

APÉNDICE I:

OTROS PROCEDIMIENTOS SEMÁNTICOS DE DECISIÓN.

El procedimiento de los árboles semánticos desarrollado en el cuerpo de esta tesis está concebido para obtener toda clase de resultados metateóricos sobre los diferentes sistemas de lógica modal tratados. Es un procedimiento efectivo de decisión por lo que a los sistemas normales de lógica modal de proposiciones se refiere, pero, evidentemente, no es el único posible. Quiero revisar aquí brevemente otros procedimientos usados por diversos autores especialmente relevantes para la concepción del procedimiento expuesto.

En *Symbolic Logic*, LEWIS y LANGFORD utilizaron un procedimiento de decisión basado en matrices de valores proposicionales para los diferentes sistemas. En los apéndices II y III de la edición de 1959 introducen bastantes de estas matrices para demostrar que ninguno de los cinco sistemas propuestos es deductivamente equivalente a los demás. Para ello demuestran que el axioma

característico de S2 no es un teorema de S1, ni el de S3 de S2, etcétera.¹³⁹

A grandes rasgos, el procedimiento se desenvuelve de la siguiente manera. Para la demostración de que [S2.1]¹⁴⁰ es independiente de la base axiomática de S1 se necesita una matriz de cuatro valores {1,2,3,4}. Los valores designados para los teoremas de S1 son 1 y 2, de modo que basta con comprobar que todos los axiomas de S1 tienen tales valores en sus matrices, en tanto que [S2.1] tiene también otros valores no designados; y todo ello con la ayuda de las siguientes matrices básicas:

p	$\sim p$	$\Diamond p$
1	4	1
2	3	2
3	2	1
4	1	3

$p \cdot q$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

¹³⁹ La matriz para la prueba de independencia de [S3.1] (cfr. capítulo uno) respecto de S2 es una matriz de ocho valores que no se debe a los propios LEWIS y LANGFORD, sino a PARRY, quien la propuso dos años después de la primera edición de *Symbolic Logic*.

¹⁴⁰ Cfr. capítulo uno.

De éstas se obtiene la matriz para el signo $\rightarrow$:

$p \rightarrow q$	1	2	3	4
1	2	4	3	4
2	2	2	3	3
3	2	4	2	4
4	2	2	2	2

De esta forma, cuando $p=2$ y $q=4$, $[S2.1]=4$, que no es un valor designado, lo que se demuestra del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 (\Diamond(p \cdot q) \rightarrow \Diamond p) &\Rightarrow (\Diamond(2,4) \rightarrow \Diamond 2) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (\Diamond 4 \rightarrow \Diamond 2) \Rightarrow (3 \rightarrow 2) \Rightarrow 4
 \end{aligned}$$

El procedimiento de matrices de LEWIS y LANGFORD es, evidentemente, bastante más complejo que el de árboles semánticos y muy poco atractivo desde un punto de vista semántico. Más interesante sería si se pudiesen reducir las matrices a tablas de verdad. Esto es lo que hizo VON WRIGHT en su *Ensayo de lógica modal*. El procedimiento de VON WRIGHT consiste en reducir la fórmula de lógica modal de proposiciones que hay que evaluar a su forma normal disyuntiva perfecta, a partir de lo cual se construye su

tabla de verdad. Para ello, en su sistema M_1 a los principios propios de la lógica de proposiciones VON WRIGHT añade los siguientes principios modales (que yo transcribo, formalizándolos en la notación habitual en este trabajo):

Principio de M-distribución: $\vdash \Diamond(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \vdash (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$

Principio de M-extensionalidad: $\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta) \Rightarrow \vdash (\Diamond\alpha \leftrightarrow \Diamond\beta)$

Principio (restrictivo) de posibilidad: $\vdash (\Diamond\alpha \vee \Diamond\neg\alpha)$

Principio de M-tautología: $\vdash \alpha \Rightarrow \vdash \Box\alpha$

Valiéndose de estos principios, reduce toda fórmula a sus componentes mínimos en forma normal disyuntiva perfecta para realizar sobre estos una tabla de verdad. Por ejemplo,¹⁴¹ sea la fórmula $(\Diamond\alpha \wedge \Box(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \Diamond\beta$. Por la definición de los operadores $\Diamond$ y $\Box$, esta fórmula es equivalente a la fórmula $(\Diamond\alpha \wedge \neg\Diamond\neg(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \Diamond\beta$. La forma normal disyuntiva de las subfórmulas modalizadas son $(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta)$, $(\alpha \wedge \neg\beta)$ y $(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$. Los constituyentes mínimos de la forma normal disyuntiva perfecta de esta fórmula son, por tanto, $\Diamond(\alpha \wedge \neg\beta)$, $\Diamond(\alpha \wedge \beta)$ y $\Diamond(\neg\alpha \wedge \beta)$.

¹⁴¹ El ejemplo está tomada del propio VON WRIGHT. Cfr. VON WRIGHT, G.H.: *Ensayo de lógica modal*, pp.: 37-38.

$\Diamond(\alpha \wedge \neg \beta)$	$\Diamond(\alpha \wedge \beta)$	$\Diamond(\neg \alpha \wedge \beta)$	$\Diamond \alpha$	$\neg \Diamond(\alpha \wedge \neg \beta)$	$\Diamond \beta$	$(\Diamond \alpha \wedge \Box(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \Diamond \beta$
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V

El procedimiento de VON WRIGHT, con ser más directo que el de LEWIS y LANGFORD ya que evita las engorrosas matrices numéricas, puede convertirse en un procedimiento muy incómodo cuando se evalúan fórmulas del sistema M_1 con más subfórmulas atómicas constituyentes que en el ejemplo descrito o cuando se trabaja con sistemas que permiten lo que VON WRIGHT llama *modalidades de orden superior*, es decir: modalidades iteradas.

SAUL KRIPKE sigue un procedimiento similar al de los árboles semánticos. De hecho, el procedimiento de tablas semánticas de KRIPKE, basado en el de BETH para lógica de predicados de primer orden, está en la base del procedimiento expuesto en este trabajo, puesto que ambos se inspiran en principios idénticos. Cada tabla semántica está compuesta por dos secuencias de fórmulas obtenidas mediante

la aplicación de reglas similares a las del procedimiento de los árboles semánticos para lógica modal de proposiciones sobre una primera fórmula α . En la secuencia de la izquierda se colocan las fórmulas *verdaderas* que va generando la aplicación de las reglas, mientras que en la secuencia de la derecha se colocan las fórmulas *falsas*. Por cada fórmula no atómica que aparezca en una de las dos secuencias de la tabla se aplica una de las reglas dependiendo del signo principal de la fórmula. Cuando aparece una fórmula de la forma $\beta \vee \gamma$ o de la forma $\beta \rightarrow \gamma$ en la secuencia izquierda, o bien una fórmula de la forma $\beta \wedge \gamma$ en la secuencia derecha, entonces cabe extender la tabla original de dos formas diferentes, lo que origina dos tablas, cada una de ellas contemplando una de las alternativas (se tiene, por así decirlo, dos formas alternativas del mismo mundo). De igual modo, si se tiene una fórmula de la forma $\Diamond \beta$ en la secuencia de la izquierda o una fórmula de la forma $\Box \beta$ en la secuencia de la derecha se obtiene una nueva tabla *auxiliar* donde aparece la fórmula β (lo que se corresponde a un nuevo mundo posible relacionado con el primero). Si una fórmula y su contraria aparecen en la misma secuencia de una tabla o una misma fórmula aparece a izquierda y derecha en la misma tabla, ésta es cerrada y provee un contraejemplo contra la fórmula inicial. Sea por ejemplo la siguiente tabla S4 que

comienza con $\Box(\alpha\wedge\beta)$ a la izquierda y $\Box(\Box\alpha\Box\beta)$ a la derecha:¹⁴²

$\Box(\alpha\wedge\beta)$ $(\alpha\wedge\beta)$ α β	$\Box(\Box\alpha\Box\beta)$	$\alpha\wedge\beta$ α β	$\Box\alpha\Box\beta$ $\Box\alpha$	$(\alpha\wedge\beta)$ (α) (β)	α
t_1	$\longrightarrow$	$t_{2,1}$	$\longrightarrow$	t_3	
$\Box(\alpha\wedge\beta)$ $(\alpha\wedge\beta)$ α β	$\Box(\Box\alpha\Box\beta)$	$\alpha\wedge\beta$ α β	$\Box\alpha\Box\beta$ $\Box\beta$	$(\alpha\wedge\beta)$ (α) (β)	β
t_1	$\longrightarrow$	$t_{2,2}$	$\longrightarrow$	t_3	

Cada grupo de tres tablas muestra una alternativa de evaluación y en ambos aparece en una de las tablas una misma fórmula a derecha e izquierda (α en el primer caso y β en el segundo, en las dos ocasiones en la tabla t_3). La flecha indica la relación entre las tablas, que es reflexiva y transitiva en el caso de las tablas S4.

¹⁴² Corresponde, por tanto, a la tabla de la fórmula $\Box(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\Box(\Box\alpha\Box\beta)$. Cfr. KRIPKE, S.: "Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi", pp.: 74-76.

También similar en algunos aspectos relevantes al método de los árboles semánticos es el utilizado por HUGHES y CRESSWELL en *An Introduction to Modal Logic*. HUGHES y CRESSWELL aúnan el procedimiento de las tablas de verdad (en una versión simplificada a un caso relevante de las mismas) y de las tablas semánticas en su procedimiento de *cajas semánticas*. La fórmula que hay que evaluar se encierra en una caja μ_1 y se la supone falsa. Se siguen las consecuencias de esta hipótesis de modo que, cuando una subfórmula modalizada de la fórmula inicial de la forma $\Diamond\alpha$ es verdadera entonces se abre una nueva caja con la fórmula α marcada como verdadera e igualmente en caso de que la subfórmula en cuestión sea de la forma $\Box\alpha$, pero marcada como falsa en este caso. De la caja inicial sale entonces una flecha hacia la nueva caja y se las considera relacionadas. Cualquier contradicción a la que se llegue supone, evidentemente, que la hipótesis inicial era falsa. Sea por ejemplo el diagrama T de la fórmula $\Box(p \rightarrow \Diamond(q \rightarrow r)) \rightarrow \Diamond(q \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond r))$:¹⁴³

¹⁴³ Cfr. HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.J.: *Introducción a la lógica modal*, página 80.

mu₁

$$\begin{array}{cccccccccccc} \star & \Box & (p \rightarrow \Diamond & (q \rightarrow r)) & \rightarrow & \Diamond & (q \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond r)) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

↓

mu₂

$p \rightarrow r$	$p \rightarrow \Diamond(q \rightarrow r)$	$q \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond r)$	p	r
<u>1 1 0</u>	1	1 0	1	0

Los cuatro procedimientos descritos son cuatro formas diferentes de abordar *el significado de las modalidades*. Ninguno es apto para la lógica modal de predicados de primer orden, excepto el procedimiento de las tablas semánticas de BETH usado por KRIPKE, que, como queda dicho, responde a los mismos criterios que el procedimiento de los árboles semánticos, con la ventaja de que este último, basado en la presentación de SMULLYAN en *First-Order Logic*, al resumir todo el proceso en un único diagrama, es más simple y elegante. Lo mismo cabe decir con respecto al procedimiento de las cajas semánticas de HUGHES y CRESWELL, con la ventaja adicional sobre ambos de que el procedimiento de los árboles semánticos permite pruebas metateóricas importantes mucho más simples que las habituales basadas en el concepto de mundo posible.