

APÉNDICE II:

UN CÁLCULO DEDUCTIVO NATURAL MODAL.

El siguiente cálculo para lógicas modales está basado en F.B. FITCH a partir de MELVIN FITTING.¹⁴⁴ Como base se tienen las reglas de un cálculo deductivo tipo GENTZEN:

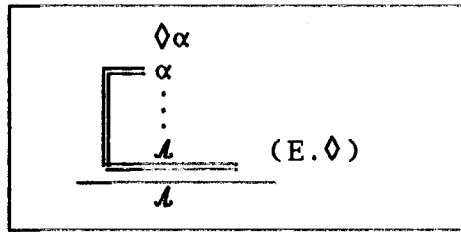
$(ABS.) \frac{\begin{array}{ l} \alpha \\ \vdots \\ \mathcal{A} \end{array}}{\neg \alpha}$	$\frac{\neg \neg \alpha}{\alpha} \quad (D.N.)$
$(PROD.) \frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$	$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad (SIMPL.1)$ $(SIMPL.2) \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$

¹⁴⁴ Cfr. FITCH, F.B.: *Symbolic Logic, an Introduction* y FITTING, M.: *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*, pp.: 153-190. Para el caso concreto de los cálculos de lógica deóntica cfr. también FITCH, F.B.: "Natural Deduction Rules for Obligation".

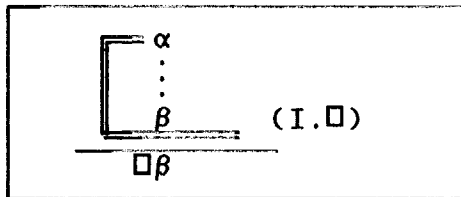
$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad (\text{AD.1})$ $(\text{AD.2}) \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}$	$\begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \left[\begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \right] \\ \hline \left[\begin{array}{c} \beta \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \right] \\ \hline \gamma \end{array} \quad (\text{CASOS})$
$\frac{\left[\begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \right]}{\alpha \rightarrow \gamma} \quad (\text{T.D.})$	$\frac{\alpha \rightarrow \gamma}{\frac{\alpha}{\gamma}} \quad (\text{M.P.})$

A estas reglas del cálculo deductivo de proposiciones hay que añadir las del cálculo modal. Siguiendo a FITTING voy a distinguir entre dos tipos diferentes de reglas:

1. Reglas de interpretación particularista de los mundos posibles (*I-style rules*). En este tipo de reglas, un subproceso estricto (marcado en la deducción por una doble raya para diferenciarlo de los subprocesos deductivos habituales) sólo se abre cuando aparece una fórmula del tipo $\Diamond \alpha$ y se cancela con la regla (E. $\Diamond$):



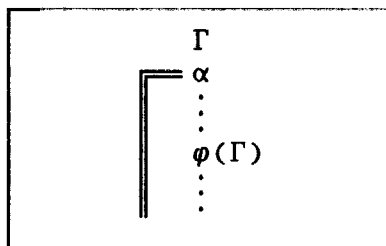
2. Reglas de interpretación genérica de los mundos posibles
(A-style rules). Un subproceso estricto puede abrirse en
 cualquier momento, cancelándose con la regla (I.□):



Es necesario no confundir las reglas (E.◇) y (I.□).
 FITTING propone una notación diferente para el subproceso si
 se van a utilizar conjuntamente, pero considero que no es
 necesario si se las entiende como reglas diferentes con sus
 procesos restringidos a determinado tipo de conclusiones.¹⁴⁵

¹⁴⁵ Cfr. FITTING, M.: *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*, página 185.

3. Regla de introducción de fórmulas en un subproceso estricto. Cuando hay abierto un subproceso estricto, el conjunto de las fórmulas $\varphi(\Gamma)$ que puede añadirse a la deducción se obtiene aplicando la siguiente regla:¹⁴⁶



El conjunto $\varphi(\Gamma)$ se define del siguiente modo para cada uno de los diferentes sistemas normales:

$$\left. \begin{array}{l} \text{K:} \\ \text{D:} \\ \text{T:} \end{array} \right\} \beta \in \varphi(\Gamma) \text{ sii } \Box \beta \in \Gamma.$$

$$\text{B: } \beta \in \varphi(\Gamma) \text{ sii } \Box \beta \in \Gamma \text{ y } \Diamond \beta \in \varphi(\Gamma) \text{ sii } \beta \in \Gamma.$$

$$\text{S4: } \Box \beta \in \varphi(\Gamma) \text{ sii } \Box \beta \in \Gamma.$$

$$\text{S5: } \Box \beta \in \varphi(\Gamma) \text{ sii } \Box \beta \in \Gamma \text{ y } \Diamond \beta \in \varphi(\Gamma) \text{ sii } \Diamond \beta \in \Gamma.$$

¹⁴⁶ Por supuesto, en el subproceso, además del conjunto de fórmulas $\varphi(\Gamma)$, aparecen también todas aquellas fórmulas que se obtengan al aplicar algunas de las reglas del cálculo deductivo modal a una o más fórmulas incluidas en el subproceso estricto abierto.

4. Otras reglas de introducción y eliminación de operadores modales:

$$\boxed{\frac{\Box\alpha}{\alpha} \quad (E.\Box)} \quad 147$$

$\frac{\alpha}{\Diamond\alpha} \quad (I.\Diamond)$	$(P.D) \quad \frac{\Box\alpha}{\Diamond\alpha}$
--	---

5. Reglas para cuantificadores.

Para un cálculo deductivo natural de lógica modal de predicados son necesarias algunas consideraciones semánticas previas relacionadas con los planteamientos expuestos en los capítulos cinco y seis acerca de las funciones de individuación y los sistemas con dominios fijos y variables.

Definición II.1: Una fórmula está en forma modal prenexa sii:

¹⁴⁷ Esta regla tiene la siguiente restricción para los sistemas deónticos (v.gr.: para el sistema D): solamente si $\Box\alpha$ ocurre en un subproceso estricto abierto.

1. No hay en ella ninguna ocurrencia de operadores de modalidad y está en forma prenexa.¹⁴⁸

2. Sí hay ocurrencias de operadores de modalidad y:

a) los cuantificadores fuera del alcance de los operadores de modalidad están todos a la izquierda de la fórmula;

b) las subfórmulas que ocurren en el ámbito de un operador modal están en forma modal prenexa.

Con esta definición, en una fórmula modal prenexa los cuantificadores permanecen bajo el alcance de los operadores de modalidad originales. Se pueden extraer los cuantificadores que ocurren bajo el alcance de operadores de modalidad del modo que se describe a continuación:

Definición II.2: Sea α una fórmula en forma modal prenexa en la que ocurren cuantificadores bajo el alcance de algún operador de modalidad. Se puede obtener una fórmula α' en forma modal prenexa marcada a partir de α colocando los

¹⁴⁸ Una fórmula α está en forma prenexa solamente en el caso de que sea de la forma $\phi(\beta)$, donde ϕ es una secuencia finita de operadores cuantificacionales y β es una fórmula en la que no ocurre ningún operador cuantificacional.

cuantificadores a la izquierda de los operadores de modalidad y marcando las variables afectadas con tantos apóstrofes cuantos operadores de modalidad la tengan bajo su alcance. Ejemplo:

$$\alpha: \Lambda x \Box \Lambda y ((Py \wedge Qxy) \rightarrow \Box \forall z Rxyz)$$

$$\alpha': \Lambda x \Lambda y \forall z \Box ((Py' \wedge Qxy') \rightarrow \Box Rxy' z'')$$

En realidad lo que se está haciendo con este método de marca de variables es determinar que las variables de una fórmula de la clase de α' pertenecen a diferentes tipos, por lo que no se las puede tratar homogéneamente desde el punto de vista de la individuación. Así, por ejemplo, en el caso de la fórmula α' tenemos que los apóstrofes informan de que para evaluar α' hay que tener en cuenta que $f(x) \in \mathcal{D}(\mu_1)$, $f(y) \in \mathcal{D}(\mu_2)$ y que $f(z) \in \mathcal{D}(\mu_3)$. En este caso se puede definir una función de unificación $\approx$ tal que su rango es un tipo de variables, designado por $()$, $()'$, $()''$, etcétera, del siguiente modo:

Definición II.3: Sean $x \in ()$ e $y \in ()'$ dos variables cualesquiera de la fórmula modal prenexa marcada β y sea $f(x) \in \mathcal{D}(\mu_1)$ y $f(y) \in \mathcal{D}(\mu_2)$; entonces se dice que $() \approx ()'$ sii $\mathcal{D}(\mu_1) \subseteq \mathcal{D}(\mu_2)$.

Las reglas para los cuantificadores en un cálculo de lógica modal de predicados van a ser las habituales de la lógica clásica, aunque se va a restringir su aplicación, y por tanto el cálculo deductivo, a aquellas fórmulas que se encuentren en forma modal prenexa marcada:

$$\frac{\alpha(a)}{\forall x \alpha(x)} \text{ (I.P.)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \forall x \alpha(x) \\ \vdots \\ \alpha(a) \\ \vdots \\ \delta \end{array}}{\delta} \text{ (E.P.)} \quad 149$$

$$\frac{\alpha(a)}{\exists x \alpha(x)} \text{ (I.G.)} \quad 150$$

$$\frac{\exists x \alpha(x)}{\alpha(a)} \text{ (E.G.)}$$

$$\begin{array}{c} \text{(Unif.)} \\ \vdots \\ \Box \alpha(a') \\ \vdots \\ \beta(b) \\ \vdots \\ \alpha(b) \end{array} \quad 151$$

¹⁴⁹ a no ocurre ni en la fórmula δ ni en ninguna hipótesis subsidiaria no cancelada.

¹⁵⁰ a no ocurre libre en ninguna hipótesis previa ni subsidiaria que no esté cancelada.

¹⁵¹ Solamente en caso de que $(\alpha)(\alpha')$.

Ejemplo: Sea β la forma modal prenexa marcada de $[FB^*]$:

$$\beta: \forall x \wedge y (\Box \alpha(x') \rightarrow \Box \alpha(y)).$$

Puede probarse que $\vdash_S \beta$, donde S es cualquier sistema al que convenga una semántica de dominios anidados tal que si $\mu_1 \mathcal{R} \mu_2$ entonces $\mathcal{D}(\mu_1) \subseteq \mathcal{D}(\mu_2)$:

1.	$\neg \forall x \wedge y (\Box \alpha(x') \rightarrow \Box \alpha(y))$	
2.	$\wedge x \vee y \neg (\Box \alpha(x') \rightarrow \Box \alpha(y))$	De 1 por def. $\wedge$ y $\vee$
3.	$\vee y \neg (\Box \alpha(a') \rightarrow \Box \alpha(y))$	De 2 por $(E.\wedge)$
4.	$\neg (\Box \alpha(a') \rightarrow \Box \alpha(b))$	
5.	$\Box \alpha(a')$	De 4 por def. $\rightarrow$
6.	$\neg \Box \alpha(b)$	De 4 por def. $\rightarrow$
7.	$\Diamond \neg \alpha(b)$	De 6 por def. $\Box$ y $\Diamond$
8.	$\neg \alpha(b)$	
9.	$\alpha(b)$	De 5 por unif.
10.	$\perp$	De 8 y 9 por Prod.
11.	$\perp$	De 7, 8-10 por $(E.\Diamond)$
12.	$\perp$	De 3, 4-11 por $(E.\vee)$
13.	$\forall x \wedge y (\Box \alpha(x') \rightarrow \Box \alpha(y))$	De 1-12 por Abs.

Sin embargo no puede probarse lo mismo de $[FB]$ a menos que el sistema S sea simétrico, es decir: que si $\mu_1 \mathcal{R} \mu_2$ entonces $\mathcal{D}(\mu_1) = \mathcal{D}(\mu_2)$. La forma modal prenexa marcada de $[FB]$ es la siguiente:

$$\gamma: \forall x \wedge y (\Box \alpha(x) \rightarrow \Box \alpha(y')).$$

Se comprueba que no $\vdash_S \gamma$ en un sistema S con dominios anidados:

1.	$\neg \forall x \wedge y (\Box \alpha(x) \rightarrow \Box \alpha(y'))$	
2.	$\wedge x \forall y \neg (\Box \alpha(x) \rightarrow \Box \alpha(y'))$	De 1 por def. $\wedge$ y $\forall$
3.	$\forall y \neg (\Box \alpha(a) \rightarrow \Box \alpha(y'))$	De 2 por (E. $\wedge$)
4.	$\neg (\Box \alpha(a) \rightarrow \Box \alpha(b'))$	
5.	$\Box \alpha(a)$	De 4 por def. $\rightarrow$
6.	$\neg \Box \alpha(b')$	De 4 por def. $\rightarrow$
7.	$\Diamond \neg \alpha(b')$	De 6 por def. $\Box$ y $\Diamond$
8.	$\neg \alpha(b')$	
9.	$\alpha(a)$	De 5 por (E. $\Box$)

No puede cerrarse el subproceso estricto abierto a partir de la línea 7 puesto que no hay unificación de las variables x e y' a menos que se presuponga un sistema simétrico al que convenga una semántica de dominio fijo, según la definición dada de la función de unificación.