las *poblaciones* de

los diferentes mundos posibles alternativos a otro cualquiera y la de este último, lo que garantiza el reconocimiento de cada individuo en cada mundo posible. Se ha visto, en cambio, que el fallo del principio (GE) en los lenguajes intensionales está emparentado con la dificultad de establecer criterios de homogeneidad entre las poblaciones de los diferentes mundos posibles, lo que significa que no siempre es factible trabajar con sistemas modelos de dominio fijo.

Una diferencia interesante entre S-modelos de dominio variable y S-modelos de dominio fijo la establece la S-validez de la *Fórmula Barcan*:

$$[FB] \quad \wedge x \Box \alpha(x) \rightarrow \Box \wedge x \alpha(x).$$

[FB] es un teorema solamente en las llamadas *lógicas simétricas*, esto es: en B^* y en $S5^*$. En los demás sistemas mencionados antes, [FB] no es un teorema, a menos que se la añada como axioma. Al respecto, puede demostrarse el siguiente teorema:

Teorema 17.1: $\models_S [FB]$ para todo S-modelo de dominio fijo.

Demostración: Supóngase un S-modelo cualquiera de dominio fijo y supóngase que para todo conjunto modelo $\mu \in \Omega$, no $\mu \models \bigwedge x \Box \alpha(x) \rightarrow \Box \bigwedge x \alpha(x)$; entonces $\mu \models \neg [\bigwedge x \Box \alpha(x) \rightarrow \Box \bigwedge x \alpha(x)]$ y de aquí que $\mu \models \bigwedge x \Box \alpha(x)$ y $\mu \models \neg \Box \bigwedge x \alpha(x)$; por lo tanto $\mu \models \Box \alpha(a)$ para todo $a \in \mathcal{D}(\mu)$ y también $\mu \models \neg \bigvee x \neg \alpha(x)$; entonces $\lambda \models \alpha(a)$ y $\lambda \models \bigvee x \neg \alpha(x)$, de donde $\lambda \models \neg \alpha(a)$ para algún $a \in \mathcal{D}(\lambda)$; esto es, $\alpha(a) \in \lambda$ y $\neg \alpha(a) \in \lambda$, contra (C. $\neg$). Luego, para todo $\mu \in \Omega$, $\mu \models \bigwedge x \Box \alpha(x) \rightarrow \Box \bigwedge x \alpha(x)$ y por tanto $\bigwedge x \Box \alpha(x) \rightarrow \Box \bigwedge x \alpha(x) \in \mu$.

Añadida a aquellos sistemas en los que no es un teorema, [FB] provoca la conversión de sus respectivos S-modelos en S-modelos de dominio fijo. Se pueden considerar, por tanto, los S-modelos de dominio fijo como un caso especial de los S-modelos de dominio variable. Estos últimos pueden ser de dos tipos diferentes.

En primer lugar están los S-modelos de dominio variable en los que se cumple el siguiente requisito de inclusión o requisito de dominios anidados:

$$\forall \mu, \lambda \in \Omega, \mu \mathcal{R} \lambda \rightarrow \mathcal{D}(\mu) \subseteq \mathcal{D}(\lambda).$$

Con este requisito se obtienen S-modelos de dominios variables anidados del tipo de los que usan HUGHES &

CRESSWELL.⁹⁸ Son S-modelos en los que la fórmula

$$[FB^*] \quad \Box \wedge x \alpha(x) \rightarrow \wedge x \Box \alpha(x)$$

es S-válida, pero no lo es [FB], excepto en el caso límite en el que $\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{D}(\lambda)$, caso que se produce, por ejemplo, cuando la relación de alternatividad cumple la cláusula de simetría.

Teorema 17.2: *No para todo S-modelo de dominios variables anidados es el caso que $\models_S [FB]$.*

Demostración: El siguiente S-modelo de dominios variables anidados es un contraejemplo de [FB]:

$$\Omega = \{\mu, \lambda \mid \mu \not R \lambda\} \quad \mathcal{D}(\mu) = \{a\} \quad \mathcal{D}(\lambda) = \{a, b\}$$

	$\alpha(a)$	$\alpha(b)$	$\wedge x \alpha(x)$	$\Box \alpha(a)$	$\wedge x \Box \alpha(x)$	$\Box \wedge x \alpha(x)$
μ	1	-	-	1	1	0
λ	1	0	0	-	-	-

⁹⁸ HUGHES, G.E & CRESSWELL, M.J.: *Introducción a la lógica modal*, pp.: 147ss.

En segundo lugar se tienen aquellos S-modelos en los que no se da el requisito de inclusión, de modo que puede ser que, para cualesquiera dos mundos posibles con diferentes poblaciones μ y λ tales que $\mu R \lambda$, se dé el caso de que $a \in \mathcal{D}(\mu)$ y $a \notin \mathcal{D}(\lambda)$. En un caso tal no se trata de que las extensiones predicativas cambien de un mundo a otro respecto del individuo a , sino de que en λ la extensión predicativa de un predicado cualquiera P con respecto a la constante individual a es el conjunto vacío, por lo que no puede darse que $\lambda \models Pa$. El problema aquí es decidir si el enunciado Pa tiene algún valor de verdad a pesar de que no existe el individuo a en el mundo posible actual. KRIPKE⁹⁹ ha propuesto una semántica con estas características en la que el enunciado Pa sí tendría un valor de verdad en λ independientemente de que $a \in \mathcal{D}(\lambda)$ o $a \notin \mathcal{D}(\lambda)$. La semántica de KRIPKE da lugar a sistemas de lógica modal *libre*, donde tan sólo son teoremas aquellos enunciados que están cerrados con respecto a la cuantificación universal.¹⁰⁰ En la semántica de KRIPKE [FB] no es ni siquiera $S5^*$ -válida, por lo que no se

⁹⁹ KRIPKE, S.: "Semantical Considerations on Modal Logic", *Acta Philosophica Fennica*, 16 (1963), pp.: 83-94.

¹⁰⁰ Cfr. al respecto HUGHES & CRESSWELL: *Introducción a la lógica modal*, pp.: 153-156.

la puede considerar aquí como modelo para el sistema $S5^*$, donde se ha dicho que sí es un teorema [FB].¹⁰¹

Basta considerar, por tanto, S-modelos de dominios variables anidados para los sistemas normales de lógica modal de predicados de primer orden. En este sentido, y con objeto de incluir el requisito de dominios variables anidados en la semántica, es conveniente redefinir la noción de S-modelo que se dio en §6:

Definición 17.2: Un S^* -modelo es una quintupla ordenada $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ, f \rangle$, donde Ω , $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ y $\succ$ son como en la definición 6.4 y $f \in \Phi$ es una función tal que para cualesquiera dos conjuntos modelos $\mu_i, \mu_j \in \Omega$, si $\mu_i \mathcal{R} \mu_j$ entonces $f(x, \mathcal{D}(\mu_i)) \in \mathcal{D}(\mu_j)$, para una variable cualquiera x .

Definición 17.3: Una fórmula α es S^* -satisfactible sii hay un S^* -modelo y un $\mu \in \Omega$ tal que $\alpha \in \mu$. Una fórmula α es S^* -válida sii para todo S^* -modelo y todo $\mu \in \Omega$, $\alpha \in \mu$.

A partir de estas nuevas definiciones de los

¹⁰¹ Ibidem.

principales conceptos de la semántica se hace necesaria la reformulación de los teoremas del capítulo cuatro y la ampliación de sus demostraciones del siguiente modo.

Teorema 17.3: Si α es S^* -satisfactible entonces hay al menos una secuencia $\mathcal{I}_n \models_S \alpha$ tal que si, para un índice cualquiera i y una fórmula cualquiera β , $\beta/i \in \mathcal{I}_n$ depende de α/i entonces β es también S^* -satisfactible.

Demostración: Como la demostración del teorema 9.1, pero revisando los siguientes casos adicionales:

- (R. $\wedge^*$) sobre una expresión de la forma $\wedge x \delta(x)/i$. Luego se obtiene la secuencia $\langle \delta(a_k)/i, \dots, \delta(a_n)/i \rangle$, donde $\langle a_k, \dots, a_n \rangle$ son todos los parámetros aparecidos en la secuencia $\mathcal{I}$ en cualesquiera fórmulas asociadas a cualquier índice j tal que $j \sim_{S^*} i$. Por tanto, hay al menos unos $\mu_i, \mu_j \in \Omega$ tales que $\mu_j \mathcal{R} \mu_i$ y para todo parámetro a_m si $a_m \in \mathcal{D}(\mu_j)$ entonces $a_m \in \mathcal{D}(\mu_i)$ y $\delta(a_k) \in \mu_i, \dots, \delta(a_n) \in \mu_i$ y por las definiciones 6.2 y 17.3, $\delta(a_k), \dots, \delta(a_n)$ son S^* -satisfactibles.
- (R.V) sobre una expresión de la forma $\vee x \delta(x)/i$. Luego se obtiene la expresión $\delta(a_n)/i$, donde a_n es un parámetro nuevo. Por hipótesis de la inducción hay un μ_i tal que $\vee x \delta(x) \in \mu_i$ y $\delta(a_n) \in \mu_i$ y por las definiciones

6.2 y 17.3, $\delta(a_n)$ es S^* -satisfactible.

Lema 17.1: Para toda fórmula α y toda secuencia $\mathcal{F}_n$ no cerrada de $\mathcal{A}_S\alpha$, hay un S^* -modelo que S^* -satisface simultáneamente a todas las fórmulas de $\mathcal{F}_n$.

Demostración: Como el lema 9.1, pero añadiendo los siguientes casos:

1. g) Sea $\beta: \neg \Lambda x \delta(x)$. Por hipótesis, $\neg \Lambda x \delta(x)/i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Por la definición 9.8(1g), $\forall x \neg \delta(x)/i \in \mathcal{F}_n$. Por hipótesis de la inducción $\forall x \neg \delta(x)$ es S^* -satisfactible, por lo que hay un $\mu_i \in \Omega$ tal que $\forall x \neg \delta(x) \in \mu_i$ y, para algún $a_n \in \mathcal{D}(\mu_i)$, $\neg \delta(a_n) \in \mu_i$. Si β no fuera S^* -satisfactible entonces, por la definiciones 6.2 y 17.3, para cualquier conjunto modelo $\mu_i \in \Omega$ no $\mu_i \succ \neg \Lambda x \delta(x)$, de donde $\mu_i \succ \neg \neg \Lambda x \delta(x)$; entonces $\mu_i \succ \Lambda x \delta(x)$ y de aquí que $\mu_i \succ \delta(a_n)$ para todo $a_n \in \mathcal{D}(\mu_i)$; y por tanto $\delta(a_n) \in \mu_i$, violándose la condición (C. $\neg$).

h) Sea $\beta: \neg \forall x \delta(x)$. Como en el caso anterior.

7. Sea $\beta: \Lambda x \delta(x)$. Por hipótesis, $\Lambda x \delta(x)/i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Luego por la definición 9.8(7), $\delta(a_n)/i \in \mathcal{F}_n, \dots, \delta(a_m)/i \in \mathcal{F}_n$, donde $a_n, \dots, a_m$ son los parámetros que aparecen en las fórmulas asociadas a todo índice j tal que $j \sim_{S^*} i$. Por hipótesis de la inducción, por tanto, hay al

menos unos $\mu_i, \mu_j \in \Omega$ tales que $\mu_j \mathcal{R} \mu_i$ y para todo parámetro a_k si $a_k \in \mathcal{D}(\mu_j)$ entonces $a_k \in \mathcal{D}(\mu_i)$ y $\delta(a_n) \in \mu_i, \dots, \delta(a_m) \in \mu_i$. Si β no fuera S^* -satisfactible entonces por la definiciones 6.2 y 17.3 es que, para cualquier $\mu_i \in \Omega$, no $\mu_i \succ \bigwedge x \delta(x)$; luego $\mu_i \succ \neg \bigwedge x \delta(x)$, es decir, $\mu_i \succ \bigvee x \neg \delta(x)$; de aquí se sigue que $\mu_i \succ \neg \delta(a_n)$ para algún $a_n \in \mathcal{D}(\mu_i)$; de donde $\neg \delta(a_n) \in \mu_i$, contrariamente a lo derivado de hipótesis de la inducción.

8. Sea $\beta: \bigvee x \delta(x)$. Por hipótesis $\bigvee x \delta(x) / i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Por la definición 9.8(8) $\delta(a_k) / i \in \mathcal{F}_n$. Por la hipótesis de la inducción $\delta(a_k)$ es S^* -satisfactible, por lo que ha de haber un $\mu_i \in \Omega$ tal que $\delta(a_k) \in \mu_i$. Si β no fuera S^* -satisfactible entonces, para cualquier $\mu_i \in \Omega$, no $\mu_i \succ \bigvee x \delta(x)$; por tanto $\mu_i \succ \neg \bigvee x \delta(x)$; luego $\mu_i \succ \bigwedge x \neg \delta(x)$, de donde se sigue que $\mu_i \succ \neg \delta(a_k)$ para todo $a_k \in \mathcal{D}(\mu_i)$, y por tanto $\neg \delta(a_k) \in \mu_i$, contraviniendo (C. $\neg$)

Lema 17.2: *Dada una fórmula S^* -satisfactible cualquiera α , hay al menos una secuencia $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$ tal que se puede mostrar un S^* -modelo que hace a todas las fórmulas de $\mathcal{I}_n$ simultáneamente S^* -satisfactibles.*

Demostración: Como la del lema 9.2 pero apelando al

teorema 17.3.

Teorema 17.4: $\mathcal{A}_{S^*}\alpha$ es cerrado sii α no es S^* -satisfactible.

Demostración: Este teorema se demuestra como el teorema 9.2, pero apelando a los lemas 17.1 y 17.2

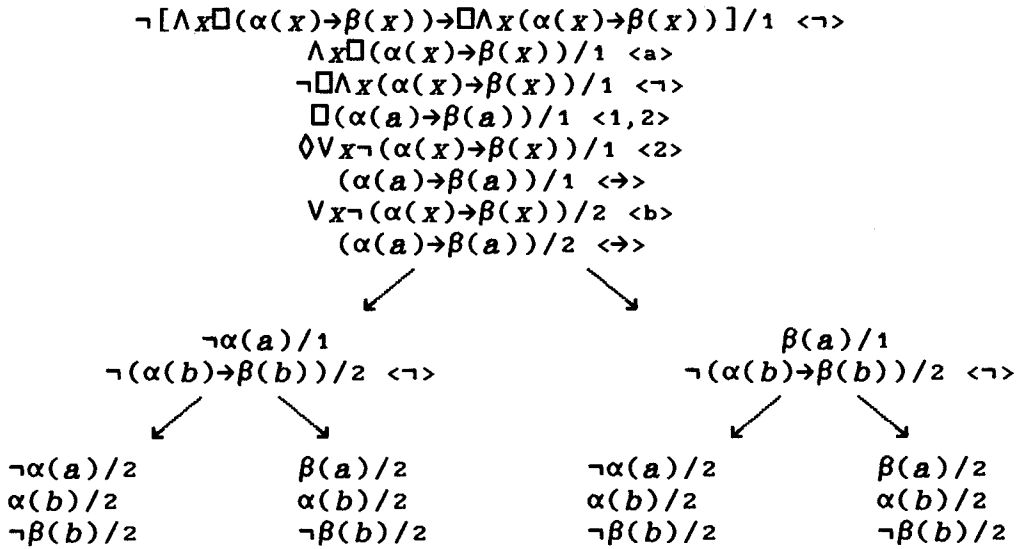
Corolario 1: α es S^* -válida ($\models_{S^*} \alpha$) sii $\mathcal{A}_{S^*}\neg\alpha$ es cerrado.

Corolario 2: α es consecuencia lógica de un conjunto no vacío de fórmulas Γ en el sistema S^* ($\Gamma \models_{S^*} \alpha$) sii hay una fórmula γ que es la fórmula que se consigue al conjuntar mediante el signo $\wedge$ todas las fórmulas de un subconjunto $\Gamma' \subset \Gamma$ tal que $\mathcal{A}_{S^*}\neg(\gamma \rightarrow \alpha)$ es cerrado.

§18. Algunos resultados.

Con todo este aparato se hace posible aplicar el procedimiento a los sistemas de lógica modal de predicados de primer orden correspondientes a los sistemas K^* , T^* , B^* , $S4^*$ y $S5^*$. Valga como ejemplo el árbol de la siguiente fórmula, que es una versión de la negación de la Fórmula

Barcan:



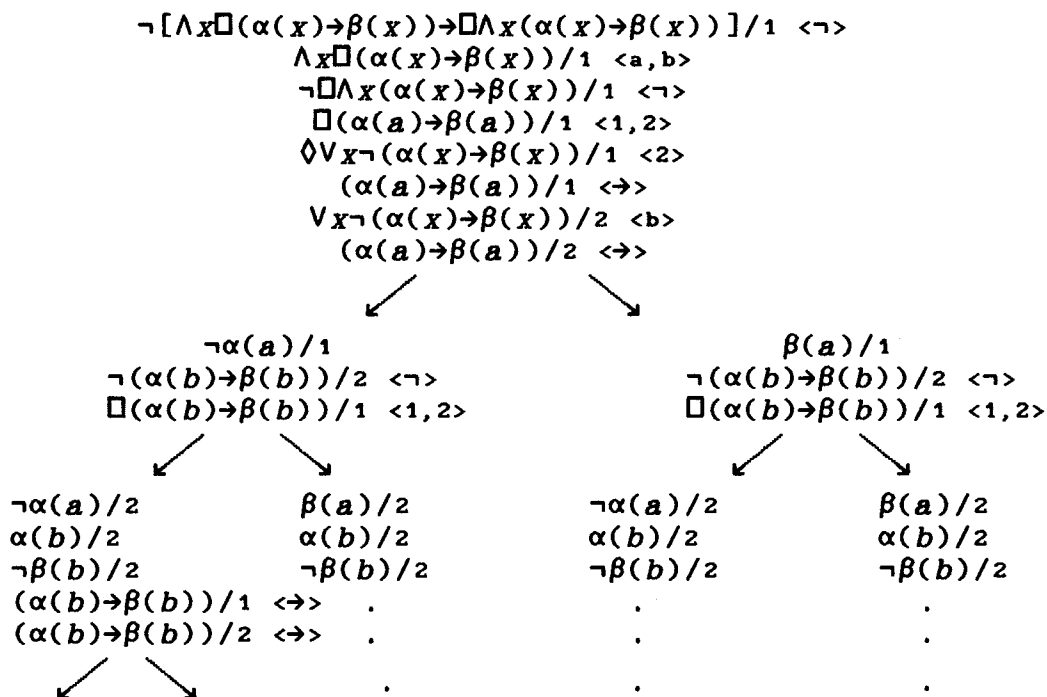
El árbol se termina sin haberse cerrado. Esto quiere decir que hay al menos un contraejemplo (cuatro en este caso) de [FB]. Obsérvese que en la construcción del árbol el parámetro b que aparece al marcar una fórmula asociada al índice 2 no marca a la fórmula $\Lambda x \Box(\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$ asociada al índice 1, por lo que se ha asumido al construirlo que no $2 \sim_1$ (en definitiva, que μ_1 no es alternativo a μ_2); esto es, que la relación de alternatividad no cumple la cláusula de simetría. [FB] no es, efectivamente, ni K^* -válida ni T^* -válida ni $S4^*$ -válida. El siguiente es un modelo falsificador de la fórmula $\Lambda x \Box(\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow \Box \Lambda x(\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$:

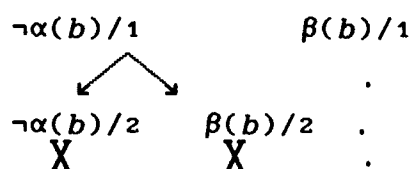
$\Omega = \{\mu_1, \mu_2\}$ tal que $\mu_1 \mathcal{R} \mu_1$, $\mu_2 \mathcal{R} \mu_2$, $\mu_1 \mathcal{R} \mu_2$.

$\mathcal{D}(\mu_1) = \{a\}$, $\mathcal{D}(\mu_2) = \{a, b\}$ y $f(x, \mathcal{D}(\mu_1)) = a$ y $f(x, \mathcal{D}(\mu_2)) = a$.

$S4^*$	$\alpha(a)$	$\alpha(b)$	$\beta(a)$	$\beta(b)$	$(\alpha(a) \rightarrow \beta(a))$	$(\alpha(b) \rightarrow \beta(b))$
μ_1	0	-	-	-	1	-
μ_2	0	1	-	0	1	0

Sin embargo, si se añade la cláusula de simetría se comprueba que la Fórmula Barcan es tanto B^* -válida como $S5^*$ -válida:





En este segundo árbol, al darse el caso de que $\mu_2 \mathcal{R} \mu_1$, el término b tiene la misma referencia en $\mathcal{D}(\mu_1)$ que la que tiene en $\mathcal{D}(\mu_2)$ y por tanto aparece en los enunciados de ambos conjuntos modelos. Se puede comprobar entonces que, aunque se ha descartado la presuposición de que en μ_1 y en μ_2 existan los mismos individuos, no se ha suprimido la presuposición de que en ambos mundos posibles existan individuos. En los dos árboles, la expresión $\Lambda x \Box(\alpha(x) \rightarrow \beta(x))/1$ ha sido marcada con un parámetro que hasta entonces no había aparecido en la secuencia. En realidad, en ese momento aún no había aparecido ningún parámetro en el árbol. Esto representa una violación de la cláusula de existencia y por tanto de la condición (C. Λ_0) del capítulo anterior, pero no de la cláusula de la indicación rígida que, a pesar de que parece más restrictiva, permite obtener conclusiones que en un sistema sin presuposiciones existenciales no son posibles. Por tanto diré, no que la semántica de los mundos posibles está exenta de presuposiciones de existencia, sino, siguiendo a J.

HINTIKKA, que no tiene presuposiciones de particularidad.¹⁰²

§19. Árboles semánticos infinitos por causa de la iteración de operadores cuantificacionales.

Se pueden encontrar también secuencias infinitas por la aparición ininterrumpida de parámetros en el árbol al aplicar las reglas propias de los cuantificadores. Por ejemplo, la secuencia sin modalidades siguiente:

$$\begin{array}{l}
 \Lambda x \forall y (\neg \alpha(x, x) \wedge \alpha(x, y)) / 1 \langle a, b, c, \dots \rangle \\
 \quad \forall y (\neg \alpha(a, a) \wedge \alpha(a, y)) / 1 \langle b \rangle \\
 \quad \quad (\neg \alpha(a, a) \wedge \alpha(a, b)) / 1 \langle \wedge \rangle \\
 \quad \quad \forall y (\neg \alpha(b, b) \wedge \alpha(b, y)) / 1 \langle c \rangle \\
 \quad \quad \quad \neg \alpha(a, a) / 1 \\
 \quad \quad \quad \alpha(a, b) / 1 \\
 \quad \quad \quad (\neg \alpha(b, b) \wedge \alpha(b, c)) / 1 \langle \wedge \rangle \\
 \quad \quad \quad \forall y (\neg \alpha(c, c) \wedge \alpha(c, y)) / 1 \langle d \rangle \\
 \quad \quad \quad \quad \neg \alpha(b, b) / 1 \\
 \quad \quad \quad \quad \alpha(b, c) / 1 \\
 \quad \quad \quad \quad \cdot \\
 \quad \quad \quad \quad \cdot \\
 \quad \quad \quad \quad \cdot
 \end{array}$$

¹⁰² J. HINTIKKA demuestra también que, en un sentido definido, los sistemas con presuposiciones de existencia son un subsistema de aquellos que prescinden de ellas. El sistema aquí expuesto está a medio camino entre ambos. Para la demostración cfr. HINTIKKA, J.: "Existential Presuppositions and their Elimination" en *Models for Modalities*, páginas 34-37.

Por lo general, de toda fórmula satisfactible en la que se dé un cuantificador existencial bajo el alcance de otro universal se obtendrá un árbol infinito, de forma similar a lo que ocurría cuando en un árbol aparecía una fórmula modalizada en la que un operador de posibilidad caía bajo el alcance de uno de necesidad. Como puede preverse, por tanto, la causa de que el árbol anterior no se termine es análoga a la que se estudió en el párrafo precedente y la solución que aportaré responde, por ello, a criterios parecidos a los de entonces.¹⁰³ Si en el caso anterior era necesario restringir la aparición de nuevos índices en el árbol para evitar su decurso infinito, en el caso de los árboles que no acaban por la proliferación de parámetros hay que restringir

¹⁰³ Hay que tener en cuenta que la lógica de predicados de primer orden no es decidible y que por eso mismo el método de los árboles semánticos no puede aportar un modelo efectivo para todas las fórmulas satisfactibles. En concreto, la existencia de fórmulas que son satisfactibles solamente en dominios infinitos comporta ya la imposibilidad de evitar la aparición de secuencias arbóreas infinitas. Sin embargo, como es el caso de la fórmula cuyo árbol se desarrolla más arriba, se puede encontrar mediante este método un modelo que satisfaga a las que lo sean en dominios finitos, a pesar de tener su prefijo cuantificacional dispuesto del modo ya indicado.

las reglas propias de la cuantificación.¹⁰⁴

Definición 20.1: Se entiende por signo de provisionalidad un par de barras verticales a derecha e izquierda de una expresión $\delta/i \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$. Si δ/i aparece con n barras verticales a derecha e izquierda, con $n \geq 1$, se dirá que δ/i tiene n signos de provisionalidad o, simplemente, que δ/i es n -provisional.

Definición 20.2: Si $\gamma/i, \delta/j \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$ y δ/j es provisional, se dice que la expresión γ/i origina la provisionalidad de δ/j sii δ/j depende de γ/i en $\mathcal{F}_n$, γ/i tiene un signo de provisionalidad menos que δ/j y para cualquier expresión $\eta/k \in \mathcal{F}_n$ de la cual dependa δ/j y tenga un signo de provisionalidad menos que δ/j , γ/i depende de η/k .

Definición 20.3: Un cierre provisional es aquél que se produce sii en la secuencia $\mathcal{F}$ ocurre un par de fórmulas de las que una es la negación de la otra y al menos una de las

¹⁰⁴ El método que sigue para evitar determinado tipo de árboles infinitos se denomina de árboles provisionales y ha sido desarrollado para lógica de predicados de primer orden por DÍAZ ESTÉVEZ en el artículo inédito "Reducciones finitas de árboles semánticos infinitos".

dos es provisional. En el caso de que en la secuencia $\mathcal{J}$ se dé un cierre provisional, se tacha la fórmula provisional con cuya aparición se origina el cierre de la secuencia, así como todas las fórmulas con igual número de signos de provisionalidad de las que dependa y la marca que da lugar a dicha fórmula provisional.

(R.V^{*}): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{J} \langle a_k \rangle$ es de la forma $Vx\beta(x)/i$, entonces se añade a $\mathcal{J}$ la expresión $\beta(a_k)/i$, donde a_k es el parámetro de menor subíndice no tachado como marca de $Vx\beta(x)/i$, de modo que:

a) si a_k ya ha aparecido en $\mathcal{J}$, la expresión $\beta(a_k)/i$ se escribe con un signo más de provisionalidad que los que tenga $Vx\beta(x)/i$ y se marca con el signo $|a_k|$;

b) si a_k aún no ha aparecido en $\mathcal{J}$, la expresión $\beta(a_k)/i$ se escribe con los mismos signos de provisionalidad que tenga $Vx\beta(x)/i$ y se marca con el signo $\langle a_k \rangle$.

Con la restricción anterior, el árbol propuesto más arriba se termina del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
& \wedge x \vee y (\neg \alpha(x, x) \wedge \alpha(x, y)) / 1 \langle a, b \rangle \\
& \vee y (\neg \alpha(a, a) \wedge \alpha(a, y)) / 1 \nmid \langle a \rangle \nmid \langle b \rangle \\
& \quad \nmid (\neg \alpha(a, a) \wedge \alpha(a, a)) / 1 \nmid \langle \wedge \rangle \\
& \quad \quad \nmid \neg \alpha(a, a) / 1 \nmid \\
& \quad \quad \nmid \alpha(a, a) / 1 \nmid \\
& \quad (\neg \alpha(a, a) \wedge \alpha(a, b)) / 1 \langle \wedge \rangle \\
& \vee y (\neg \alpha(b, b) \wedge \alpha(b, y)) / 1 \mid \langle a \rangle \mid \\
& \quad \neg \alpha(a, a) / 1 \\
& \quad \alpha(a, b) / 1 \\
& \mid (\neg \alpha(b, b) \wedge \alpha(b, a)) / 1 \mid \langle \wedge \rangle \\
& \quad \mid \neg \alpha(b, b) / 1 \mid \\
& \quad \mid \alpha(b, a) / 1 \mid
\end{aligned}$$

El árbol proporciona un S^* -modelo para la fórmula inicial con un único conjunto modelo μ_1 -lo que es evidente puesto que no hay ninguna ocurrencia de operadores modales en la fórmula- y un dominio $\mathcal{D}(\mu_1) = \{a, b\}$:

	$\alpha(a, a)$	$\alpha(a, b)$	$\alpha(b, a)$	$\alpha(b, b)$
μ_1	0	1	1	0

El siguiente es un caso similar pero con una fórmula modal al inicio del árbol:

$$\begin{aligned}
& \neg [\Box \vee x \alpha(x) \rightarrow \vee x \Box \alpha(x)] / 1 \langle \neg \rangle \\
& \quad \Box \vee x \alpha(x) / 1 \langle 1, 2, 3, \dots \rangle \\
& \quad \neg \vee x \Box \alpha(x) / 1 \langle \neg \rangle \\
& \quad \quad \vee x \alpha(x) / 1 \langle a \rangle \\
& \quad \wedge x \Diamond \neg \alpha(x) / 1 \langle a, b, c, \dots \rangle \\
& \quad \quad \alpha(a) / 1 \\
& \quad \quad \Diamond \neg \alpha(a) / 1 \langle 2 \rangle \\
& \quad \quad \neg \alpha(a) / 2
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \forall x \alpha(x)/2 \langle b \rangle \\
 \alpha(b)/2 \\
 \Diamond \neg \alpha(b)/1 \langle 3 \rangle \\
 \neg \alpha(b)/3 \\
 \forall x \alpha(x)/3 \langle c \rangle \\
 \alpha(c)/3 \\
 . \\
 . \\
 .
 \end{array}$$

El árbol infinito anterior no pararía aunque se aplicase el método de los índices congruentes porque se trata no de un árbol $S4^*$ o $S5^*$ sino de un árbol T^* . En realidad son los parámetros que van apareciendo indefinidamente en el árbol los que provocan que éste no pare. Pero si le aplicamos la restricción de la provisionalidad se obtiene la secuencia siguiente:

$$\begin{array}{c}
 \neg [\Box \forall x \alpha(x) \rightarrow \forall x \Box \alpha(x)]/1 \langle \neg \rangle \\
 \Box \forall x \alpha(x)/1 \langle 1, 2, 3 \rangle \\
 \neg \forall x \Box \alpha(x)/1 \langle \neg \rangle \\
 \forall x \alpha(x)/1 \langle a \rangle \\
 \wedge x \Diamond \neg \alpha(x)/1 \langle a, b \rangle \\
 \alpha(a)/1 \\
 \Diamond \neg \alpha(a)/1 \langle 2 \rangle \\
 \neg \alpha(a)/2 \\
 \forall x \alpha(x)/2 \nmid \langle a \rangle \nmid \langle b \rangle \\
 \nmid \alpha(a)/2 \nmid \\
 \alpha(b)/2 \\
 \Diamond \neg \alpha(b)/1 \langle 3 \rangle \\
 \neg \alpha(b)/3 \\
 \forall x \alpha(x)/3 \mid \langle a \rangle \mid \\
 \mid \alpha(a)/3 \mid
 \end{array}$$

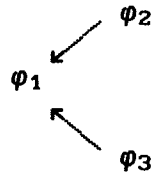
En este caso tenemos que la secuencia anterior se corresponde con $A_T^* \neg [\Box \forall x \alpha(x) \rightarrow \forall x \Box \alpha(x)]$ y que aporta un modelo

que T^* -satisface a la fórmula inicial:

$$\Omega = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} \quad \mathcal{D}(\mu_1) = \{a\} \quad \mathcal{D}(\mu_2) = \{a, b\} \quad \mathcal{D}(\mu_3) = \{a, b\}$$

T^*	$\alpha(a)$	$\alpha(b)$
μ_1	1	-
μ_2	0	1
μ_3	1	0

El siguiente es el esquema propio de la relación de relevancia entre índices:



CAPÍTULO SIETE:

LA INTERPRETACIÓN DEÓNTICA DE LAS MODALIDADES.

La lógica de las normas o lógica deóntica¹⁰⁵ se ocupa, en general, de tres tipos diferentes de enunciados: los enunciados imperativos, los enunciados de valoración y los enunciados normativos.¹⁰⁶ Parece que los tres tengan algo en común, pero queda poco claro hasta qué punto ese algo es discernible de su aspecto puramente lingüístico y por tanto relevante para la lógica. En este sentido, por ejemplo, aunque cabe preguntarse por el tipo de relaciones que vigen

¹⁰⁵ El término *deontik* referido a la lógica de las normas fue usado por vez primera por E. MALLY en *Grundgesetze des Sollens. Elemente der Logik des Willens*, de 1926. Posteriormente, VON WRIGHT utilizó la expresión en su importante artículo "Deontic Logic", con el que se inauguró el estudio actual de esta disciplina de la lógica.

¹⁰⁶ VON WRIGHT realiza una distinción análoga entre nociones deontológicas o normativas, nociones axiológicas o de valor y nociones praxiológicas. Cfr. *Un ensayo de lógica deóntica y la teoría general de la acción*, páginas 11-13. Cfr. también KUTSCHERA, F.: *Fundamentos de ética*, capítulo primero, donde se distingue entre conceptos y principios deónticos y conceptos y principios axiológicos y se establece su interdependencia.

entre los enunciados pertenecientes a cada una de las clases antes mencionadas, sobre todo por lo que respecta a la posibilidad de establecer un modelo único de interpretación para la lógica deóntica en general, o bien si es posible encontrar el modo de reducir dos cualesquiera de ellas a la tercera, ninguna de estas consideraciones tiene valor sin antes determinar lo principal; esto es: si es posible establecer una lógica de la praxis similar a la lógica del razonamiento teórico. Esta última cuestión puede resumirse con la siguiente pregunta: ¿Si lo verdadero y lo falso son los referentes lógicos de los enunciados asertórico-descriptivos, cuáles son los de los enunciados imperativos, valorativos o normativos?

En mi opinión, la teoría semántica de los mundos posibles, además de proporcionar mecanismos de análisis y decisión para la lógica deóntica, permite al filósofo de las normas y la moral (así como al filósofo del lenguaje y de la lógica interesado por estos temas) evitar la servidumbre de la ética y la filosofía práctica con respecto a conceptos como el de verdad, oscuros cuando se aplican fuera de su

ámbito normal de uso.¹⁰⁷

Sin embargo, no me voy a detener en consideraciones de tipo filosófico más que para analizar someramente desde una perspectiva lingüística los enunciados pertenecientes a los tipos antes mencionados. El objeto de este análisis será establecer los límites para la aplicación del procedimiento de decisión de los árboles semánticos desarrollado en los capítulos anteriores en el ámbito de la lógica de los lenguajes normativos.

§20. Lenguajes normativos y lógica.

Entiendo que, desde un punto de vista lógico, los

¹⁰⁷ El criterio empirista de significado adoptado por los filósofos verificacionistas de la corriente del empirismo lógico durante el primer tercio de siglo llevó a algunos autores a negar que los enunciados normativos tuviesen sentido, ya que no eran ni verdaderos ni falsos. Esta postura rancia no es hoy en día defendida por nadie, con excepción de los recalcitrantes que aún manejan la vieja teoría empirista del significado sin tener en cuenta las modificaciones que el concepto de verdad ha sufrido, sobre todo en relación con el estatuto epistemológico de las teorías científicas y su aplicación en la interpretación de la realidad que pretenden explicar. Cfr. en este sentido WARNOCK, M.: *Ethics since 1900*.

enunciados imperativos, como es el caso de

(29) «Pon esta carta en el correo»,

no difieren de los enunciados normativos del tipo «es obligatorio que...». Esto permite traducir (29) por otro enunciado cuya estructura normativa es más propicia para el análisis lógico:

(29') «Es obligatorio que pongas esta carta en el correo».

Hay una objeción inmediata para este tipo de traducciones. Viene a decir que mientras que no parece aceptable preguntarse por el valor de verdad de (29), si se respondería a cualquier pregunta sobre (29') es verdadero o falso, lo que hace sospechar que no existe correspondencia lógica entre ambos enunciados y que por tanto no es posible traducir el uno por el otro. No obstante, si se examina (29') con atención se comprueba que la aseveración

(30) «Es verdad que es obligatorio que pongas esta carta en el correo»

no dice nada sobre lo que acaece (sobre todo no dice que sea cierto que la carta se haya puesto de hecho en el correo), sino que solamente habla sobre la existencia de la prescripción, por lo que (29') es un enunciado verdadero o falso en un sentido muy distinto del que tiene decir de un enunciado asertórico-descriptivo que es o bien lo uno o bien lo otro. Por ello, la reticencia apuntada sobre la traducibilidad de los enunciados imperativos a enunciados normativos queda, a mi entender, salvada en primera instancia. De hecho, no encuentro ningún contraejemplo para este tipo de traducción. Si acaso, aquellas órdenes que suponen una secuencia de acciones habrían de ser traducidas incluyendo matices temporales.¹⁰⁸ Pero esto no es un problema inabordable.

Por su parte, los enunciados de valoración se dividen en dos grupos: el de los enunciados valorativos absolutos y

¹⁰⁸ Supóngase un juego cuyas reglas estuvieran redactadas como prescripciones del tipo

(31) «Si el dado marca seis, ve a la casilla *tal* y tira de nuevo»,

análoga a la norma

(31') «Si el dado marca seis, es obligatorio que antes vayas a la casilla *tal* y que después tires de nuevo el dado».

el de los enunciados valorativos relativos. Los primeros son del tipo

(32) «Esto es bueno» o «Es bueno que tal y tal»

por oposición a

(33) «Esto es malo» o «Es malo que tal y tal».

Los segundos son del tipo

(34) «Esto es mejor que aquello».

"Bueno" y "malo" son valores, como lo son "verdadero" y "falso", "bonito" y "feo", etcétera. En realidad, los enunciados valorativos absolutos constituyen lo que se llama a menudo *juicios de valor*, en tanto que los enunciados valorativos relativos dan lugar a la lógica de la preferencia, que mantiene con respecto a los juicios de valor una relación similar a la que mantiene la lógica de las normas. Esta es: los juicios de valor están en un nivel de lenguaje diferente al de los enunciados normativos o de preferencia; un enunciado del tipo

(33bis) «Matar es malo»

se encuentra en el mismo nivel con respecto a

(35) «Está prohibido matar»

que

(36) «Es verdad que los planetas giran alrededor del Sol»

con respecto a

(37) «Es necesario que los planetas giren alrededor del Sol»,

lo que se explica por un análisis exhaustivo de los conceptos de analiticidad y verdad.

En líneas generales, el establecimiento de una lógica de las normas supone la aceptación de un principio general de racionalidad prioritariamente sobre el principio de extensionalidad, con el consiguiente cambio de perspectiva con respecto a conceptos ya de antiguo acuñados como es el

caso del concepto de *verdad* o el de *validez*,¹⁰⁹ pero esta discusión conduciría a terrenos diferentes de los que aquí interesan. Lo importante en este caso es que los modelos semánticos adoptados para los lenguajes normativos no deben diferir esencialmente de los modelos apropiados para la lógica clásica de predicados de primer orden.

En definitiva, lo que se ha hecho es adoptar una postura acorde con la solución dada al dilema planteado por el lógico nórdico JØRGEN JØRGENSEN, enunciado en el capítulo dos de este trabajo. Ha bastado un cambio de perspectiva sin que fuera necesario cambiar la herramienta de análisis. Así, por lo que se refiere a los lenguajes normativos, el discoloro concepto lógico de *verdad* deja paso al más manejable y eficiente de *pertenencia a un sistema normativo*, asemejándose a lo propuesto para los enunciados asertórico-descriptivos, que son verdaderos si y solamente si pertenecen a un sistema teórico -esto es: si y solamente si tienen un modelo que los satisface-.¹¹⁰

¹⁰⁹ CHARLES L. STEVENSON ofrece en el capítulo VII de *Ética y lenguaje* un buen análisis de estos términos en relación con el lenguaje ético.

¹¹⁰ Ahora bien, si surgen problemas de índole filosófica,

§21. La reinterpretación deóntica de los operadores de modalidad.

El giro lingüístico "es obligatorio que" puede interpretarse en español en dos sentidos diferentes. Uno es el sentido que señala la expresión alemana *Tun-Sollen* (traducible por *deber hacer*) y el otro el que indica la expresión *Sein-Sollen* (traducible por *deber ser*). Ambos sentidos marcan la diferencia de matiz que media entre los enunciados imperativos y los enunciados eminentemente normativos, como es el caso de los que describen las reglas o la estrategia en un juego. Sin embargo, queda dicho que, para los propósitos de la lógica y el alcance de las

éstos no son más recalcitrantes que los que ya existían en el ámbito de la filosofía práctica. El *¿qué debemos hacer?* kantiano mantiene su privilegiada posición de pregunta clave de la ética y la política. Pero ahora es fácil determinar si de lo que se cree deber hacer se sigue consistentemente otro tipo de acciones o no. O dicho de otro modo, si cabe plantearse razonablemente el paso del *deber ser* al *ser* o si, por el contrario, no existe ningún puente que lleve del *reino de los fines* a la realidad de los *facta humana*, con lo que no cabría pasar de lo uno a lo otro tampoco en este sentido (lo que, dicho sea de paso, no es menos intuitivo que la célebre falacia naturalista).

consideraciones a desarrollar en este capítulo, los primeros pueden ser traducidos a enunciados del tipo de estos últimos. De modo que voy a dejar a un lado no sólo la lógica de la preferencia, sino también la lógica de la acción,¹¹¹ que tanto tienen que ver con la lógica de las normas puras, y voy a dedicar las siguientes consideraciones a la extensión del procedimiento de los árboles semánticos a un sistema de lógica deóntica tan restringido como es el caso del sistema estándar de lógica deóntica, que llamaré sistema D.¹¹²

¹¹¹ Creo que puede considerarse a VON WRIGHT el padre de los modernos tratamientos de la lógica deóntica en la mayoría de sus aspectos, incluidos, claro está, los relacionados con la decisión y la acción humanas. Así, sus estudios *The Logic of Preference, Norm and Action* y *An Essay in Deontic Logic and the General Theory of Action* se encuentran en la base de todas las consideraciones que aquí se apuntan. Asimismo, como estudios introductorios a las lógicas de la decisión, la preferencia y la acción, cfr. RESCHER, N. (ed.): *The Logic of Decision and Action* y también *The Logic of Action and Preference*.

¹¹² El nombre de *sistema estándar de lógica deóntica* lo tomo de BENGT HANSON, quien se refiere a él como «el más pequeño conjunto [de fórmulas] que cumple los siguientes requisitos: (i) para cualquier fórmula α de BL [un cálculo básico de proposiciones], $\Box\alpha$ es una fórmula del sistema estándar de lógica deóntica SDL; (ii) la negación de cualquier fórmula de SDL es una fórmula de SDL; (iii) la disyunción de cualesquiera dos fórmulas de SDL es una fórmula de SDL». Cfr. HANSON, B.: "An Analysis of Some Deontic Logics", en HILPINEN, R. (ed.): *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*, página 122. Aquí, para mayor agilidad, se amplía la definición de HANSON para los signos $\Diamond$, $\wedge$ y $\rightarrow$ en idénticos términos. El sistema D que se analiza en este

Al interpretar deónticamente los operadores modales hay que tener en cuenta que habrá que trabajar con sistemas lógicos atípicos con respecto a lo que se podría llamar *la generalización modal del axioma de Aristóteles*. Esto es, el principio $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ de lógica modal alética (análogo al principio $\Lambda x\alpha(x) \rightarrow \alpha(a)$ de lógica cuantificacional) no tiene un equivalente deóntico, puesto que del hecho de que algo sea obligatorio no se sigue de ningún modo que ese algo sea de hecho. En cambio, sí debe funcionar el principio $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ (cuyo análogo es $\Lambda x\alpha(x) \rightarrow \forall x\alpha(x)$ en lógica cuantificacional). En última instancia, tales peculiaridades se deben a que no se puede admitir en un sistema estándar de lógica deóntica una regla similar a la *regla de necesidad*

$$\vdash \alpha \Rightarrow \vdash \Box\alpha,$$

que sí vale en los sistemas de lógica modal alética estudiados.¹¹³ Ni siquiera es admisible el teorema de T

capítulo es el sistema DM que aparece en FITCH, F.B.: "Tree Proofs in Modal Logic", página 152.

¹¹³ Por lo tanto, el sistema estándar de lógica deóntica no es un sistema normal de lógica modal.

$$\vdash \alpha \rightarrow \Diamond \alpha.$$

Estas restricciones hacen que D sea aún más débil que T. De hecho, incluyendo algunas pequeñas modificaciones en la definición de T-modelo se obtiene un D-modelo. Así, las condiciones definidas en su momento para los operadores de modalidad no varían al reinterpretarlos deónticamente:

(C. $\Box$): Si $\Box \alpha \in \Omega$ entonces para todo $\lambda \in \Omega$ tal que $\mu R \lambda$, $\alpha \in \lambda$.

(C. $\Diamond$): Si $\Diamond \alpha \in \Omega$ entonces hay un $\lambda \in \Omega$ tal que $\mu R \lambda$ y $\alpha \in \lambda$.

Pero si, como queda expuesto, no puede derivarse en el sistema la fórmula α a partir de $\Box \alpha$, es imprescindible que el conjunto modelo λ no sea el mismo que el conjunto modelo μ ($\lambda \neq \mu$); lo que es tanto como decir que no es el caso que $\mu R \mu$, con la excepción de un mundo posible perfecto en el que nunca se infrinjan las normas. Cabe calificar por ello los D-modelos como sistemas modelos atípicos para los que la definición de la relación de alternatividad no ha de contemplar la propiedad reflexiva para todos los conjuntos

modelos de Ω ; ¹¹⁴ en cuyo caso, atendiendo a la definición de la relación de alternatividad dada en el capítulo uno, deberá cumplir alguna cláusula apropiada que la restrinja en el sentido adecuado. Esta es la que llamo cláusula aliorrelativa y que defino del modo siguiente: Si $\mu_i \in \Omega$ entonces, si hay en Ω al menos un μ_j tal que $\mu_j R \mu_i$ entonces $\mu_i R \mu_i$. ¹¹⁵

En cualquier otro caso, un conjunto modelo no es alternativo a sí mismo. Por tanto, aunque los D-modelos no son sistemas modelos normales en el sentido de KRIPKE, tampoco son totalmente extraños al conjunto de los sistemas modelos normales estudiados en este trabajo, por lo que

¹¹⁴ Cfr. KRIPKE, S.: "Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi", página 95: «Si desechásemos la condición de que R sea reflexiva, esto equivaldría a abandonar el axioma modal $\Box A \rightarrow A$. De este modo, podríamos obtener sistemas del tipo requerido por la lógica deóntica».

¹¹⁵ El motivo de condicionar que $\mu R \mu$ a que haya algún ν tal que $\nu R \mu$ es que no se puede descartar el hecho de que las normas no siempre se incumplen, excepto cuando no es posible obedecerlas. Ahora bien, siempre que es posible cumplir una norma se puede pensar en un mundo posible alternativo al actual en el que ésta sí se cumple. No se debe confundir esta consideración con el planteamiento del principio *sollen-können*, que se analizará más adelante.

cabría calificarlos como *sistemas modelos cuasi-normales*.¹¹⁶ Así, el cuadro de las propiedades de la relación de alternatividad del §6 tendrá que ser completado del modo siguiente:

Sistema.	Propiedad.	Cláusulas que cumple la relación.
D	Serialidad Aliorrelatividad	$\forall \lambda \exists \mu (\lambda R \mu)$ $\forall \mu (\exists \lambda (\lambda R \mu) \rightarrow (\mu R \mu))$

Estas restricciones de los D-modelos se reflejan en las reglas de formación del árbol a través de la modificación de la definición de índices relativos al añadir la siguiente cláusula:

Definición 21.1: Como la definición 8.5 pero añadiendo:

$$e) \forall i, j \in \mathcal{J} \ i \sim_D j \text{ sii } i \sim j \text{ ó } i = j \ \& \ \exists k \in \mathcal{J} \ k \sim i.$$

¹¹⁶ Cfr. SCHOTCH, P.K. & JENNINGS R.E.: "Non-Kripkean Deontic Logic", en HILPINEN, R.: *New Studies in Deontic Logic*, quienes proponen diversas estructuras modelos no kripkeanas para la lógica deóntica.

Aplicando ($R_D, \Box$) puede probarse la D-validez de los principales teoremas del sistema estándar de lógica deóntica.¹¹⁷ Los tres primeros árboles prueban la D-validez de los axiomas característicos de D.

[AD1] $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ ¹¹⁸

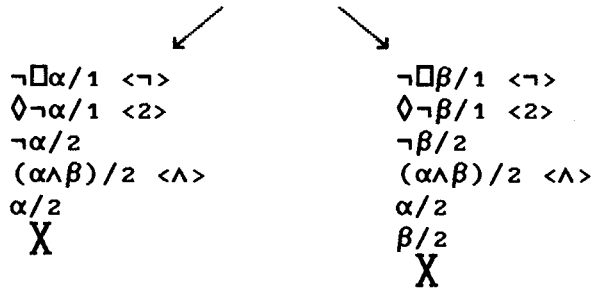
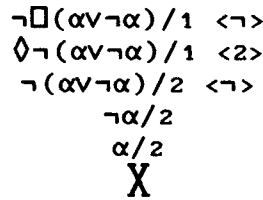
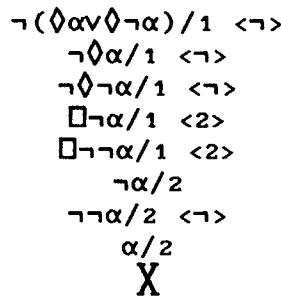
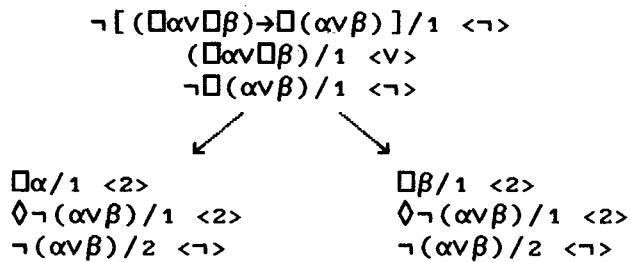
$$\begin{array}{l}
 \neg(\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha)/1 <\neg> \\
 \Box\alpha/1 <2> \\
 \neg\Diamond\alpha/1 <\neg> \\
 \Box\neg\alpha/1 <2> \\
 \alpha/2 \\
 \neg\alpha/2 \\
 \text{X}
 \end{array}$$

[AD2] $\Box(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$

$$\begin{array}{l}
 \neg[\Box(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\Box\alpha \wedge \Box\beta)]/1 <\neg> \\
 \Box(\alpha \wedge \beta)/1 <2> \\
 \neg(\Box\alpha \wedge \Box\beta)/1 <\neg>
 \end{array}$$

¹¹⁷ He hecho una selección de las leyes y principios que VON WRIGHT estudia en "Deontic Logic". Concretamente, los teoremas [TD4]-[TD10] se corresponden con las que él llamó leyes sobre el compromiso (*laws of commitment*), que dan lugar a las famosas paradojas sobre el compromiso, como la de Ross [TD11].

¹¹⁸ En este árbol, el índice 2 no aparece en la secuencia al marcar una fórmula del tipo $\Diamond\beta$, por lo que no es relativo al índice 1. Sin embargo, es necesario que haya al menos un $\mu_1\mu_2$ por la definición dada de la relación de alternatividad en D, que contempla la cláusula de serialidad o idealización. O dicho de otro modo, un enunciado normativo de obligación sólo tiene sentido si hay al menos un mundo posible (ideal o no) en el que la norma se cumple.

[AD3] $\Box(\alpha \vee \neg \alpha)$ [TD1] $\Diamond \alpha \vee \Diamond \neg \alpha$ [TD2] $(\Box \alpha \vee \Box \beta) \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$ 

$$\begin{array}{c} \alpha/2 \\ \neg\alpha/2 \\ \text{X} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \beta/2 \\ \neg\alpha/2 \\ \neg\beta/2 \\ \text{X} \end{array}$$

[TD3] $\Diamond(\alpha\wedge\beta)\rightarrow(\Diamond\alpha\wedge\Diamond\beta)$

$$\begin{array}{c} \neg[\Diamond(\alpha\wedge\beta)\rightarrow(\Diamond\alpha\wedge\Diamond\beta)]/1 <\neg> \\ \Diamond(\alpha\wedge\beta)/1 <2> \\ \neg(\Diamond\alpha\wedge\Diamond\beta)/1 <\neg> \\ (\alpha\wedge\beta)/2 <\wedge> \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{c} \neg\Diamond\alpha/1 <\neg> \\ \alpha/2 \\ \beta/2 \\ \Box\neg\alpha/1 <2> \\ \neg\alpha/2 \\ \text{X} \end{array} & \begin{array}{c} \neg\Diamond\beta/1 <\neg> \\ \alpha/2 \\ \beta/2 \\ \Box\neg\beta/1 <2> \\ \neg\beta/2 \\ \text{X} \end{array} \end{array}$$

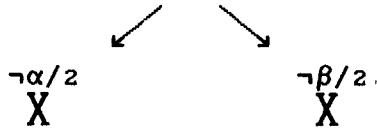
[TD4] $(\Box\alpha\wedge\Box(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow\Box\beta$ ¹¹⁹

$$\begin{array}{c} \neg[(\Box\alpha\wedge\Box(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow\Box\beta]/1 <\neg> \\ (\Box\alpha\wedge\Box(\alpha\rightarrow\beta))/1 <\wedge> \\ \neg\Box\beta/1 <\neg> \\ \Box\alpha/1 <2> \\ \Box(\alpha\rightarrow\beta)/1 <2> \\ \Diamond\neg\beta/1 <2> \\ \neg\beta/2 \\ \alpha/2 \\ (\alpha\rightarrow\beta)/2 <\rightarrow> \end{array}$$

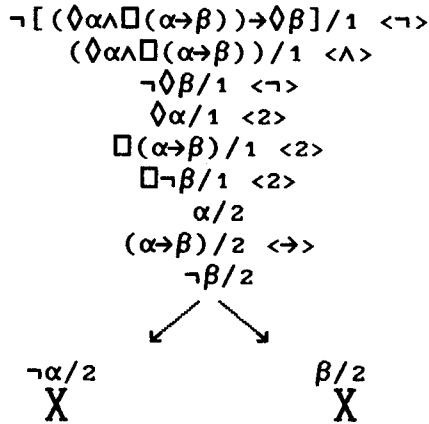
¹¹⁹ Este teorema fue llamado por VON WRIGHT ley de la obligación derivada. Da lugar a las conocidas paradojas de la obligación derivada, evidentemente emparentadas con las paradojas de la implicación estricta:

1. $\neg\Diamond\alpha\rightarrow\Box(\alpha\rightarrow\beta)$;
2. $\Box\beta\rightarrow\Box(\alpha\rightarrow\beta)$.

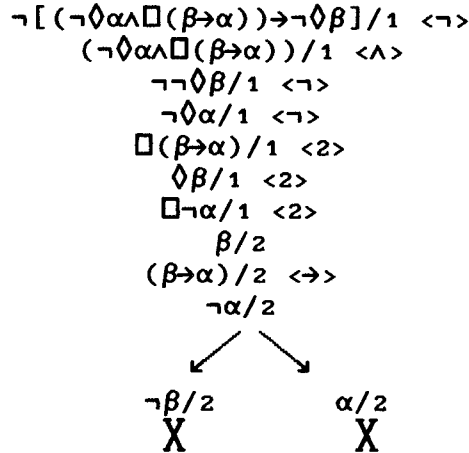
Cfr. AQVIST, L.: *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems*, capítulo II.



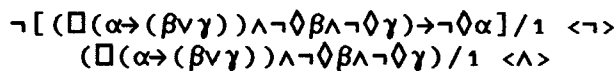
[TD5] $(\Diamond\alpha \wedge \Box(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \Diamond\beta$

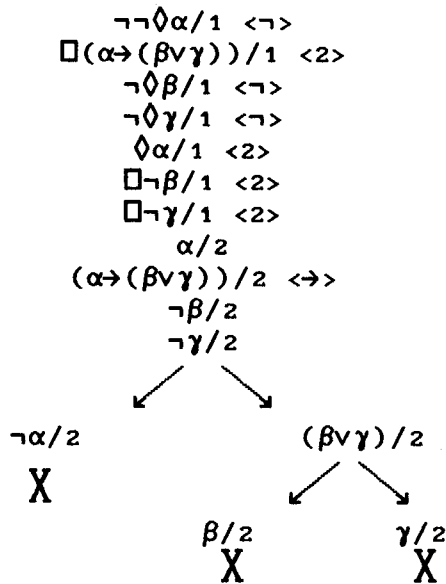


[TD6] $(\neg\Diamond\alpha \wedge \Box(\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow \neg\Diamond\beta$

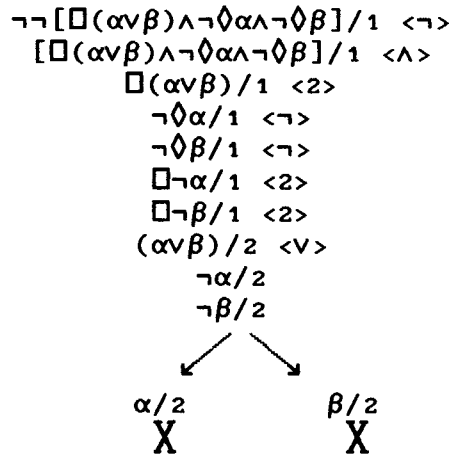


[TD7] $(\Box(\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)) \wedge \neg\Diamond\beta \wedge \neg\Diamond\gamma) \rightarrow \neg\Diamond\alpha$

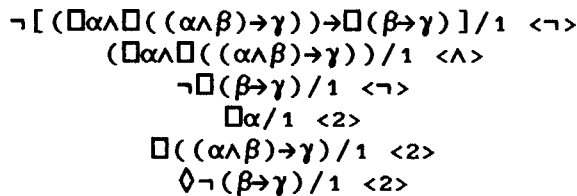


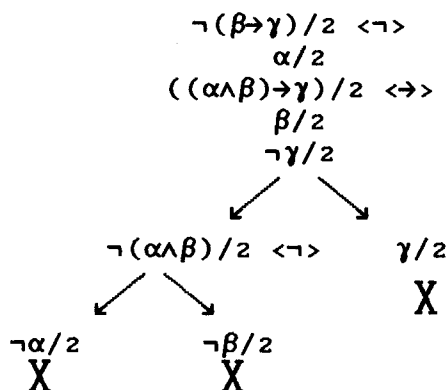


[TD8] $\neg[\Box(\alpha\vee\beta)\wedge\neg\Diamond\alpha\wedge\neg\Diamond\beta]$

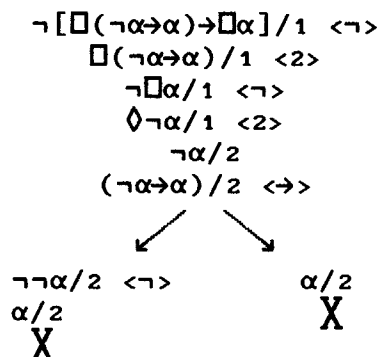


[TD9] $(\Box\alpha\wedge\Box((\alpha\wedge\beta)\rightarrow\gamma))\rightarrow\Box(\beta\rightarrow\gamma)$

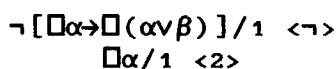




[TD10] $\Box(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \Box\alpha$



[TD11] $\Box\alpha \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$ ¹²⁰



¹²⁰ [TD11] es la conocida paradoja de Ross. Debe su nombre a ALF Ross, quien la enunció diciendo que de este teorema se sigue, por ejemplo, que si es obligatorio poner una carta en el correo entonces también lo es ponerla en el correo o quemarla. Cfr. Ross, A.: "Imperatives and Logic" y también *Directives and Norms*, §33. Asimismo, cfr. Åqvist, L.: *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems*, capítulo II.

$$\begin{array}{c}
\neg \Box(\alpha \vee \beta) / 1 < \neg > \\
\Diamond \neg(\alpha \vee \beta) / 1 < 2 > \\
\neg(\alpha \vee \beta) / 1 < \neg > \\
\alpha / 2 \\
\neg \alpha / 2 \\
\text{X}
\end{array}$$

§22. La reducción de la lógica deóntica a la lógica modal alética. El sistema SK.

Una vez analizados los D-modelos, merece la pena hacer algunas consideraciones sobre determinados aspectos relevantes relacionados con la lógica de las normas y la filosofía práctica.

El filósofo IMMANUEL KANT fue quien en primer lugar introdujo en el ruedo filosófico, en relación con sus disquisiciones acerca de la naturaleza de la libertad humana, el problema de la obligatoriedad de hacer lo que no es posible hacer.¹²¹ Este principio, que declara que sólo

¹²¹ Para KANT, la libertad humana es la consecuencia de que sea posible para un hombre actuar como debe hacerlo, esto es: ateniéndose a los mandatos de las leyes morales puras, «que determinan *a priori* [...] lo que es preciso hacer o no hacer [...]. En efecto, como ella [la razón pura] proclama que estos actos deben tener lugar, es preciso también, por consiguiente, que puedan tener lugar». KANT I.: *Kritik der*

puede ser obligatorio aquello que es posible, recibe el nombre de principio *sollen-können* y ha sido ampliamente estudiado desde una perspectiva lógica, por ejemplo, por VON WRIGHT en *Norm and Action*.¹²² El estudio de este principio y su presencia en algunos sistemas lógicos interesa en tanto que su tratamiento puede convertirse en la puerta que introduzca en el ámbito de la lógica de las modalidades mixtas, deónticas y aléticas. Con este norte voy a realizar, en primera instancia, algunas consideraciones acerca de los intentos de reducción de la lógica deóntica a la lógica modal alética, centrando mi atención en las propuestas de A.R. ANDERSON, para esbozar posteriormente un sistema lógico mixto.¹²³

La pretensión de reducir la lógica deóntica a la lógica de la necesidad y la posibilidad tiene un claro origen intuitivo en la proximidad que en las lenguas indoeuropeas

reinen Vernunft, A 807.

¹²² Cfr. op. cit., capítulo VII.

¹²³ En este párrafo voy a distinguir entre el uso alético y el deóntico de los operadores modales al escribirlos de distinta forma, evitando así confusiones innecesarias. De modo que los operadores aléticos correspondientes a $\Box$ y a $\Diamond$ van a ser **N** y **M**, en tanto que los deónticos serán $\Box$ y **L**, respectivamente.

existe entre los conceptos "se puede" y "está permitido".¹²⁴ No obstante, las propuestas que en este sentido han sido hechas por los lógicos, lejos de tener en cuenta el aspecto meramente lingüístico y, en última instancia, atávico de la relación entre ambas expresiones, se han decantado más por el establecimiento de sistemas en los que los operadores modales son interpretados como operadores aléticos. A.R. ANDERSON, cuyos sistemas expuestos en "The Formal Analysis of Normative Systems" y en "The Formal Analysis of Normative Concepts" (este último artículo escrito en colaboración con O.K. MOORE) voy a tomar aquí como modelo para analizar este tipo de reducciones, representa un caso característico y muy útil para mi argumentación.¹²⁵

En "The Formal Analysis of Normative Systems", sobre una base axiomática de lógica proposicional más tres axiomas

¹²⁴ Quiero expresar aquí con estos giros la distinción que en inglés, por ejemplo, es más evidente entre los verbos *can* y *may*, ambos traducidos al español habitualmente por "poder".

¹²⁵ LENNART ÅQVIST en el capítulo IV de *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems* ofrece diez sistemas diferentes de lógica modal alética con una constante proposicional como representación de los respectivos sistemas de lógica deóntica monádica.

modales¹²⁶ ANDERSON propone añadir el *axioma deóntico* siguiente, al que llamaré *axioma de Anderson*:

[AA] $M \neg S$,

donde S es una constante proposicional ya interpretada,¹²⁷ así como las siguientes definiciones, con el objeto de obtener un sistema normativo:

$$L\alpha =_{\text{def}} M(\alpha \wedge \neg S),$$

$$O\alpha =_{\text{def}} \neg L\neg\alpha.$$

¹²⁶ Estos axiomas son (i) $\alpha \rightarrow M\alpha$, (ii) $M(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (M\alpha \vee M\beta)$ y (iii) $\neg M(\alpha \wedge \neg\alpha)$. En realidad se trata del sistema M de VON WRIGHT, el cual, con la debida modificación del axioma (i), da lugar al sistema D , antes descrito.

¹²⁷ En efecto, la proposición S indica en el sistema de ANDERSON la existencia de una sanción. Así, dice en "The Formal Analysis of Normative Systems": «Un estado de cosas p es obligatorio si la falsedad de p implica necesariamente la sanción S ; p está prohibido si p implica necesariamente la sanción S ; p está permitido si es posible que p sea verdadero sin que lo sea la sanción». Cfr. op. cit., página 170. Más tarde, en "The Formal Analysis of Normative Concepts", ANDERSON define la proposición S en función de una constante B no interpretada, pero que en palabras del propio autor indica oblicuamente un estado de cosas malo. La definición en cuestión es:

$$S =_{\text{def}} M\neg B \wedge B,$$

lo que provoca la modificación del axioma de Anderson en los siguientes términos:

[AA*] $M\neg(M\neg B \wedge B)$.

Estas definiciones son modificadas en "The Formal Analysis of Normative Concepts", donde propone las alternativas:

$$L\alpha =_{\text{def}} M\neg\alpha\wedge M(\alpha\wedge\neg S),$$

$$O\alpha =_{\text{def}} (M\alpha\wedge M\neg\alpha)\wedge\neg M(\neg\alpha\wedge\neg S).$$

Si se analizan correctamente las dos nuevas definiciones de los operadores deónticos se comprueba que en ambas las modificaciones efectuadas suponen la asunción del principio *sollen-können*, que no era asumido por las anteriores. La primera de ambas definiciones establece que decir que está permitido α es lo mismo que decir que es posible que no sea el caso que α y que es posible que lo sea sin que haya sanción; la segunda establece que decir que es obligatorio α es lo mismo que afirmar que son posibles tanto α como $\neg\alpha$ pero que es imposible que $\neg\alpha$ sea el caso sin que haya sanción.

La interpretación de las normas hecha por ANDERSON es, sin lugar a dudas, ingeniosa, pero depende del concepto de sanción, cuya adición en forma de constante proposicional interpretada complica en exceso la elegante simplicidad de

la lógica modal alética. La posterior sustitución de la constante proposicional S por la constante proposicional B no simplifica para nada el sistema, sino todo lo contrario. Ahora bien, la velada interpretación que el propio ANDERSON hace al dejar entrever que la constante proposicional B hace referencia a un *estado de cosas malo* recuerda mucho toda la discusión mantenida en esta tesis acerca del carácter de los mundos posibles. De hecho, las intuiciones de ANDERSON son perfectamente asumibles por la semántica de los mundos posibles en un sistema en el que se tenga en cuenta el principio *sollen-können*. Creo por tanto conveniente discutir un sistema deóntico mixto obtenido sobre la base del sistema D mediante la adición del referido principio. Para ello, es importante determinar en primer lugar cuál es la más conveniente formalización del principio *sollen-können*.

Atendiendo a la definición dada al comienzo del párrafo, el principio establece que sólo puede ser obligatorio aquello que es posible. Con ella sigo de cerca el planteamiento de VON WRIGHT en *Norma y Acción* cuando propone explícitamente la siguiente definición del principio:

«Que algo sea el contenido de una prescripción entraña que el sujeto de la prescripción pueda hacer dicho algo». ¹²⁸

Posteriormente, después de haber apuntado la inconveniencia de los conceptos "entraña lógicamente" e "implica lógicamente" en este contexto, VON WRIGHT ofrece la redefinición siguiente:

«Que haya una prescripción que encarece o permite una determinada cosa presupone que el sujeto (sujetos) de la prescripción pueda hacer lo que se encarece o permite». ¹²⁹

De este análisis se desprende que la relación que se establece entre la obligatoriedad y la posibilidad no es una relación de implicación lógica, sino más bien de presuposición deóntica. El principio *sollen-können* es un presupuesto normativo, lo que ha de quedar plasmado en su formalización.

JAAKKO HINTIKKA también aborda esta discusión en

¹²⁸ Cfr. op. cit., página 125.

¹²⁹ Ibidem, página 126.

términos similares. Frente a la formulación del principio mediante la fórmula

$$\Box\alpha \rightarrow M\alpha,$$

HINTIKKA propone un tipo de relación diferente entre la obligatoriedad de una norma y la posibilidad de cumplirla. Prefiere tratar el principio *sollen-können* como una implicación deóntica y propone la siguiente fórmula:

$$[SK] \quad \Box(\Box\alpha \rightarrow M\alpha).^{130}$$

Esta es la formulación del principio que voy a adoptar aquí porque entiendo que es la más conveniente y adecuada a los análisis efectuados por el mismo VON WRIGHT.

Añadido, por tanto, el axioma [SK] al sistema D se obtiene un sistema mixto, al que llamaré SK, cuyo SK-modelo se comportará en lo principal como un T-modelo para los operadores aléticos y un D-modelo para los operadores

¹³⁰ Cfr. HINTIKKA, J.: "Deontic Logic and its Philosophical Morals" en *Models for Modalities*, pp.: 196-199.

deónticos. Las reglas de formación del árbol en SK no difieren en demasía de las propias de los T-modelos y de los D-modelos, excepto por la necesaria distinción en la secuencia entre índices T-relativos e índices D-relativos, ya definidos.¹³¹

Las reglas de formación del árbol en el sistema SK son, por tanto, $(R_{SK}.M)=(R_{SK}.L)=(R.\Diamond)$, $(R_{SK}.N)=(R_T.\Box)$ y $(R_{SK}.O)=(R_D.\Box)$. He aquí la prueba de validez de algunos teoremas de SK:

[SK] $\Diamond(O\alpha \rightarrow M\alpha)$

$$\begin{array}{l} \neg O(O\alpha \rightarrow M\alpha) / 1 <\neg> \\ L\neg(O\alpha \rightarrow M\alpha) / 1 <2> \\ \neg(O\alpha \rightarrow M\alpha) / 2 <\neg> \\ O\alpha / 2 <2> \\ \neg M\alpha / 2 <\neg> \\ N\neg\alpha / 2 <2> \\ \neg\alpha / 2 \\ \alpha / 2 \\ X \end{array}$$

[TSK1] $\Diamond(N\alpha \rightarrow L\alpha)$

$$\begin{array}{l} \neg O(N\alpha \rightarrow L\alpha) / 1 <\neg> \\ L\neg(N\alpha \rightarrow L\alpha) / 1 <2> \\ \neg(N\alpha \rightarrow L\alpha) / 2 <\neg> \end{array}$$

¹³¹ Cfr. definiciones 8.5(a) y 21.1.

$$\begin{array}{c}
 N\alpha/2 <2> \\
 \neg L\alpha/2 <\neg> \\
 \alpha/2 \\
 \mathcal{O}\neg\alpha/2 <2> \\
 \neg\alpha/2 \\
 X
 \end{array}$$

[TSK2] $N\mathcal{O}\alpha \rightarrow \mathcal{O}\alpha$

$$\begin{array}{c}
 \neg(N\mathcal{O}\alpha \rightarrow \mathcal{O}\alpha)/1 <\neg> \\
 N\mathcal{O}\alpha/1 <1> \\
 \neg\mathcal{O}\alpha/1 <\neg> \\
 \mathcal{O}\alpha/1 <2> \\
 L\neg\alpha/1 <2> \\
 \neg\alpha/2 \\
 \alpha/2 \\
 X
 \end{array}$$

[TSK3] $L\alpha \rightarrow ML\alpha$

$$\begin{array}{c}
 \neg(L\alpha \rightarrow ML\alpha)/1 <\neg> \\
 L\alpha/1 <2> \\
 \neg ML\alpha/1 <\neg> \\
 \alpha/2 \\
 N\mathcal{O}\neg\alpha/1 <1> \\
 \mathcal{O}\neg\alpha/1 <2> \\
 \neg\alpha/2 \\
 X
 \end{array}$$

[TSK4] $N(\mathcal{O}\alpha \rightarrow L\alpha)$

$$\begin{array}{c}
 \neg N(\mathcal{O}\alpha \rightarrow L\alpha)/1 <\neg> \\
 M\neg(\mathcal{O}\alpha \rightarrow L\alpha)/1 <2> \\
 \neg(\mathcal{O}\alpha \rightarrow L\alpha)/2 <\neg> \\
 \mathcal{O}\alpha/2 <3> \\
 \neg L\alpha/2 <\neg> \\
 \mathcal{O}\neg\alpha/2 <3> \\
 \alpha/3 \\
 \neg\alpha/3 \\
 X
 \end{array}$$

En este último árbol, la cuarta y sexta fórmulas se marcan con el índice 3 por la misma razón dada anteriormente para [AD1]. No se marcan con el índice 2 aparecido en la secuencia puesto que $1 \sim_T 2$, pero no $1 \sim_D 2$.

CAPÍTULO OCHO:

CORRECCIÓN Y COMPLETITUD.

§23. El cálculo CD^* .

En el presente párrafo va a ser definido un cálculo deductivo que llamaré cálculo CD^* .¹³² Este cálculo tiene la ventaja sobre los denominados cálculos deductivos naturales de que no sólo es útil para obtener resultados en los diferentes sistemas normales de lógica modal sino también para obtener resultados acerca de dichos sistemas. Esto es, se va a utilizar el cálculo CD^* en la obtención de determinados resultados metateóricos sobre los sistemas normales de lógica modal.¹³³

¹³² El presente cálculo CD^* para lógica modal está basado en el cálculo homónimo para lógica de predicados eneádicos desarrollado por E. DÍAZ ESTÉVEZ, aún inédito.

¹³³ En cualquier caso, en el apéndice II se presenta también un cálculo deductivo natural para lógica modal.

Definición 23.1: Una CD^* -expresión es toda expresión que verifica lo siguiente:

1. $\mathcal{A}$ es una CD^* -expresión.
2. Si α es una sentencia e i es un índice cualquiera entonces α/i es una CD^* -expresión.
3. Si α/i es una CD^* -expresión entonces:
 - a) $\neg \alpha/i$ (llamada hipótesis) es una CD^* -expresión;
 - b) $\vdash \alpha/i$, $\mid \alpha/i$ y $\lfloor \alpha/i$ (llamadas expresiones canceladas) son CD^* -expresiones;
 - c) $\neg \alpha \neg$ (llamada expresión tachada) es una CD^* -expresión.
4. Nada más es una CD^* -expresión.

Definición 23.2: Una CD^* -secuencia Σ es una secuencia de CD^* -expresiones.

Definición 23.3: Una CD^* -expresión α/i o bien dos CD^* -expresiones consecutivas α/i y β/j que ocurren en una dada CD^* -secuencia Σ de CD^* -expresiones provienen en Σ de una dada CD^* -expresión $\gamma/h \in \Sigma$ anterior (o de un par de CD^* -expresiones $\vartheta/h, \zeta/h \in \Sigma$ anteriores) sii se verifica que:

- a) α/i es $\mathcal{A}$ y ya γ/h es $\neg(a=a)/i$ o $\neg \neg(a=a)/i$ ya ϑ/h y ζ/h son δ/i y $\neg \delta/i$ o $\neg \delta/i$ y $\neg \delta/i$, respectivamente.

- b) α/i es δ/i y γ/h es $\neg\delta/i$ o $\neg\neg\delta/i$;
- c) α/i y β/j son respectivamente δ/i y η/i y γ/h es $(\delta\wedge\eta)/i$ o $\neg(\delta\wedge\eta)/i$;
- d) α/i y β/j son respectivamente $\neg\delta/i$ y $\neg\eta/i$ y γ/h es $\neg(\delta\vee\eta)/i$ o $\neg\neg(\delta\vee\eta)/i$;
- e) α/i y β/j son respectivamente δ/i y $\neg\eta/i$ y γ/h es $\neg(\delta\rightarrow\eta)/i$ o $\neg\neg(\delta\rightarrow\eta)/i$;
- f) α/i es $\neg\delta/i$ y γ/h es $(\delta\vee\eta)/i$ o $\neg(\delta\vee\eta)/i$;
- g) α/i es $\neg\neg\delta/i$ y γ/h es $\neg(\delta\wedge\eta)/i$ o $\neg\neg(\delta\wedge\eta)/i$ o $(\delta\rightarrow\eta)/i$ o $\neg(\delta\rightarrow\eta)/i$;
- h) α/i es δ/i , donde i es el menor índice que no ocurre en ninguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i , y γ/h es $\Diamond\delta/h$ o $\neg\Diamond\delta/h$;
- i) α/i es $\neg\delta/i$, donde i es el menor índice que no ocurre en ninguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i , y γ/h es $\neg\Box\delta/h$ o $\neg\neg\Box\delta/h$;
- j) α/i es δ/i , donde i es un índice que ocurre en alguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i , y γ/h es $\Box\delta/h$ o $\neg\Box\delta/h$;
- k) α/i es $\neg\delta/i$, donde i es un índice que ocurre en alguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i , y γ/h es $\neg\Diamond\delta/h$ o $\neg\neg\Diamond\delta/h$;
- l) α/i es $\delta(a)/i$, donde a es el primer parámetro que no ocurre en ninguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ

anterior a α/i , y γ/h es $\forall x\delta(x)/i$ o $\neg\forall x\delta(x)/i$;

m) α/i es $\neg\delta(a)/i$, donde a es el primer parámetro que no ocurre en ninguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i , y γ/h es $\neg\Lambda x\delta(x)/i$ o $\neg\neg\Lambda x\delta(x)/i$;

n) α/i es $\delta(a)/i$, donde a es un parámetro que ocurre en alguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i (o el primer parámetro si con anterioridad a α/i no ocurre ningún parámetro en Σ), y γ/h es $\Lambda x\delta(x)/i$ o $\neg\Lambda x\delta(x)/i$;

ñ) α/i es $\neg\delta(a)/i$, donde a es un parámetro que ocurre en alguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i (o el primer parámetro si con anterioridad a α/i no ocurre ningún parámetro en Σ), y γ/h es $\neg\forall x\delta(x)/i$ o $\neg\neg\forall x\delta(x)/i$.

Definición 23.4: Si Σ es una CD^* -secuencia cualquiera, Γ es una CD^* -secuencia de CD^* -expresiones consecutivas $\langle \vdash \beta/i, \vdash \gamma_1/j, \dots, \vdash \gamma_n/k, \underline{\mathcal{A}} \rangle$ tal que $\Gamma \subset \Sigma$ y α/h es una CD^* -expresión, se dice que α/h proviene de la secuencia Γ en Σ si α/h ocurre en Σ inmediatamente después de la última expresión de Γ y $\neg\beta/i$ proviene en Σ de $(\beta \vee \alpha)/i$ o β/i es $\neg\delta/i$ y $\neg\beta/i$ proviene de $(\delta \supset \alpha)/i$ o de $\neg(\delta \wedge \gamma)/i$, siendo α en este caso la fórmula $\neg\gamma$.

Definición 23.5: Una CD^* -expresión $\alpha/i \in \Sigma$ está usada sii con posterioridad a ella ocurren en Σ todas las CD^* -expresiones que provienen de α/i en Σ .

Definición 23.6: Una CD^* -secuencia $\Gamma \subset \Sigma$ de CD^* -expresiones consecutivas canceladas tales que la primera es una hipótesis y la última es la fórmula $\mathcal{A}$ está usada en Σ sii la CD^* -expresión γ/i que proviene de Γ ocurre en Σ inmediatamente después de la última de las CD^* -expresiones de Γ .

Definición 23.7: Una CD^* -secuencia de una sentencia α (abreviadamente $\Sigma\alpha$) es cualquiera de las más pequeñas secuencias de CD^* -expresiones que verifican:

1. La primera CD^* -expresión de $\Sigma\alpha$ es $\alpha/1$.
2. a) Si en $\Sigma\alpha$ ocurre un par de CD^* -expresiones del tipo β/i y $\neg\beta/i$ o bien una CD^* -expresión de la forma $\neg(a=a)/i$ no previamente canceladas ni tachadas entonces $\mathcal{A}$ ocurre en $\Sigma\alpha$ inmediatamente después.
- b) Si $\mathcal{A}$ ocurre en $\Sigma\alpha$ y anteriormente a ella no ocurre ninguna hipótesis no previamente cancelada entonces $\mathcal{A}$ es la última CD^* -expresión de $\Sigma\alpha$ y sólo en ese caso se dice que $\Sigma\alpha$ es cerrada.
- c) Si $\mathcal{A}$ ocurre en $\Sigma\alpha$ posteriormente a una hipótesis

no previamente cancelada, todas las CD^* -expresiones de la subsecuencia que comienza con la hipótesis no cancelada anterior a $\mathcal{A}$ y termina con $\mathcal{A}$ están canceladas, ambas inclusive.

d) Si $(a=b)/i$ ¹³⁴ ocurre no previamente cancelada ni tachada en $\Sigma\alpha$, siendo b y a parámetros diferentes de modo que b aparece en $\Sigma\alpha$ con posterioridad al parámetro a , entonces:

i) todas las CD^* -expresiones $\beta(b)/i \in \Sigma\alpha$ no previamente canceladas ni tachadas anteriores a $(a=b)/i$ están tachadas;

ii) por cada CD^* -expresión de la forma $\beta(b)/i \in \Sigma\alpha$ que esté tachada ocurre después de $(a=b)/i$ la CD^* -expresión $\beta(a)/i$.

e) Si $\Sigma\alpha$ no está cerrada entonces toda CD^* -expresión de $\Sigma\alpha$ que no está cancelada o tachada está usada y toda secuencia de CD^* -expresiones consecutivas canceladas en $\Sigma\alpha$ está usada.

Definición 23.8: Una CD^* -demostración de α en el sistema S $\left(\frac{\vdash \alpha}{S} \right)$ es la CD^* -secuencia $\Sigma \vdash \alpha$ que es cerrada.

¹³⁴ O bien $(b=a)/i$.

Definición 23.9: Una CD^* -deducción de α en el sistema modal S a partir del conjunto de fórmulas Γ ($\Gamma \vdash_S \alpha$) es una demostración CD^* en el sistema S de $\neg(\gamma \wedge \neg\alpha)$, donde γ es la conjunción de algún subconjunto finito (propio o impropio) de fórmulas del conjunto Γ .

Definición 23.10: El cálculo CD^* es el conjunto de las sentencias α tales que la CD^* -secuencia de $\neg\alpha$ es cerrada.

El cálculo CD^* de lógica modal de predicados de primer orden puede presentarse también brevemente a través de los esquemas correspondientes a sus reglas de inferencia:¹³⁵

¹³⁵ Si se prescinde de los índices y de las reglas propias de los operadores de modalidad, el cálculo CD^* es equipotente con un cálculo deductivo natural tipo GENTZEN de lógica de primer orden, lo que se puede demostrar derivando todas las reglas de CD^* en CD y viceversa.

a) Reglas de eliminación del negador:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg(\beta \vee \delta)/i}{\neg\beta/i} \\
 \neg\delta/i
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\neg(\beta \wedge \delta)/i}{\neg\beta/i} \quad 136 \\
 \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \wedge \\ \neg\delta/i \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad
 \frac{\neg(\beta \rightarrow \delta)/i}{\beta/i}
 \quad
 \frac{\neg\neg\beta/i}{\beta/i}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg\forall x\beta(x)/i}{\neg\beta(a_k)/i} \\
 \vdots \\
 \neg\beta(a_n)/i
 \end{array}$$

Donde $a_k, \dots, a_n$ son todos los parámetros aparecidos en la CD^* -secuencia en CD^* -expresiones no tachadas asociadas a un índice cualquiera j tal que $j \sim i$ (o uno nuevo en su defecto).

$$\frac{\neg\forall x\beta(x)/i}{\neg\beta(a_n)/i}$$

Donde a_n es un parámetro no aparecido anteriormente en la CD^* -secuencia.

$$\frac{\neg\Box\beta/i}{\neg\beta/j}$$

Donde j es un índice no aparecido anteriormente en la CD^* -secuencia. En este caso se dice que $i \sim j$ en dicha CD^* -secuencia.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg\Diamond\beta/i}{\neg\beta/j} \\
 \vdots \\
 \neg\beta/k
 \end{array}$$

Donde $j, \dots, k$ son todos los índices que aparecen en la CD^* -secuencia asociados a cualesquiera CD^* -expresiones no canceladas tales que $i \sim j, \dots, i \sim k$.

¹³⁶ Este esquema no puede ser considerado él mismo como una regla de inferencia, sino como la abreviatura de dos reglas de inferencia diferentes:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg(\beta \wedge \delta)/i}{\neg\beta/i}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\neg(\beta \wedge \delta)/i}{\left[\begin{array}{c} \neg\beta/i \\ \vdots \\ \wedge \\ \neg\delta/i \end{array} \right]}
 \end{array}$$

b) Reglas de eliminación de los signos conectivos lógicos:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{(\delta \vee \beta)/i}{\begin{array}{c} \delta/i \\ \vdots \\ \mathcal{A} \\ \beta/i \end{array}}^{137} & \frac{(\delta \wedge \beta)/i}{\begin{array}{c} \delta/i \\ \beta/i \end{array}} & \frac{(\delta \rightarrow \beta)/i}{\begin{array}{c} \neg \delta/i \\ \vdots \\ \mathcal{A} \\ \beta/i \end{array}}^{138}
 \end{array}$$

c) Reglas de eliminación de los operadores lógicos:

$$\frac{\wedge x \beta(x)/i}{\begin{array}{c} \beta(a_k)/i \\ \vdots \\ \beta(a_n)/i \end{array}}$$

Donde $a_k, \dots, a_n$ son todos los parámetros aparecidos en la CD^* -secuencia en CD^* -expresiones no tachadas asociadas a un índice cualquiera j tal que $j \sim i$ (o uno nuevo en su defecto).

¹³⁷ Como en el caso anterior, este esquema no puede ser considerado él mismo como una regla de inferencia, sino como la abreviatura de dos reglas de inferencia diferentes:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{(\beta \vee \delta)/i}{\neg \beta/i} & & \frac{(\beta \vee \delta)/i}{\begin{array}{c} \beta/i \\ \vdots \\ \mathcal{A} \end{array}} \\
 & & \hline
 & & \delta/i
 \end{array}$$

¹³⁸ Tampoco este esquema puede ser considerado él mismo como una regla de inferencia, sino como la abreviatura de dos reglas de inferencia diferentes:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{(\beta \rightarrow \delta)/i}{\neg \beta/i} & & \frac{(\beta \rightarrow \delta)/i}{\begin{array}{c} \neg \beta/i \\ \vdots \\ \mathcal{A} \end{array}} \\
 & & \hline
 & & \delta/i
 \end{array}$$

$$\frac{Vx\beta(x)/i}{\beta(a_n)/i}$$

Donde a_n es un parámetro no aparecido anteriormente en la CD^* -secuencia.

$$\frac{\Diamond\beta/i}{\beta/j}$$

Donde j es un índice no aparecido anteriormente en la CD^* -secuencia. En este caso se dice que $i \sim_j$ en dicha CD^* -secuencia.

$$\frac{\Box\beta/i}{\beta/j}$$

$$\vdots$$

$$\beta/k$$

Donde $j, \dots, k$ son todos los índices que aparecen en la CD^* -secuencia asociados a cualesquiera CD^* -expresiones no canceladas tales que $i \sim_j, \dots, i \sim_k$.

d) Regla de sustitución de la identidad:

$$\frac{(a=b)/i}{\delta_1(b)/i}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\delta_n(b)/i}{\delta_1(a)/i}$$

$$\vdots$$

$$\delta_n(a)/i$$

Donde $\delta_1, \dots, \delta_n$ son todas las fórmulas que aparecen en la CD^* -secuencia en las cuales se da la constante individual b , aparecida después de a .

e) Reglas de introducción de $\mathcal{A}$:

$$\frac{\neg(a=a)/i}{\mathcal{A}}$$

$$\frac{\beta/i}{\neg\beta/i}$$

$$\mathcal{A}$$

§24. Corrección y completitud.

El cálculo CD^* es un cálculo normalizado, ya que toda

demostración en CD^* -y toda deducción en consecuencia, como se aprecia por las definiciones 23.8 y 23.9- está ya en forma normal de suyo; esto es, solamente hay una posible secuencia CD^* construida a partir de una fórmula α cualquiera. En realidad, las reglas de CD^* están emparentadas con las reglas de formación del árbol semántico, estando $\perp$ por el aspa que en el árbol simboliza el cierre de una secuencia. De este modo, una CD^* -secuencia puede considerarse como una construcción a partir de un árbol semántico, estableciendo una serie de CD^* -expresiones mediante la unión de las series de las diferentes subramas que lo componen. Cuando se llega a la fórmula $\perp$ se cancelan todas las fórmulas de la subrama y se coloca en la serie la primera de la siguiente subrama. Si todas las ramas están canceladas al final entonces se ha construido una demostración de la negación de la fórmula original.

Sea, por ejemplo, la CD^* -demostración $\vdash_T \Box(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \Box\alpha$:

1. $\neg[\Box(\neg\alpha\rightarrow\alpha)\rightarrow\Box\alpha]/1$
2. $\Box(\neg\alpha\rightarrow\alpha)/1$
3. $\neg\Box\alpha/1$
4. $\Diamond\neg\alpha/1$
5. $\neg\alpha/2$
6. $(\neg\alpha\rightarrow\alpha)/1$
7. $(\neg\alpha\rightarrow\alpha)/2$
8. $\neg\neg\alpha/2$
9. $\alpha/2$
10. $\mathcal{A}$
11. $\alpha/2$
12. $\mathcal{A}$

El siguiente es otro ejemplo, esta vez en lógica de predicados de primer orden. Sea la CD^* -demostración

$\vdash_T \Box\Lambda x\alpha(x)\rightarrow\Lambda x\Box\alpha(x):$

1. $\neg[\Box\Lambda x\alpha(x)\rightarrow\Lambda x\Box\alpha(x)]/1$
2. $\Box\Lambda x\alpha(x)/1$
3. $\neg\Lambda x\Box\alpha(x)/1$
4. $\forall x\Diamond\neg\alpha(x)/1$
5. $\Diamond\neg\alpha(a)/1$
6. $\neg\alpha(a)/2$
7. $\Lambda x\alpha(x)/1$
8. $\Lambda x\alpha(x)/2$
9. $\alpha(a)/2$
10. $\mathcal{A}$

En cambio, la CD^* -secuencia correspondiente a $\vdash_T [FB]$ no

es cerrada por las mismas causas que $\mathcal{A}_T \neg[\text{FB}]$ no se cerraba tampoco:

1. $\neg[\wedge x \Box \alpha(x) \rightarrow \Box \wedge x \alpha(x)] / 1$
2. $\wedge x \Box \alpha(x) / 1$
3. $\neg \Box \wedge x \alpha(x) / 1$
4. $\Diamond \forall x \neg \alpha(x) / 1$
5. $\forall x \neg \alpha(x) / 2$
6. $\neg \alpha(a) / 2$
7. $\Box \alpha(b) / 1$
8. $\alpha(b) / 2$

Todas las CD^* -expresiones de $\Sigma \neg[\text{FB}]$ han sido usadas sin que aparezca $\mathcal{A}$. Por tanto, la CD^* -secuencia anterior es una prueba contra la demostrabilidad de $[\text{FB}]$ en el sistema T.

Una de las virtudes de este cálculo CD^* es la facilidad que concede a la hora de obtener determinados resultados metateóricos como en el caso de las pruebas de corrección y de completitud.

Teorema 24.1: $\mathcal{A}_{S\alpha}$ es cerrado sii hay una CD^* -secuencia $\Sigma\alpha$ que es cerrada.

Demostración: Es evidente por la misma definición del cálculo CD^* (definición 23.10) y de CD^* -secuencia de una sentencia (definición 23.7), así como por la definición de cierre de un árbol semántico (definición 8.6).

Del teorema anterior se sigue el siguiente corolario por la definición 23.8:

Corolario: $\mathcal{A}_S \alpha$ cerrado sii $\vdash_S \neg \alpha$.

Mediante este corolario y el teorema fundamental de los árboles semánticos se obtiene fácilmente la demostración del siguiente teorema:

Teorema 24.2: $\vdash_S \alpha$ sii $\models_S \alpha$.

Demostración: Por el corolario del teorema 24.1 se tiene que $\vdash_S \alpha$ sii $\mathcal{A}_S \neg \alpha$ es cerrado. A la vez, por el corolario 1 del teorema 9.2 se sabe que $\mathcal{A}_S \neg \alpha$ es cerrado sii $\models_S \alpha$. Luego $\vdash_S \alpha$ sii $\models_S \alpha$. Q.E.D.

De este modo, mediante una prueba basada en el teorema fundamental de los árboles semánticos, mucho más económica

que las pruebas tipo HENKIN, se logra demostrar la corrección y la completitud de los diferentes sistemas normales de lógica modal estudiados.

APÉNDICE I:

OTROS PROCEDIMIENTOS SEMÁNTICOS DE DECISIÓN.

El procedimiento de los árboles semánticos desarrollado en el cuerpo de esta tesis está concebido para obtener toda clase de resultados metateóricos sobre los diferentes sistemas de lógica modal tratados. Es un procedimiento efectivo de decisión por lo que a los sistemas normales de lógica modal de proposiciones se refiere, pero, evidentemente, no es el único posible. Quiero revisar aquí brevemente otros procedimientos usados por diversos autores especialmente relevantes para la concepción del procedimiento expuesto.

En *Symbolic Logic*, LEWIS y LANGFORD utilizaron un procedimiento de decisión basado en matrices de valores proposicionales para los diferentes sistemas. En los apéndices II y III de la edición de 1959 introducen bastantes de estas matrices para demostrar que ninguno de los cinco sistemas propuestos es deductivamente equivalente a los demás. Para ello demuestran que el axioma

característico de S2 no es un teorema de S1, ni el de S3 de S2, etcétera.¹³⁹

A grandes rasgos, el procedimiento se desenvuelve de la siguiente manera. Para la demostración de que [S2.1]¹⁴⁰ es independiente de la base axiomática de S1 se necesita una matriz de cuatro valores {1,2,3,4}. Los valores designados para los teoremas de S1 son 1 y 2, de modo que basta con comprobar que todos los axiomas de S1 tienen tales valores en sus matrices, en tanto que [S2.1] tiene también otros valores no designados; y todo ello con la ayuda de las siguientes matrices básicas:

p	$\sim p$	$\Diamond p$
1	4	1
2	3	2
3	2	1
4	1	3

$p \cdot q$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

¹³⁹ La matriz para la prueba de independencia de [S3.1] (cfr. capítulo uno) respecto de S2 es una matriz de ocho valores que no se debe a los propios LEWIS y LANGFORD, sino a PARRY, quien la propuso dos años después de la primera edición de *Symbolic Logic*.

¹⁴⁰ Cfr. capítulo uno.

De éstas se obtiene la matriz para el signo $\rightarrow$:

$p \rightarrow q$	1	2	3	4
1	2	4	3	4
2	2	2	3	3
3	2	4	2	4
4	2	2	2	2

De esta forma, cuando $p=2$ y $q=4$, $[S2.1]=4$, que no es un valor designado, lo que se demuestra del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 (\Diamond(p \cdot q) \rightarrow \Diamond p) &\Rightarrow (\Diamond(2,4) \rightarrow \Diamond 2) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (\Diamond 4 \rightarrow \Diamond 2) \Rightarrow (3 \rightarrow 2) \Rightarrow 4
 \end{aligned}$$

El procedimiento de matrices de LEWIS y LANGFORD es, evidentemente, bastante más complejo que el de árboles semánticos y muy poco atractivo desde un punto de vista semántico. Más interesante sería si se pudiesen reducir las matrices a tablas de verdad. Esto es lo que hizo VON WRIGHT en su *Ensayo de lógica modal*. El procedimiento de VON WRIGHT consiste en reducir la fórmula de lógica modal de proposiciones que hay que evaluar a su forma normal disyuntiva perfecta, a partir de lo cual se construye su

tabla de verdad. Para ello, en su sistema M_1 a los principios propios de la lógica de proposiciones VON WRIGHT añade los siguientes principios modales (que yo transcribo, formalizándolos en la notación habitual en este trabajo):

Principio de M-distribución: $\vdash \Diamond(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \vdash (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$

Principio de M-extensionalidad: $\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta) \Rightarrow \vdash (\Diamond\alpha \leftrightarrow \Diamond\beta)$

Principio (restrictivo) de posibilidad: $\vdash (\Diamond\alpha \vee \Diamond\neg\alpha)$

Principio de M-tautología: $\vdash \alpha \Rightarrow \vdash \Box\alpha$

Valiéndose de estos principios, reduce toda fórmula a sus componentes mínimos en forma normal disyuntiva perfecta para realizar sobre estos una tabla de verdad. Por ejemplo,¹⁴¹ sea la fórmula $(\Diamond\alpha \wedge \Box(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \Diamond\beta$. Por la definición de los operadores $\Diamond$ y $\Box$, esta fórmula es equivalente a la fórmula $(\Diamond\alpha \wedge \neg\Diamond\neg(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \Diamond\beta$. La forma normal disyuntiva de las subfórmulas modalizadas son $(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta)$, $(\alpha \wedge \neg\beta)$ y $(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$. Los constituyentes mínimos de la forma normal disyuntiva perfecta de esta fórmula son, por tanto, $\Diamond(\alpha \wedge \neg\beta)$, $\Diamond(\alpha \wedge \beta)$ y $\Diamond(\neg\alpha \wedge \beta)$.

¹⁴¹ El ejemplo está tomada del propio VON WRIGHT. Cfr. VON WRIGHT, G.H.: *Ensayo de lógica modal*, pp.: 37-38.

$\Diamond(\alpha \wedge \neg \beta)$	$\Diamond(\alpha \wedge \beta)$	$\Diamond(\neg \alpha \wedge \beta)$	$\Diamond \alpha$	$\neg \Diamond(\alpha \wedge \neg \beta)$	$\Diamond \beta$	$(\Diamond \alpha \wedge \Box(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \Diamond \beta$
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V

El procedimiento de VON WRIGHT, con ser más directo que el de LEWIS y LANGFORD ya que evita las engorrosas matrices numéricas, puede convertirse en un procedimiento muy incómodo cuando se evalúan fórmulas del sistema M_1 con más subfórmulas atómicas constituyentes que en el ejemplo descrito o cuando se trabaja con sistemas que permiten lo que VON WRIGHT llama *modalidades de orden superior*, es decir: modalidades iteradas.

SAUL KRIPKE sigue un procedimiento similar al de los árboles semánticos. De hecho, el procedimiento de tablas semánticas de KRIPKE, basado en el de BETH para lógica de predicados de primer orden, está en la base del procedimiento expuesto en este trabajo, puesto que ambos se inspiran en principios idénticos. Cada tabla semántica está compuesta por dos secuencias de fórmulas obtenidas mediante

la aplicación de reglas similares a las del procedimiento de los árboles semánticos para lógica modal de proposiciones sobre una primera fórmula α . En la secuencia de la izquierda se colocan las fórmulas *verdaderas* que va generando la aplicación de las reglas, mientras que en la secuencia de la derecha se colocan las fórmulas *falsas*. Por cada fórmula no atómica que aparezca en una de las dos secuencias de la tabla se aplica una de las reglas dependiendo del signo principal de la fórmula. Cuando aparece una fórmula de la forma $\beta \vee \gamma$ o de la forma $\beta \rightarrow \gamma$ en la secuencia izquierda, o bien una fórmula de la forma $\beta \wedge \gamma$ en la secuencia derecha, entonces cabe extender la tabla original de dos formas diferentes, lo que origina dos tablas, cada una de ellas contemplando una de las alternativas (se tiene, por así decirlo, dos formas alternativas del mismo mundo). De igual modo, si se tiene una fórmula de la forma $\Diamond \beta$ en la secuencia de la izquierda o una fórmula de la forma $\Box \beta$ en la secuencia de la derecha se obtiene una nueva tabla *auxiliar* donde aparece la fórmula β (lo que se corresponde a un nuevo mundo posible relacionado con el primero). Si una fórmula y su contraria aparecen en la misma secuencia de una tabla o una misma fórmula aparece a izquierda y derecha en la misma tabla, ésta es cerrada y provee un contraejemplo contra la fórmula inicial. Sea por ejemplo la siguiente tabla S4 que

comienza con $\Box(\alpha\wedge\beta)$ a la izquierda y $\Box(\Box\alpha\Box\beta)$ a la derecha:¹⁴²

$\Box(\alpha\wedge\beta)$ $(\alpha\wedge\beta)$ α β	$\Box(\Box\alpha\Box\beta)$	$\alpha\wedge\beta$ α β	$\Box\alpha\Box\beta$ $\Box\alpha$	$(\alpha\wedge\beta)$ (α) (β)	α
t_1		$t_{2,1}$		t_3	
	$\longrightarrow$		$\longrightarrow$		
$\Box(\alpha\wedge\beta)$ $(\alpha\wedge\beta)$ α β	$\Box(\Box\alpha\Box\beta)$	$\alpha\wedge\beta$ α β	$\Box\alpha\Box\beta$ $\Box\beta$	$(\alpha\wedge\beta)$ (α) (β)	β
t_1		$t_{2,2}$		t_3	
	$\longrightarrow$		$\longrightarrow$		

Cada grupo de tres tablas muestra una alternativa de evaluación y en ambos aparece en una de las tablas una misma fórmula a derecha e izquierda (α en el primer caso y β en el segundo, en las dos ocasiones en la tabla t_3). La flecha indica la relación entre las tablas, que es reflexiva y transitiva en el caso de las tablas S4.

¹⁴² Corresponde, por tanto, a la tabla de la fórmula $\Box(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\Box(\Box\alpha\Box\beta)$. Cfr. KRIPKE, S.: "Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi", pp.: 74-76.

También similar en algunos aspectos relevantes al método de los árboles semánticos es el utilizado por HUGHES y CRESSWELL en *An Introduction to Modal Logic*. HUGHES y CRESSWELL aúnan el procedimiento de las tablas de verdad (en una versión simplificada a un caso relevante de las mismas) y de las tablas semánticas en su procedimiento de *cajas semánticas*. La fórmula que hay que evaluar se encierra en una caja μ_1 y se la supone falsa. Se siguen las consecuencias de esta hipótesis de modo que, cuando una subfórmula modalizada de la fórmula inicial de la forma $\Diamond\alpha$ es verdadera entonces se abre una nueva caja con la fórmula α marcada como verdadera e igualmente en caso de que la subfórmula en cuestión sea de la forma $\Box\alpha$, pero marcada como falsa en este caso. De la caja inicial sale entonces una flecha hacia la nueva caja y se las considera relacionadas. Cualquier contradicción a la que se llegue supone, evidentemente, que la hipótesis inicial era falsa. Sea por ejemplo el diagrama T de la fórmula $\Box(p \rightarrow \Diamond(q \rightarrow r)) \rightarrow \Diamond(q \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond r))$:¹⁴³

¹⁴³ Cfr. HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.J.: *Introducción a la lógica modal*, página 80.

mu ₁	$\begin{array}{cccccccccccc} \star & & & & & & & \star & & \star & & \star \\ \Box(p \rightarrow \Diamond(q \rightarrow r)) \rightarrow \Diamond(q \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond r)) & & & & & & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 0 & 00 \end{array}$										
	↓										
mu ₂	$p \rightarrow r$ <u>1 1 0</u>			$p \rightarrow \Diamond(q \rightarrow r)$ 1			$q \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond r)$ 1 0			p 1	r 0

Los cuatro procedimientos descritos son cuatro formas diferentes de abordar *el significado de las modalidades*. Ninguno es apto para la lógica modal de predicados de primer orden, excepto el procedimiento de las tablas semánticas de BETH usado por KRIPKE, que, como queda dicho, responde a los mismos criterios que el procedimiento de los árboles semánticos, con la ventaja de que este último, basado en la presentación de SMULLYAN en *First-Order Logic*, al resumir todo el proceso en un único diagrama, es más simple y elegante. Lo mismo cabe decir con respecto al procedimiento de las cajas semánticas de HUGHES y CRESWELL, con la ventaja adicional sobre ambos de que el procedimiento de los árboles semánticos permite pruebas metateóricas importantes mucho más simples que las habituales basadas en el concepto de mundo posible.

APÉNDICE II:

UN CÁLCULO DEDUCTIVO NATURAL MODAL.

El siguiente cálculo para lógicas modales está basado en F.B. FITCH a partir de MELVIN FITTING.¹⁴⁴ Como base se tienen las reglas de un cálculo deductivo tipo GENTZEN:

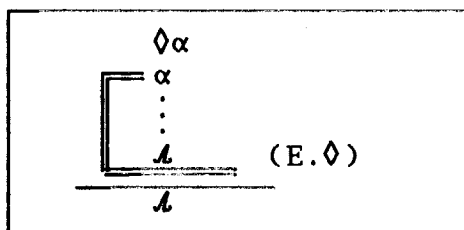
$(ABS.) \frac{\begin{array}{ l} \alpha \\ \vdots \\ \mathcal{A} \end{array}}{\neg \alpha}$	$\frac{\neg \neg \alpha}{\alpha} \quad (D.N.)$
$(PROD.) \frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$	$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad (SIMPL.1)$ $(SIMPL.2) \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$

¹⁴⁴ Cfr. FITCH, F.B.: *Symbolic Logic, an Introduction* y FITTING, M.: *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*, pp.: 153-190. Para el caso concreto de los cálculos de lógica deóntica cfr. también FITCH, F.B.: "Natural Deduction Rules for Obligation".

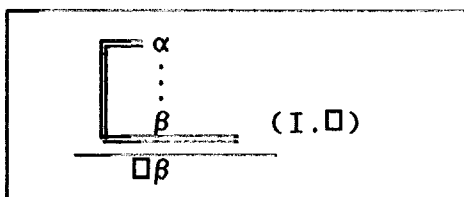
$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad (\text{AD.1})$ $(\text{AD.2}) \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}$	$\begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \left[\begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \right] \\ \hline \left[\begin{array}{c} \beta \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \right] \\ \hline \gamma \end{array} \quad (\text{CASOS})$
$\frac{\left[\begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \right]}{\alpha \rightarrow \gamma} \quad (\text{T.D.})$	$\frac{\alpha \rightarrow \gamma}{\frac{\alpha}{\gamma}} \quad (\text{M.P.})$

A estas reglas del cálculo deductivo de proposiciones hay que añadir las del cálculo modal. Siguiendo a FITTING voy a distinguir entre dos tipos diferentes de reglas:

1. Reglas de interpretación particularista de los mundos posibles (I-style rules). En este tipo de reglas, un subproceso estricto (marcado en la deducción por una doble raya para diferenciarlo de los subprocesos deductivos habituales) sólo se abre cuando aparece una fórmula del tipo $\Diamond \alpha$ y se cancela con la regla (E. $\Diamond$):



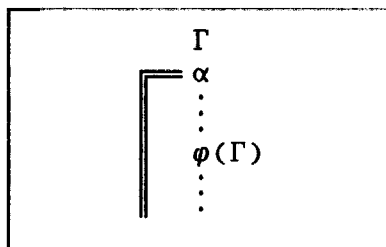
2. Reglas de interpretación genérica de los mundos posibles
(A-style rules). Un subproceso estricto puede abrirse en
 cualquier momento, cancelándose con la regla (I.□):



Es necesario no confundir las reglas (E.◇) y (I.□).
 FITTING propone una notación diferente para el subproceso si
 se van a utilizar conjuntamente, pero considero que no es
 necesario si se las entiende como reglas diferentes con sus
 procesos restringidos a determinado tipo de conclusiones.¹⁴⁵

¹⁴⁵ Cfr. FITTING, M.: *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*, página 185.

3. Regla de introducción de fórmulas en un subproceso estricto. Cuando hay abierto un subproceso estricto, el conjunto de las fórmulas $\varphi(\Gamma)$ que puede añadirse a la deducción se obtiene aplicando la siguiente regla:¹⁴⁶



El conjunto $\varphi(\Gamma)$ se define del siguiente modo para cada uno de los diferentes sistemas normales:

$$\left. \begin{array}{l} \text{K:} \\ \text{D:} \\ \text{T:} \end{array} \right\} \beta \in \varphi(\Gamma) \text{ sii } \Box \beta \in \Gamma.$$

$$\text{B: } \beta \in \varphi(\Gamma) \text{ sii } \Box \beta \in \Gamma \text{ y } \Diamond \beta \in \varphi(\Gamma) \text{ sii } \beta \in \Gamma.$$

$$\text{S4: } \Box \beta \in \varphi(\Gamma) \text{ sii } \Box \beta \in \Gamma.$$

$$\text{S5: } \Box \beta \in \varphi(\Gamma) \text{ sii } \Box \beta \in \Gamma \text{ y } \Diamond \beta \in \varphi(\Gamma) \text{ sii } \Diamond \beta \in \Gamma.$$

¹⁴⁶ Por supuesto, en el subproceso, además del conjunto de fórmulas $\varphi(\Gamma)$, aparecen también todas aquellas fórmulas que se obtengan al aplicar algunas de las reglas del cálculo deductivo modal a una o más fórmulas incluidas en el subproceso estricto abierto.

4. Otras reglas de introducción y eliminación de operadores modales:

$$\boxed{\frac{\Box\alpha}{\alpha} \quad (E.\Box)} \quad 147$$

$\frac{\alpha}{\Diamond\alpha} \quad (I.\Diamond)$	$(P.D) \quad \frac{\Box\alpha}{\Diamond\alpha}$
--	---

5. Reglas para cuantificadores.

Para un cálculo deductivo natural de lógica modal de predicados son necesarias algunas consideraciones semánticas previas relacionadas con los planteamientos expuestos en los capítulos cinco y seis acerca de las funciones de individuación y los sistemas con dominios fijos y variables.

Definición II.1: Una fórmula está en forma modal prenexa sii:

¹⁴⁷ Esta regla tiene la siguiente restricción para los sistemas deónticos (v.gr.: para el sistema D): solamente si $\Box\alpha$ ocurre en un subproceso estricto abierto.

1. No hay en ella ninguna ocurrencia de operadores de modalidad y está en forma prenexa.¹⁴⁸

2. Sí hay ocurrencias de operadores de modalidad y:

a) los cuantificadores fuera del alcance de los operadores de modalidad están todos a la izquierda de la fórmula;

b) las subfórmulas que ocurren en el ámbito de un operador modal están en forma modal prenexa.

Con esta definición, en una fórmula modal prenexa los cuantificadores permanecen bajo el alcance de los operadores de modalidad originales. Se pueden extraer los cuantificadores que ocurren bajo el alcance de operadores de modalidad del modo que se describe a continuación:

Definición II.2: Sea α una fórmula en forma modal prenexa en la que ocurren cuantificadores bajo el alcance de algún operador de modalidad. Se puede obtener una fórmula α' en forma modal prenexa marcada a partir de α colocando los

¹⁴⁸ Una fórmula α está en forma prenexa solamente en el caso de que sea de la forma $\phi(\beta)$, donde ϕ es una secuencia finita de operadores cuantificacionales y β es una fórmula en la que no ocurre ningún operador cuantificacional.

cuantificadores a la izquierda de los operadores de modalidad y marcando las variables afectadas con tantos apóstrofes cuantos operadores de modalidad la tengan bajo su alcance. Ejemplo:

$$\alpha: \Lambda x \Box \Lambda y ((Py \wedge Qxy) \rightarrow \Box \forall z Rxyz)$$

$$\alpha': \Lambda x \Lambda y \forall z \Box ((Py' \wedge Qxy') \rightarrow \Box Rxy' z'')$$

En realidad lo que se está haciendo con este método de marca de variables es determinar que las variables de una fórmula de la clase de α' pertenecen a diferentes tipos, por lo que no se las puede tratar homogéneamente desde el punto de vista de la individuación. Así, por ejemplo, en el caso de la fórmula α' tenemos que los apóstrofes informan de que para evaluar α' hay que tener en cuenta que $f(x) \in \mathcal{D}(\mu_1)$, $f(y) \in \mathcal{D}(\mu_2)$ y que $f(z) \in \mathcal{D}(\mu_3)$. En este caso se puede definir una función de unificación $\approx$ tal que su rango es un tipo de variables, designado por $()$, $()'$, $()''$, etcétera, del siguiente modo:

Definición II.3: Sean $x \in ()$ e $y \in ()'$ dos variables cualesquiera de la fórmula modal prenexa marcada β y sea $f(x) \in \mathcal{D}(\mu_1)$ y $f(y) \in \mathcal{D}(\mu_2)$; entonces se dice que $() \approx ()'$ sii $\mathcal{D}(\mu_1) \subseteq \mathcal{D}(\mu_2)$.

Las reglas para los cuantificadores en un cálculo de lógica modal de predicados van a ser las habituales de la lógica clásica, aunque se va a restringir su aplicación, y por tanto el cálculo deductivo, a aquellas fórmulas que se encuentren en forma modal prenexa marcada:

$$\frac{\alpha(a)}{\forall x \alpha(x)} \quad (\text{I.P.})$$

$$\frac{\begin{array}{c} \forall x \alpha(x) \\ \vdots \\ \alpha(a) \\ \vdots \\ \delta \end{array}}{\delta} \quad (\text{E.P.}) \quad 149$$

$$\frac{\alpha(a)}{\exists x \alpha(x)} \quad (\text{I.G.}) \quad 150$$

$$\frac{\exists x \alpha(x)}{\alpha(a)} \quad (\text{E.G.})$$

$$\begin{array}{c} (\text{Unif.}) \quad \Box \alpha(a') \\ \vdots \\ \beta(b) \\ \vdots \\ \alpha(b) \end{array} \quad 151$$

¹⁴⁹ a no ocurre ni en la fórmula δ ni en ninguna hipótesis subsidiaria no cancelada.

¹⁵⁰ a no ocurre libre en ninguna hipótesis previa ni subsidiaria que no esté cancelada.

¹⁵¹ Solamente en caso de que $(\alpha)(\alpha')$.

Ejemplo: Sea β la forma modal prenexa marcada de $[FB^*]$:

$$\beta: \forall x \wedge y (\Box \alpha(x') \rightarrow \Box \alpha(y)).$$

Puede probarse que $\vdash_S \beta$, donde S es cualquier sistema al que convenga una semántica de dominios anidados tal que si $\mu_1 \mathcal{R} \mu_2$ entonces $\mathcal{D}(\mu_1) \subseteq \mathcal{D}(\mu_2)$:

1.	$\neg \forall x \wedge y (\Box \alpha(x') \rightarrow \Box \alpha(y))$	
2.	$\wedge x \vee y \neg (\Box \alpha(x') \rightarrow \Box \alpha(y))$	De 1 por def. $\wedge$ y $\vee$
3.	$\vee y \neg (\Box \alpha(a') \rightarrow \Box \alpha(y))$	De 2 por $(E.\wedge)$
4.	$\neg (\Box \alpha(a') \rightarrow \Box \alpha(b))$	
5.	$\Box \alpha(a')$	De 4 por def. $\rightarrow$
6.	$\neg \Box \alpha(b)$	De 4 por def. $\rightarrow$
7.	$\Diamond \neg \alpha(b)$	De 6 por def. $\Box$ y $\Diamond$
8.	$\neg \alpha(b)$	
9.	$\alpha(b)$	De 5 por unif.
10.	$\perp$	De 8 y 9 por Prod.
11.	$\perp$	De 7, 8-10 por $(E.\Diamond)$
12.	$\perp$	De 3, 4-11 por $(E.\vee)$
13.	$\forall x \wedge y (\Box \alpha(x') \rightarrow \Box \alpha(y))$	De 1-12 por Abs.

Sin embargo no puede probarse lo mismo de $[FB]$ a menos que el sistema S sea simétrico, es decir: que si $\mu_1 \mathcal{R} \mu_2$ entonces $\mathcal{D}(\mu_1) = \mathcal{D}(\mu_2)$. La forma modal prenexa marcada de $[FB]$ es la siguiente:

$$\gamma: \forall x \wedge y (\Box \alpha(x) \rightarrow \Box \alpha(y')).$$

Se comprueba que no $\vdash_S \gamma$ en un sistema S con dominios anidados:

1.	$\neg \forall x \wedge y (\Box \alpha(x) \rightarrow \Box \alpha(y'))$	
2.	$\wedge x \vee y \neg (\Box \alpha(x) \rightarrow \Box \alpha(y'))$	De 1 por def. $\wedge$ y $\vee$
3.	$\forall y \neg (\Box \alpha(a) \rightarrow \Box \alpha(y'))$	De 2 por (E. $\wedge$)
4.	$\neg (\Box \alpha(a) \rightarrow \Box \alpha(b'))$	
5.	$\Box \alpha(a)$	De 4 por def. $\rightarrow$
6.	$\neg \Box \alpha(b')$	De 4 por def. $\rightarrow$
7.	$\Diamond \neg \alpha(b')$	De 6 por def. $\Box$ y $\Diamond$
8.	$\neg \alpha(b')$	
9.	$\alpha(a)$	De 5 por (E. $\Box$)

No puede cerrarse el subproceso estricto abierto a partir de la línea 7 puesto que no hay unificación de las variables x e y' a menos que se presuponga un sistema simétrico al que convenga una semántica de dominio fijo, según la definición dada de la función de unificación.

APÉNDICE III:

BIBLIOGRAFÍA.

ABADI, M. & MANNA, Z.:

"Model Theorem Proving". Lecture Notes in Computer Science, 230 (1986), pp.: 172-189.

ACERO, J.J.:

"Significado, mundo y mente". Diálogos Filosóficos, 14 (1989), pp.: 226-261.

ADDISON, J.W., HENKIN, L. & TARSKI, A.:

The Theory of Models: Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley. North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1965.

ALLWOOD, ANDERSON & DAHL:

Lógica para lingüistas. Paraninfo, Madrid, 1981.

ANDERSON, A.R.:

"Improved Decision Procedures for Lewis's Calculus S4 and Von Wright's Calculus M". Journal of

Symbolic Logic, 19 (1954), pp.: 201-214.
Corrección ibidem, 20 (1955), p.: 150.

"The Formal Analysis of Normative Systems". En
RESCHER, N. (ed.): *The Logic of Decision and
Action*.

"The Logic of Norms". Logique et Analyse, 1
(1958), pp.: 84-91.

"A Reduction of Deontic Logic to Alethic Modal
Logic". Mind, 67 (1958), pp.: 100-103.

ANDERSON, A.R. & MOORE, O.K.:

"The Formal Analysis of Normative Concepts".
American Sociological Review, 22 (1957), pp.:
9-17.

ANGELELLI, I.:

"En torno a la silogística modal aristotélica".
Teorema, IX/2 (1979).

AQVIST, L.:

"Postulate Sets and Decision Procedures for Some
Systems of Deontic Logic". Theoria, 29 (1963),
pp.: 154-175.

"Results Concerning Some Modal Systems that

Contain S2". *Journal of Symbolic Logic*, 29 (1964), pp.: 79-87.

"«Next and Ought». *Alternative Foundations for Von Wright's Tense-Logic with an application to Deontic Logic*". *Logique et Analyse*, 9 (1966), pp.: 231-251.

Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems. Bibliopolis, Nápoles, 1987.

ARISTÓTELES:

Tratados de lógica (Órganon). Gredos, Madrid, 1982-88, (2 tomos).

BECKER, O.:

"Zur Logik der Modalitäten". *Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung*, 11 (1930), pp.: 497-548.

Untersuchungen über den Modalkalkül. Kulturverlag Anton Hein, Meisenheim am Glan, 1952.

BENTHEM, J. van:

Modal Logic and Clasical Logic. Bibliopolis, Nápoles, 1985.

BERNARDO, G. di:

Logica, norme, azione. Istituto Superiore di Scienze Sociali, Trento, 1969.

BLANCHÉ, R.:

"Quantity, Modality and other Kindred Systems of Categories". *Mind*, 61 (1952), pp.: 369-375.

BOCHEŃSKI, J.:

Ancient Formal Logic. Notre Dame University Press, Indiana, 1961.

Historia de la lógica formal, Gredos, Madrid, 1966.

BOOLOS, G.S.:

The Unprovability of Consistency: An Essay in Modal logic. Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

BOWEN, K.A.:

Model Theory for Modal Logic. Kripke Models for Modal Predicate Calculus. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1979.

BRUNSCHVICQ, L.:

La modalité du jugement. Alcan, París, 1897.

BURRIEZA, A.:

"Árboles modales para KB, KE y S0.5". *Anales de Filosofía*, III (1985), pp.: 17-26.

"Corrección a árboles modales para KE. Un procedimiento de decisión". *Anales de Filosofía*, IV (1986), pp.: 23-34.

"Un procedimiento de decisión para el sistema de «and next»". *Filosofía Malacitana*, 1 (1988), pp.: 11-20.

BURRIEZA, A. & LEÓN, J.C.:

"Modal Trees: Correction to a Decision Procedure for S5 (and T). *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 28 (1987), pp.: 385-391.

CANTY, J. Th.:

"On Symbolizing Singulary S5 Functions". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, IX (1968), pp.: 340ss.

CARNAP, R.:

Der Logische Aufbau der Welt. Berlín, 1928.

"Testability and meaning". *Philosophy of Science*, 3, (1936), pp.: 419-471; 4, (1937), pp.: 1-40.

"Modalities and Quantification". *Journal of Symbolic Logic*, 11 (1946), pp.: 33-64.

Introduction to Semantics. Cambridge, Mass., 1946.

Meaning and Necessity. University of Chicago Press, Chicago, 1947. Segunda edición ampliada, 1956.

The Logical Structure of the World. California, 1967.

Fundamentación lógica de la física. Editorial Sudamericana, Buenos Aires, 1969.

Rudolf Carnap, Logical Empiricist. Materials and Perspectives. D. Reidel, Dordrecht, 1975.

CASTAÑEDA, H.N.:

"La lógica general de las normas y la ética". Universidad de San Carlos, Guatemala, 30 (1954), pp.: 129-196.

"A Theory of Morality". *Philosophy and Phenomenological Research*, 17 (1956-57), pp.: 339-352.

"Un sistema general de lógica normativa". *Dianoia*, 3 (1957), pp.: 303-333.

"On the Logic of Norms". *Methodos*, 9 (1957), pp.: 209-216.

"Obligation and Modal Logic". *Logique et Analyse*, 3 (1960), pp.: 40-48.

"Negaciones, imperativos, colores, existencia y la paradoja de Bertrand Russell". *Theoria*, 1 (1985), pp.: 13-58.

"Practical Reason. Reasons for Doing and Intentional Action". *Theoria*, 4 (1986-87), pp.: 69-96.

CONTE, A.G.:

"Un saggio filosofico sopra la logica deontica". *Rivista Internazionale di Filosofia del Diritto*, 42 (1965), pp.: 564-577.

COPELAND, B.J.:

"Tense Trees: A tree System for Kt". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24 (1983), pp.: 318-322.

CRESSWELL, M.J.:

"Some Further Semantics for Deontic Logic". *Logique et Analyse*, 10 (1967), pp.: 179-191.

"Some proofs on Relative Completeness in Modal Logic". Notre Dame Journal of Formal Logic, 9 (1968), pp.: 62ss.

"Completeness without the Barcan Formula". Notre Dame Journal of Formal Logic, 9 (1968), pp.: 75ss.

"A Canonical Model for S2". Logique et Analyse, 97 (1982), pp.: 3-7.

CUENA, J.:

Lógica informática. Alianza informática, Madrid,

CHANG, C.C. & KEISLER, H.J.:

Model Theory, North Holland, Publ. Co., Amsterdam, 1973.

CHELLAS, B.F.:

"Imperatives". Theoria, 37 (1971), pp.: 114-129.

Modal Logic. An Introduction. Cambridge University Press, 1988.

CHISHOLM, R.M.:

"The Logic of knowledge". Journal of Philosophy, 60 (1963), pp.: 773-795.

"Identity through Possible Worlds: Some

Questions". *Nous*, 1 (1967), pp.: 1-8.

DAVIDSON, B.:

"Modal Trees for Modal Predicate Logics". *Logique et Analyse*, 25 (1982), pp.: 47-56.

DAVIDSON, B., JACKSON, F.C. & PARGETER, R.:

"Modal Trees for T and S5". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 18 (1977), pp.: 602-606.

DAVIDSON, D.:

"The Logical form of action sentences". En RESCHER (ed.): *The Logic of Action and Preference*, pp.: 81-95.

"Truth and Meaning". *Synthese*, 17 (1967), pp.: 304-323.

Inquiries into Truth and Interpretation. Oxford U.P., Oxford, 1984.

DAVIS & al. (ed.):

Philosophical Logic. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1969.

DAWSON, E.:

"A Model for Deontic Logic". *Analysis*, 19 (1959),
pp.: 73-78.

DUBISLAV, W.:

"Zur Unbegründbarkeit der forderungsätze".
Theoria, 3 (1937), pp.: 330-342.

EVANS, G. & MCDOWELL, J.(ed.):

Truth and Meaning: Essays in Semantics. Oxford
U.P., Oxford, 1976.

FELDMAN, F.:

Doing the Best we can. D. Reidel Publ. Co.,
Dordrecht, Holland, 1986.

FEYS, R.:

"Expression modale du 'devoir être'". *Journal of
Symbolic Logic*, 20 (1955), Abstract, pp.: 91-92.

Modal Logics. Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1965.

FINE, K.:

"The Logics Containing S4.3". *Zeitschrift für
Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*,
17 (1971), pp.: 371-376.

"In So Many Possible Worlds". Notre Dame Journal of Formal Logic, 13 (1972), pp.: 516-520.

"For So Many Individuals". Notre Dame Journal of Formal Logic, 13 (1972), pp.: 569-572.

"Modal Frames in Modal Logic". Notre Dame Journal of Formal Logic, 16 (1975), pp.: 229-237.

"Model Theory for Modal Logic, part I: The *de re* / *de dicto* Distinction". Journal of Philosophical Logic, 7 (1978), pp.: 125-156.

FISHER, M.:

"A three-valued Calculus for Deontic Logic". Theoria, 27 (1961), pp.: 107-118.

FITCH, F.B.:

Symbolic Logic. An Introduction. The Ronald Press Co., Nueva York, 1952.

"Tree Proofs in Modal Logic". Journal of Symbolic Logic, 31 (1966), página 152.

"Natural Deduction Rules for Obligation". American Philosophical Quarterly, 3 (1966), pp.: 27-38.

FITTING, M.:

"Tableau Methods of Proof for Modal Logics". Notre Dame Journal of Formal Logic, XIII (1972), pp.: 237-247.

Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics.
D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1983.

FØLLESDAL, D.:

"Knowledge, Identity and Existence". Theoria, 33 (1967), pp.: 1-27.

"Quine on Modality". Synthese, 19 (1968), pp.: 147-157.

FREGE, G.:

Escritos lógico-semánticos. Tecnos, Madrid, 1974.

Investigaciones lógicas. Tecnos, Madrid, 1984.

GABBAY, D.M.:

Investigations in Modal and Tense Logics with Applications to Problems in Philosophy and Linguistics. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1976.

GABBAY, D.M. & GUENTHER, F.:

Handbook of Philosophical Logic. D. Reidel Publ.

Co., Dordrecht, 1983-89, (4 volúmenes).

GALTON, A.:

The Logic of Aspect. An Axiomatic Approach. The Clarendon Press, Oxford, 1984.

GALTON, A.(ed.):

Temporal Logics and Their Applications. Academic Press, Londres, 1987.

GARCÍA MÁYNEZ, E.:

Los principios de la ontología formal del derecho y su expresión simbólica. Imprenta Universitaria, México, 1953.

Ensayos filosófico-jurídicos. Universidad Veracruzana, Xalapa, 1959, pp.: 185-219.

GOBLE, L.F.:

"A System of Modality". Notre Dame Journal of Formal Logic, XII (1971), pp.: 225ss.

GÖDEL, K.:

Obras completas. Alianza Editorial, Madrid, 1981.

GOLDBLATT, R.I.:

"Metamathematics of Modal Logic, part I". Reports on Mathematical Logic, 6 (1976), pp.: 41-77.

"Metamathematics of Modal Logic, part II". Reports on Mathematical Logic, 7 (1976), pp.: 21-52.

GOTLIEB, G.:

The Logic of Choice. Allen & Unwin, Londres, 1968.

HALLDÉN, S.:

On the Logic of "Better". Library of Theoria, Upsala, 1957.

HANSON, W.H.:

"Semantics for Deontic Logic". Logique et Analyse, 8 (1965), pp.: 177-190.

HARE, R.M.:

"Imperative Sentences". Mind, 58 (1949), pp.: 21-39.

The Language of Morals. The Clarendon Press, Oxford, 1952.

HEIJENOORT, J. van (ed.):

From Frege to Gödel. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967.

HENKIN, L.:

"The Completeness of the First Order Functional Calculus". *Journal of Symbolic Logic*, 14 (1949), pp.: 159-166.

"Completeness of the Theory of Types". *Journal of Symbolic Logic*, 15 (1950), pp.: 81-91.

HIERRO SÁNCHEZ-PESCADOR, J.:

Problemas del análisis del lenguaje moral. Tecnos, Madrid, 1971.

HILPINEN, R. (ed.):

Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1971.

Scientific Rationality: Studies in the Foundations of Science and Ethics. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1980.

New Studies in Deontic Logic: Norms, Actions and the Foundations of Ethics. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1981.

HINTIKKA, J.:

"Quantifiers in Deontic Logic". *Societas Scientiarum Fennica, Comentationes Humanarum Literarum*, 23 (1957).

"Modality as Referential Multiplicity". *Eripainos Ajatus*, 20 (1957), pp.: 49-64.

"Existential Presuppositions and Existential Commitments". *Journal of Philosophy*, 56 (1959), pp.: 125-137.

Knowledge and Belief. An Introduction to the Logic of the Two Notions. Cornell University Press, Ithaca, 1962. (Hay traducción al español: *Saber y creer. Una introducción a la lógica de las dos nociones*. Tecnos, Madrid, 1979).

"Individuals, Possible Worlds and Epistemic Logic". *Nous*, 1 (1967), pp.: 33-62.

Models for Modalities. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1969.

Logic, Language-Games and Information. The Clarendon Press, Oxford, 1973. (Hay traducción al español: *Lógica, juegos de lenguaje e información*. Tecnos, Madrid, 1976).

Knowledge and the Known: Historical Perspectives

in Epistemology. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1974.

The Intentions of Intentionality and Other New Models for Modalities. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1975.

"Situations, Possible Worlds and Attitudes". *Synthese*, 54 (1983), pp.: 153ss.

"Reasoning about Knowledge in Philosophy: The Paradigm of Epistemic Logic". Borrador sin publicar, 1987.

HINTIKKA, J. (ed.):

The Philosophy of Mathematics. Oxford University Press, Oxford, 1969.

HOCUTT, M.O.:

"Is Epistemic Logic Possible?". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 13 (1972), pp.: 433-453.

HOFSTADTER, A. & MCKINSEY, J.C.C.:

"On the Logic of Imperatives". *Philosophy of Science*, 6 (1939), pp.: 446-457.

HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.:

An Introduction to Modal Logic. Methuen and Co.,

Londres, 1968. (Hay traducción al español: *Introducción a la lógica modal*. Tecnos, Madrid, 1973).

A Companion to Modal Logic. Methuen and Co., Londres, 1984.

HUMBERSTONE, I.L.:

"Interval Semantics for Tense Logic". *Journal of Philosophical Logic*, 8 (1979), pp.: 171-196.

"The Modal Logic of 'all' and 'only'". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 28 (1987), pp.: 177-188.

HUNTER, G.:

Metalógica. Paraninfo, Madrid, 1981.

JAGER, Th.:

"An Actualistic Semantics for Quantified Modal Logic". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 23 (1982), pp.: 335-349.

"*De re* and *de dicto*". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 29 (1988), pp.: 81-90.

JANSANA, R.:

Una introducción a la lógica modal. Tecnos, Madrid, 1990.

JEFFREY, R.C.:

The Logic of Decision. McGraw Hill, Nueva York, 1965.

Formal Logic: Its Scope and Limits. McGraw Hill, Nueva York, 1981. (Hay traducción al español: *Lógica formal. Su alcance y sus límites*. EUNSA, Pamplona, 1986).

JØRGENSEN, J.:

"Imperatives and Logic". *Erkenntnis*, 7 (1937-38), pp.: 288-296.

KALINOWSKI, G.:

"Théorie de propositions normatives". *Studia Logica*, I (1953), pp.: 147-182.

Introduction à la logique juridique. L.G.D.J., París, 1965.

Le problème de la vérité en morale et en droit. Vitte, Lyon, 1967.

Querelle de la science normative. L.G.D.J., París, 1969.

"Note critique sur la logique déontique d'Alf

Ross". Archiv für Recht und Sozialphilosophie, 55 (1969), pp.: 41-68.

"L'intuitionnisme en logique déontique". Rechtstheorie, I (1970), pp.: 157-182.

"Norms and Logic". The American Journal of Jurisprudence, 1972.

Etudes de logique déontique. L.G.D.J., Paris, 1972.

La logique des normes. Presses Universitaires de France, Paris, 1972. (Hay traducción española: *Lógica del discurso normativo*. Tecnos, Madrid, 1975).

"Sur les fondements des normes et des énoncés normatives: à propos des idées de Von Wright et de Castañeda". Theoria, 1 (1985), pp.: 59-86.

KANGER, S.:

"The Morning Star Paradox". Theoria, 23 (1957), pp.: 1-11.

"A Note on Quantification and Modalities". Theoria, 23 (1957), pp.: 133-134.

"On the Characterization of Modalities". Theoria, 23 (1957), pp.: 152-155.

"New Foundations for Ethical Theory". En HILPINEN, R.: *Deontic Logic*, pp.: 36-58.

KLEENE, S.C.:

Introducción a la metamatemática. Tecnos, Madrid, 1974.

KLINGER, R.:

Basic Deontic Structures of Legal Systems. University of Sydney, Sydney, 1969.

KNEALE, W.C.:

"Modality *de dicto* and *de re*". *Methodology and Philosophy of Science*, Stanford, 1962, pp.: 622-633.

KNEALE, W. & KNEALE, M.:

The Development of Logic. The Clarendon Press, Oxford, 1962. (Hay traducción al español: *El desarrollo de la lógica*. Tecnos, Madrid, 1972).

KRIPKE, S.:

"A Completeness Theorem in Modal Logic". *Journal of Symbolic Logic*, 24 (1959), pp.: 1-14.

"The Undecidability of Monadic Modal Quantification Theory". *Zeitschrift für mathematische*

Logik und Grundlagen der Mathematik, 8 (1962), pp.: 113-116.

"Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi". Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 9 (1963), pp.: 67-96.

"Semantical Analysis of Modal Logic II: Non-Normal Modal Propositional Calculi". En ADDISON, HENKIN & TARSKI (eds.): *The Theory of Models*, pp.: 206-220.

"Semantical Considerations on Modal Logic". Acta Philosophica Fennica, 16 (1963), pp.: 83-94.

"Identity and Necessity". Journal of Philosophy, 69 (1972).

"Is There a Problem about Substitutional Quantification? Journal of Philosophy, 74 (1977), pp.: 325-419.

Naming and Necessity. Basil Blackwell, Oxford, 1980.

LEDENT, A.:

"Le statut logique de propositions impératives". Theoria, 8 (1942), pp.: 262-271.

LEMMON, E.J.:

"Is There only One Correct System of Modal Logic?
Proceedings of the Aristotelian Society, XXXIII
(1959), pp.: 23-40.

"Deontic Logic and the Logic of Imperatives".
Logique et Analyse, 8 (1965), pp.: 39-71.

"Algebraic Semantics for Modal Logics I". Journal
of Symbolic Logic, 31 (1966), pp.: 46-65.

"Algebraic Semantics for Modal Logics II". Journal
of Symbolic Logic, 31 (1966), pp.: 191-218.

LEWIS, C.I.:

A survey of Symbolic Logic. Berkeley University of
California, 1918.

LEWIS, C.I. & LANGFORD, C. H.:

Symbolic Logic. Dover Publ., New York, 1932.

LEWIS, D.:

"Counterpart Theory and Quantified Modal Logic".
The Journal of Philosophy, 65 (1958), pp.:
113-126.

General Semantics. Davidson and Hartman Editors,
1972.

Counterfactuals. Blackwell, Oxford, 1986.

LINSKY, L. (ed.):

Reference and Modality. Oxford University Press, Oxford, 1971.

LOVELAND, D.W.:

Automatic Theorem Proving: A Logical Basis. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1978.

LYONS, J.:

Introduction to Theoretical Linguistics. Cambridge University Press, Cambridge, 1968. (Hay traducción al español: *Introducción en la lingüística teórica*, Teide, Barcelona, 1986).

Semántica. Teide, Barcelona, 1980.

MANZANO, M.:

Teoría de Modelos. Alianza Editorial, Madrid, 1989.

MAKINSON, D.:

"A Normal Modal Calculus between T and S4 without the Finite Model Property". *Journal of Symbolic Logic*, 34 (1969), pp.: 35-38.

"Some Embeddings Theorems of Modal Logic". Notre Dame Journal of Formal Logic, XII (1971), pp.: 252ss.

MARCUS, R.B.:

"Modalities and Intensional Languages". Synthese, 13 (1961), pp.: 303-322.

MASSEY, G.J.:

"Normal Form Generation of S5 Functions via Truth Functions". Notre Dame Journal of Formal Logic, IX (1968), pp.: 81ss.

MATES, B.:

Lógica de los estoicos. Tecnos, Madrid, 1985.

MATSUMOTO, K.:

"Decision Procedure for Modal Sentential Calculus S3". Osaka Mathematical Journal, 12 (1960), pp.: 167-175.

McCALL, S.:

Aristotle's Modal Syllogisms. North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1963.

McKINSEY, J.C.C.:

"A Reduction in the Number of Postulates for C.I. Lewis' System of Strict Implication". Bulletin of the American Mathematical Society, 40 (1934), pp.: 425-427.

"Proof that there are infinitely many modalities in Lewis' system S2". Journal of Symbolic Logic, 5 (1940), pp.: 110-112.

McLAUGHLIN, R.N.:

"Further Problems of Derived Obligation". Mind, 64 (1955), pp.: 400-402.

MEYER, J.I.Ch.:

"A Different Approach to Deontic Logic: Deontic Logic Viewed as a Variant of Dynamic Logic". Notre Dame Journal of Formal Logic, 29 (1988), pp.: 109-136.

MONTAGUE, R.:

"Syntactical Treatments of Modality with Corollaria on Reflexion Principle and Finite Axiomatizability". Acta Philosophica Fennica, 16 (1963), pp.: 153-167.

"Pragmatics and Intensional Logic". Synthese, 22 (1970-71), pp.: 68-94.

Formal Philosophy: Selected Papers of Richard Montague. Yale University Press, New Haven, Conn., 1974. (Hay traducción española parcial: *Ensayos de filosofía formal*, Alianza Universidad, Madrid, 1977.

MUNITZ, M.K. & UNGER, P.K. (eds.):

Semantics and Philosophy. New York University Press, Nueva York, 1974.

NAESS, A.:

"La validité des normes fondamentales". *Logique et Analyse*, 1 (1958), pp.: 4-13.

"Do We Know that Basic Norms Cannot Be True or False?". *Theoria*, 25 (1959), pp.: 31-53.

NILSON, N.J.:

Problem-Solving Methods in Artificial Intelligence. McGraw Hill, Nueva York, 1971.

OHLBACH, H.J.:

"A Revolution Calculus for Modal Logic". *Lecture Notes in Computer science*, Springer-Verlag, 1987.

OHNISHI, M.:

"Gentzen Decision Procedure for Lewis' Systems S2 and S3". Osaka Mathematical Journal, 13 (1961), pp.: 125-137.

"Von Wright-Anderson's Decision Procedure for Lewis' Systems S2 and S3". Osaka Mathematical Journal, 13 (1961), pp.: 139-142.

OHNISHI, M. & MATSUMOTO, K.:

"Gentzen Method in Modal Calculi I". Osaka Mathematical Journal, 9 (1957), pp.: 113-130.

"Gentzen Method in Modal Calculi II". Osaka Mathematical Journal, 11 (1959), pp.: 115-120.

OPAŁEK, K.:

"On the Logical Sematic Structures of Directives". Logique et Analyse, 13 (1970).

PARRY, W.T.:

"The Postulates for 'Strict Implication'". Mind, 43 (1934), pp.: 78-80.

"Modalities in the Survey System of Strict Implication". Journal of Symbolic Logic, 4 (1939), pp.: 131-154.

PERELMAN, Ch.:

Études de logique juridique. E. Bruylant,
Bruselas, 1966-71, (4 tomos).

PERRY, Th. D.:

Moral Reasoning and Truth: An Essay in Philosophy and Jurisprudence. Oxford University Press,
Oxford, 1976.

PHILIPPS, L.:

"Sinn und Struktur der Mormlogik". Archiv für
Rechts- und Sozialphilosophie, 52 (1966), pp.:
195-219.

PLANTINGA, A.:

The Nature of Necessity. The Clarendon Press,
Oxford, 1974.

"Actualism and Possible Worlds". Papers on Logic
and Language. University of Warwick, 1977.

PRIOR, A.N.:

"The Paradox of Derived Obligation". Mind, 63
(1954), pp.: 64-65.

Formal Logic. The Clarendon Press, Oxford, 1955.
Segunda edición de 1962.

Time and Modality. The Clarendon Press, Oxford, 1957.

Past, Present and Future. The Clarendon Press, Oxford, 1967.

QUESADA, D.:

La lógica y su filosofía. Introducción a la lógica. Editorial Barcanova, Barcelona, 1985.

QUINE, W.V.O.:

Mathematical Logic. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1951. (Hay traducción al español: *Lógica Matemática*, Revista de Occidente, Madrid, 1972).

From a Logical Point of View. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1953. (Hay traducción española: *Desde un punto de vista lógico*, Ariel, Barcelona, 1962).

"Quantifiers and Propositional Attitudes". *Journal of Philosophy*, 53 (1956), pp.: 177-187.

Word and Object. M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1960. (Hay traducción española: *Palabra y objeto*, Labor, Barcelona, 1968).

Philosophy of Logic. Prentice Hall, Nueva Jersey,

1970. (Hay traducción española: *Filosofía de la lógica*, Alianza Editorial, Madrid, 1981).

Roots of Reference. Open Court, La Salle, Ill., 1974. (Hay traducción española: *Las raíces de la referencia*, Revista de Occidente, Madrid, 1977).

Theories and Things. The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1981.

RAND, R.:

"Logik der Forderungsätze". *Revue internationale de la théorie du droit/Internazionale Zeitschrift für die Theorie der Recht*, 1 (1939), pp.: 308-322.

RAZ, J.:

Practical Reasoning. Oxford University Press, Oxford, 1979. (Hay traducción española: *Razonamiento práctico*, Fondo de Cultura Económica, México, 1986).

RESCHER, N.:

"An Axiom System for Deontic Logic". *Philosophical Studies*, 9 (1958), pp.: 24-30.

"On Modal Renderings of Intuitionistic Propositional Logic". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 7 (1966), pp.: 277-280.

The Logic of Commands. Londres, 1966.

Topics in Philosophical Logic. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1968.

La primacía de la práctica. Tecnos, Madrid, 1980.

RESCHER, N. (ed.):

The Logic of Action and Preference. Pittsburgh University Press, Pittsburgh, 1967.

The Logic of Decision and Action. Pittsburgh University Press, Pittsburgh, 1967.

RESCHER, N. & URQUHART, A.:

Temporal Logic. Springer-Verlag, Berlín, 1971.

RICHARDS, B. & al.:

Temporal Representation and Inference. Academic Press, Londres, 1989.

ROBINSON, A.:

Introduction to Modal Theory and to the Metamathematics of Algebra. North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1963.

RODRÍGUEZ MARÍN, J.:

"Lógica deóntica. Deducción natural y decisión mediante tablas semánticas". *Teorema*, III/4 (1973), pp.: 511ss.

"La reducción de la lógica deóntica a la lógica modal (I)". *Teorema*, VI/1 (1976), pp.: 99ss.

Lógica deóntica. Concepto y sistemas. Publicaciones de la Universidad de Valencia, Valencia, 1978.

ROSS, A.:

"Imperatives and Logic". *Theoria*, 7 (1941), pp.: 53-71.

Directives and Norms. Routledge and Keagan Paul, Londres, 1968. (Hay traducción española: *Lógica de las normas*, Tecnos, Madrid, 1971).

ROUTLEY, R.:

"Conventionalist and Contingency-Oriented Modal Logics". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XII (1971), pp.: 131ss.

RUSSELL, B.:

Introducción a la filosofía matemática. Paidós, Barcelona, 1988.

Principles of Mathematics. Allen & Unwin, Cambridge, 1903. (Hay traducción española: *Los principios de la matemática*, Espasa Calpe, Madrid, 1967).

Inquiries into Meaning Truth. Norton, Nueva York, 1940.

Human Knowledge. Simon and Schuster, Nueva York, 1948. (Hay traducción al español: *El conocimiento humano*, Taurus, Madrid, 1977).

Logic and Knowledge. Allen & Unwin, Londres, 1956.

RUSSELL, B. & WHITEHEAD, A.N.:

Principia Mathematica. Cambridge University Press, Cambridge, 1910-13, (3 volúmenes). Segunda edición 1925-27.

SAITO, S.:

"On the Leinizian Modal System". Notre Dame Journal of Formal Logic, IX (1968), pp.: 92ss.

SÁNCHEZ GARCÍA, D.:

"Definición de la norma verdadera". Theoria, 2 (1985), pp.: 535-544.

SÁNCHEZ-MAZAS, M.:

"Calcul automatique des normes et propositions juridiques". *Teorema*, 6 (1972), pp.: 25-56.

El cálculo de las normas. Ariel, Barcelona, 1973.

"Modelos aritméticos para la informática jurídica (introducción)". *Teorema*, VIII/1 (1978).

"Le programme 'Ars Judicandi'". *Theoria*, 3 (1986), pp.: 779-817.

"Un lenguaje aritmético como instrumento de análisis y de decisión en lógica y en derecho". *Theoria*, 5-6 (1988), pp.: 503-566.

SANMARTÍN, J.:

Una introducción constructiva a la teoría de modelos. Tecnos, Madrid, 1983.

SCHILPP, P.A. (ed.):

The Philosophy of Rudolf Carnap. Open Court, La Salle, Ill., 1963.

SCHUMM, G.F.:

"T, S4 and Henkinesque Trees". *Journal of Symbolic Logic*, 37 (1972), pp.: 446.

"The Number of Non-Normal Extensions of S4". Notre Dame Journal of Formal Logic, 29 (1988), pp.: 106-108.

SEGERBERG, K.:

"Decidability of S4.1". Theoria, 34 (1968), pp.: 7-20.

"Decidability of Four Modal Logics". Theoria, 34 (1968), pp.: 21-25.

An Essay in Classical Modal Logic. Universidad de Upsala, Upsala, 1971, (3 volúmenes).

SIMPSON, T.M. (ed.):

Semántica filosófica: problemas y discusiones. Siglo XXI, Buenos Aires, 1973.

SLAGHT, R.L.:

"Modal Tree Constructions". Notre Dame Journal of Formal Logic, XVIII (1977), pp.: 517-526.

SLEIGH, R.C.:

"On a Proposed System of Epistemic Logic". Nous, 2 (1968), pp.: 391-398.

SMORYŃSKI, C.:

Self-Reference and Modal Logic. Springer-Verlag, Nueva York, 1985.

"Quantified Modal Logic and Self-Reference". Notre Dame Journal of Formal Logic, 28 (1987), pp.: 356-370.

SMULLYAN, A.F.:

"Modality and Description". Journal of Symbolic Logic, 13 (1948), pp.: 31-37.

SMULLYAN, R.:

First-Order Logic. Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg-Nueva York, 1968. (Hay traducción al español: *Lógica de primer orden*, Tecnos, Madrid).

STEVENSON, Ch.L.:

Ética y lenguaje. Paidós, Buenos Aires, 1971.

TAPSCOTT, B.L.:

"A Simplified Natural Deduction Approach to Certain Modal Systems". Notre Dame Journal of Formal Logic, 28 (1987), pp.: 371-384.

TARSKI, A.:

Logic, Semantics, Metamathematics. The Clarendon Press, Oxford, 1956.

"Der Wahrheitsbegriff in den Formalisierten Sprachen". *Studia Philosophica*, 1 (1936), pp.: 261-405.

"The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics". *Philosophy and Phenomenological Research*, 4 (1943-44), pp.: 341-376. (Hay traducción española: *La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica*, Ediciones Nueva Visión, Buenos Aires, 1972).

THAYSE, A. & al.:

Approche logique de l'intelligence artificielle: 1. De la logique clasique à la programmation logique. Bordas, París, 1988.

Approche logique de l'intelligence artificielle: 2. De la logique modale à la logique de bases de données. Bordas, París, 1989.

THOMAS, I.:

"Solutions of Five Modal Problems of Sobociński". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 3 (1962), pp.: 199-200.

"S1⁰ and Brouwerian Axioms". Notre Dame Journal of Formal Logic, 4 (1963), pp.: 151-152.

"S1⁰ and Generalized S5 Axioms". Notre Dame Journal of Formal Logic, 4 (1963), pp.: 153-154.

"A Final Note on S1⁰ and the Brouwerian Axioms". Notre Dame Journal of Formal Logic, 4 (1963), pp.: 231-232.

"Ten Modal Models". Journal of Symbolic Logic, 29 (1964), pp.: 125-128.

"Modal Systems in the Neighbourhood of T". Notre Dame Journal of Formal Logic, 5 (1964), pp.: 59-61.

THOMASON, S.K.:

"Semantic Analysis of Tense Logics". Journal of Symbolic Logic, 37 (1972), pp.: 150-158.

"Noncompactness in Propositional Modal Logic". Journal of Symbolic Logic, 37 (1972), pp.: 716-720.

"An Incompleteness Theorem in Modal Logic". Theoria, 60 (1974), pp.: 30-34.

TOMBERLIN, J.E.:

"Identity, Intensionality and Intentionality".
Synthese, 61 (1984), pp.: 111ss.

ULLMANN, S.:

Semántica. Aguilar, Madrid, 1976.

URMSON, J.O.:

"Parenthetical Verbs". Mind, 61 (1952), pp.:
480-496.

URQUHART, A.:

"Decidability and the Finite Model Property".
Journal of Philosophical Logic, 10 (1981), pp.:
367-370.

VON WRIGHT, G.H.:

"Deontic Logic". Mind, 60 (1951), pp.: 1-15.

An Essay in Modal Logic. North Holland Publ. Co.,
Amsterdam, 1951. (Hay traducción al español:
Ensayo de lógica modal, Santiago Rueda editor,
Buenos Aires, 1970).

"A New System of Modal Logic". Proceedings of the
XIth International Congress of Philosophy,
tomo V, pp.: 59-63, Bruselas, 1953.

"A Note on Deontic Logic and Derived Obligation".
Mind, 65 (1956), pp.: 507-509.

Logical Studies. Routledge and Keagan Paul,
Londres, 1957.

The Logic of Preference. Edinburgh University
Press, Edinburgo, 1963. (Hay traducción al
español: *La lógica de la preferencia*, EUDEBA,
Buenos Aires, 1967).

Norm and Action. Routledge and Keagan Paul,
Londres, 1963. (Hay traducción española: *Norma y
Acción. Una investigación lógica*, Tecnos, Madrid,
1979).

The Varieties of Goodness. Routledge and Keagan
Paul, Londres, 1963.

"A New System of Deontic Logic". Danish Yearbook
of Philosophy, 1 (1964), pp.: 173-182.

"A Correction to a New System of deontic Logic".
Danish Yearbook of Philosophy, 2 (1965), pp.:
103-107.

"And Next". Acta Philosophica Fennica, 18 (1965),
pp.: 293-304.

"Deontic Logics". American Philosophical Quaterly,
4 (1967), pp.: 1-8.

"Deontic Logic and the theory of Conditions".
Critica, 2 (1968), pp.: 3-25.

An Essay in Deontic Logic and the General Theory of Action. Societas Philosophica Fennica, Helsinki, 1968. (Hay traducción al español: *Un ensayo de lógica deóntica y la teoría general de la acción*, UNAM, México, 1976).

"Modalidades diacrónicas y sincrónicas". *Teorema* IX/3-4 (1979).

Philosophical Papers of G.H. Von Wright: Philosophical logic. Blackwell, Oxford, 1983.

WEINGARTNER, P.:

"Modal Logics with Two Kinds of Necessity and Possibility". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, IX (1968), pp.: 97ss.

WIESENTHAL, L.:

"Visual Space from the Perspective of Possible World Semantics I". *Synthese*, 56 (1983), pp.: 199ss.

"Visual Space from the Perspective of Possible World Semantics II". *Synthese*, 64 (1985), pp.: 241ss.

WITTGENSTEIN, L.:

Tractatus Logico-Philosophicus. Alianza Editorial, Madrid, 1980.

Investigaciones filosóficas. UNAM-Crítica, Barcelona, 1988.

ZEMAN, J.J.:

"The Propositional Calculus MC and Its Modal Analogue". Notre Dame Journal of Formal Logic, IX (1968), pp.: 294ss.

Modal Logic: the Lewis' Modal Systems. Oxford University Press, Oxford, 1972.

ZIEMBA, Z.:

"Deontic Syllogistic". *Studia Logica*, 28 (1971), pp.: 139-159.