

CAPÍTULO OCHO:

CORRECCIÓN Y COMPLETITUD.

§23. El cálculo CD^* .

En el presente párrafo va a ser definido un cálculo deductivo que llamaré cálculo CD^* .¹³² Este cálculo tiene la ventaja sobre los denominados cálculos deductivos naturales de que no sólo es útil para obtener resultados en los diferentes sistemas normales de lógica modal sino también para obtener resultados acerca de dichos sistemas. Esto es, se va a utilizar el cálculo CD^* en la obtención de determinados resultados metateóricos sobre los sistemas normales de lógica modal.¹³³

¹³² El presente cálculo CD^* para lógica modal está basado en el cálculo homónimo para lógica de predicados eneádicos desarrollado por E. DÍAZ ESTÉVEZ, aún inédito.

¹³³ En cualquier caso, en el apéndice II se presenta también un cálculo deductivo natural para lógica modal.

Definición 23.1: Una CD^* -expresión es toda expresión que verifica lo siguiente:

1. $\mathcal{A}$ es una CD^* -expresión.
2. Si α es una sentencia e i es un índice cualquiera entonces α/i es una CD^* -expresión.
3. Si α/i es una CD^* -expresión entonces:
 - a) $\neg \alpha/i$ (llamada hipótesis) es una CD^* -expresión;
 - b) $\vdash \alpha/i$, $\mid \alpha/i$ y $\lfloor \alpha/i$ (llamadas expresiones canceladas) son CD^* -expresiones;
 - c) $\neg \alpha \neg$ (llamada expresión tachada) es una CD^* -expresión.
4. Nada más es una CD^* -expresión.

Definición 23.2: Una CD^* -secuencia Σ es una secuencia de CD^* -expresiones.

Definición 23.3: Una CD^* -expresión α/i o bien dos CD^* -expresiones consecutivas α/i y β/j que ocurren en una dada CD^* -secuencia Σ de CD^* -expresiones provienen en Σ de una dada CD^* -expresión $\gamma/h \in \Sigma$ anterior (o de un par de CD^* -expresiones $\vartheta/h, \zeta/h \in \Sigma$ anteriores) sii se verifica que:

- a) α/i es $\mathcal{A}$ y ya γ/h es $\neg(a=a)/i$ o $\neg \neg(a=a)/i$ ya ϑ/h y ζ/h son δ/i y $\neg \delta/i$ o $\neg \delta/i$ y $\neg \neg \delta/i$, respectivamente.

- b) α/i es δ/i y γ/h es $\neg\delta/i$ o $\neg\neg\delta/i$;
- c) α/i y β/j son respectivamente δ/i y η/i y γ/h es $(\delta\wedge\eta)/i$ o $\neg(\delta\wedge\eta)/i$;
- d) α/i y β/j son respectivamente $\neg\delta/i$ y $\neg\eta/i$ y γ/h es $\neg(\delta\vee\eta)/i$ o $\neg\neg(\delta\vee\eta)/i$;
- e) α/i y β/j son respectivamente δ/i y $\neg\eta/i$ y γ/h es $\neg(\delta\rightarrow\eta)/i$ o $\neg\neg(\delta\rightarrow\eta)/i$;
- f) α/i es $\neg\delta/i$ y γ/h es $(\delta\vee\eta)/i$ o $\neg(\delta\vee\eta)/i$;
- g) α/i es $\neg\neg\delta/i$ y γ/h es $\neg(\delta\wedge\eta)/i$ o $\neg\neg(\delta\wedge\eta)/i$ o $(\delta\rightarrow\eta)/i$ o $\neg(\delta\rightarrow\eta)/i$;
- h) α/i es δ/i , donde i es el menor índice que no ocurre en ninguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i , y γ/h es $\Diamond\delta/h$ o $\neg\Diamond\delta/h$;
- i) α/i es $\neg\delta/i$, donde i es el menor índice que no ocurre en ninguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i , y γ/h es $\neg\Box\delta/h$ o $\neg\neg\Box\delta/h$;
- j) α/i es δ/i , donde i es un índice que ocurre en alguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i , y γ/h es $\Box\delta/h$ o $\neg\Box\delta/h$;
- k) α/i es $\neg\delta/i$, donde i es un índice que ocurre en alguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i , y γ/h es $\neg\Diamond\delta/h$ o $\neg\neg\Diamond\delta/h$;
- l) α/i es $\delta(a)/i$, donde a es el primer parámetro que no ocurre en ninguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ

anterior a α/i , y γ/h es $\forall x\delta(x)/i$ o $\neg\forall x\delta(x)/i$;

m) α/i es $\neg\delta(a)/i$, donde a es el primer parámetro que no ocurre en ninguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i , y γ/h es $\neg\Lambda x\delta(x)/i$ o $\neg\neg\Lambda x\delta(x)/i$;

n) α/i es $\delta(a)/i$, donde a es un parámetro que ocurre en alguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i (o el primer parámetro si con anterioridad a α/i no ocurre ningún parámetro en Σ), y γ/h es $\Lambda x\delta(x)/i$ o $\neg\Lambda x\delta(x)/i$;

ñ) α/i es $\neg\delta(a)/i$, donde a es un parámetro que ocurre en alguna CD^* -expresión de la CD^* -secuencia Σ anterior a α/i (o el primer parámetro si con anterioridad a α/i no ocurre ningún parámetro en Σ), y γ/h es $\neg\forall x\delta(x)/i$ o $\neg\neg\forall x\delta(x)/i$.

Definición 23.4: Si Σ es una CD^* -secuencia cualquiera, Γ es una CD^* -secuencia de CD^* -expresiones consecutivas $\langle \vdash \beta/i, \vdash \gamma_1/j, \dots, \vdash \gamma_n/k, \underline{\mathcal{A}} \rangle$ tal que $\Gamma \subset \Sigma$ y α/h es una CD^* -expresión, se dice que α/h proviene de la secuencia Γ en Σ si α/h ocurre en Σ inmediatamente después de la última expresión de Γ y $\neg\beta/i$ proviene en Σ de $(\beta \vee \alpha)/i$ o β/i es $\neg\delta/i$ y $\neg\beta/i$ proviene de $(\delta \rightarrow \alpha)/i$ o de $\neg(\delta \wedge \gamma)/i$, siendo α en este caso la fórmula $\neg\gamma$.

Definición 23.5: Una CD^* -expresión $\alpha/i \in \Sigma$ está usada sii con posterioridad a ella ocurren en Σ todas las CD^* -expresiones que provienen de α/i en Σ .

Definición 23.6: Una CD^* -secuencia $\Gamma \subset \Sigma$ de CD^* -expresiones consecutivas canceladas tales que la primera es una hipótesis y la última es la fórmula $\mathcal{A}$ está usada en Σ sii la CD^* -expresión γ/i que proviene de Γ ocurre en Σ inmediatamente después de la última de las CD^* -expresiones de Γ .

Definición 23.7: Una CD^* -secuencia de una sentencia α (abreviadamente $\Sigma\alpha$) es cualquiera de las más pequeñas secuencias de CD^* -expresiones que verifican:

1. La primera CD^* -expresión de $\Sigma\alpha$ es $\alpha/1$.
2. a) Si en $\Sigma\alpha$ ocurre un par de CD^* -expresiones del tipo β/i y $\neg\beta/i$ o bien una CD^* -expresión de la forma $\neg(a=a)/i$ no previamente canceladas ni tachadas entonces $\mathcal{A}$ ocurre en $\Sigma\alpha$ inmediatamente después.
- b) Si $\mathcal{A}$ ocurre en $\Sigma\alpha$ y anteriormente a ella no ocurre ninguna hipótesis no previamente cancelada entonces $\mathcal{A}$ es la última CD^* -expresión de $\Sigma\alpha$ y sólo en ese caso se dice que $\Sigma\alpha$ es cerrada.
- c) Si $\mathcal{A}$ ocurre en $\Sigma\alpha$ posteriormente a una hipótesis

no previamente cancelada, todas las CD^* -expresiones de la subsecuencia que comienza con la hipótesis no cancelada anterior a $\mathcal{A}$ y termina con $\mathcal{A}$ están canceladas, ambas inclusive.

d) Si $(a=b)/i$ ¹³⁴ ocurre no previamente cancelada ni tachada en $\Sigma\alpha$, siendo b y a parámetros diferentes de modo que b aparece en $\Sigma\alpha$ con posterioridad al parámetro a , entonces:

i) todas las CD^* -expresiones $\beta(b)/i \in \Sigma\alpha$ no previamente canceladas ni tachadas anteriores a $(a=b)/i$ están tachadas;

ii) por cada CD^* -expresión de la forma $\beta(b)/i \in \Sigma\alpha$ que esté tachada ocurre después de $(a=b)/i$ la CD^* -expresión $\beta(a)/i$.

e) Si $\Sigma\alpha$ no está cerrada entonces toda CD^* -expresión de $\Sigma\alpha$ que no está cancelada o tachada está usada y toda secuencia de CD^* -expresiones consecutivas canceladas en $\Sigma\alpha$ está usada.

Definición 23.8: Una CD^* -demostración de α en el sistema S $\left(\frac{\vdash \alpha}{S} \right)$ es la CD^* -secuencia $\Sigma \vdash \alpha$ que es cerrada.

¹³⁴ O bien $(b=a)/i$.

Definición 23.9: Una CD^* -deducción de α en el sistema modal S a partir del conjunto de fórmulas Γ ($\Gamma \vdash_S \alpha$) es una demostración CD^* en el sistema S de $\neg(\gamma \wedge \neg\alpha)$, donde γ es la conjunción de algún subconjunto finito (propio o impropio) de fórmulas del conjunto Γ .

Definición 23.10: El cálculo CD^* es el conjunto de las sentencias α tales que la CD^* -secuencia de $\neg\alpha$ es cerrada.

El cálculo CD^* de lógica modal de predicados de primer orden puede presentarse también brevemente a través de los esquemas correspondientes a sus reglas de inferencia:¹³⁵

¹³⁵ Si se prescinde de los índices y de las reglas propias de los operadores de modalidad, el cálculo CD^* es equipotente con un cálculo deductivo natural tipo GENTZEN de lógica de primer orden, lo que se puede demostrar derivando todas las reglas de CD^* en CD y viceversa.

a) Reglas de eliminación del negador:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg(\beta \vee \delta)/i}{\neg\beta/i} \\
 \neg\delta/i
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\neg(\beta \wedge \delta)/i}{\neg\beta/i} \\
 \vdots \\
 \wedge \\
 \neg\delta/i
 \end{array}
 \quad
 \frac{\neg(\beta \rightarrow \delta)/i}{\beta/i}
 \quad
 \frac{\neg\neg\beta/i}{\beta/i}$$

$$\frac{\neg\forall x\beta(x)/i}{\neg\beta(a_k)/i} \\
 \vdots \\
 \neg\beta(a_n)/i$$

Donde $a_k, \dots, a_n$ son todos los parámetros aparecidos en la CD^* -secuencia en CD^* -expresiones no tachadas asociadas a un índice cualquiera j tal que $j \sim i$ (o uno nuevo en su defecto).

$$\frac{\neg\forall x\beta(x)/i}{\neg\beta(a_n)/i}$$

Donde a_n es un parámetro no aparecido anteriormente en la CD^* -secuencia.

$$\frac{\neg\Box\beta/i}{\neg\beta/j}$$

Donde j es un índice no aparecido anteriormente en la CD^* -secuencia. En este caso se dice que $i \sim j$ en dicha CD^* -secuencia.

$$\frac{\neg\Diamond\beta/i}{\neg\beta/j} \\
 \vdots \\
 \neg\beta/k$$

Donde $j, \dots, k$ son todos los índices que aparecen en la CD^* -secuencia asociados a cualesquiera CD^* -expresiones no canceladas tales que $i \sim j, \dots, i \sim k$.

¹³⁶ Este esquema no puede ser considerado él mismo como una regla de inferencia, sino como la abreviatura de dos reglas de inferencia diferentes:

$$\frac{\neg(\beta \wedge \delta)/i}{\neg\beta/i}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \neg(\beta \wedge \delta)/i \\
 \neg\beta/i \\
 \vdots \\
 \wedge \\
 \neg\delta/i
 \end{array}$$

b) Reglas de eliminación de los signos conectivos lógicos:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{(\delta \vee \beta)/i}{\begin{array}{c} \delta/i \\ \vdots \\ \mathcal{A} \\ \beta/i \end{array}}^{137} & \frac{(\delta \wedge \beta)/i}{\begin{array}{c} \delta/i \\ \beta/i \end{array}} & \frac{(\delta \rightarrow \beta)/i}{\begin{array}{c} \neg \delta/i \\ \vdots \\ \mathcal{A} \\ \beta/i \end{array}}^{138}
 \end{array}$$

c) Reglas de eliminación de los operadores lógicos:

$$\frac{\wedge x \beta(x)/i}{\begin{array}{c} \beta(a_k)/i \\ \vdots \\ \beta(a_n)/i \end{array}}$$

Donde $a_k, \dots, a_n$ son todos los parámetros aparecidos en la CD^* -secuencia en CD^* -expresiones no tachadas asociadas a un índice cualquiera j tal que $j \sim i$ (o uno nuevo en su defecto).

¹³⁷ Como en el caso anterior, este esquema no puede ser considerado él mismo como una regla de inferencia, sino como la abreviatura de dos reglas de inferencia diferentes:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{(\beta \vee \delta)/i}{\neg \beta/i} & & \frac{(\beta \vee \delta)/i}{\begin{array}{c} \beta/i \\ \vdots \\ \mathcal{A} \end{array}} \\
 & & \hline
 & & \delta/i
 \end{array}$$

¹³⁸ Tampoco este esquema puede ser considerado él mismo como una regla de inferencia, sino como la abreviatura de dos reglas de inferencia diferentes:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{(\beta \rightarrow \delta)/i}{\neg \beta/i} & & \frac{(\beta \rightarrow \delta)/i}{\begin{array}{c} \neg \beta/i \\ \vdots \\ \mathcal{A} \end{array}} \\
 & & \hline
 & & \delta/i
 \end{array}$$

$$\frac{V_x \beta(x)/i}{\beta(a_n)/i}$$

Donde a_n es un parámetro no aparecido anteriormente en la CD^* -secuencia.

$$\frac{\Diamond \beta/i}{\beta/j}$$

Donde j es un índice no aparecido anteriormente en la CD^* -secuencia. En este caso se dice que $i \sim_j$ en dicha CD^* -secuencia.

$$\frac{\Box \beta/i}{\beta/j}$$

$$\vdots$$

$$\beta/k$$

Donde $j, \dots, k$ son todos los índices que aparecen en la CD^* -secuencia asociados a cualesquiera CD^* -expresiones no canceladas tales que $i \sim_j, \dots, i \sim_k$.

d) Regla de sustitución de la identidad:

$$\frac{(a=b)/i}{\delta_1(b)/i}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\delta_n(b)/i}{\delta_1(a)/i}$$

$$\vdots$$

$$\delta_n(a)/i$$

Donde $\delta_1, \dots, \delta_n$ son todas las fórmulas que aparecen en la CD^* -secuencia en las cuales se da la constante individual b , aparecida después de a .

e) Reglas de introducción de $\mathcal{A}$:

$$\frac{\neg(a=a)/i}{\mathcal{A}}$$

$$\frac{\beta/i}{\neg \beta/i}$$

$$\mathcal{A}$$

§24. Corrección y completitud.

El cálculo CD^* es un cálculo normalizado, ya que toda

demostración en CD^* -y toda deducción en consecuencia, como se aprecia por las definiciones 23.8 y 23.9- está ya en forma normal de suyo; esto es, solamente hay una posible secuencia CD^* construida a partir de una fórmula α cualquiera. En realidad, las reglas de CD^* están emparentadas con las reglas de formación del árbol semántico, estando $\perp$ por el aspa que en el árbol simboliza el cierre de una secuencia. De este modo, una CD^* -secuencia puede considerarse como una construcción a partir de un árbol semántico, estableciendo una serie de CD^* -expresiones mediante la unión de las series de las diferentes subramas que lo componen. Cuando se llega a la fórmula $\perp$ se cancelan todas las fórmulas de la subrama y se coloca en la serie la primera de la siguiente subrama. Si todas las ramas están canceladas al final entonces se ha construido una demostración de la negación de la fórmula original.

Sea, por ejemplo, la CD^* -demostración $\vdash_T \Box(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \Box\alpha$:

1. $\neg[\Box(\neg\alpha\rightarrow\alpha)\rightarrow\Box\alpha]/1$
2. $\Box(\neg\alpha\rightarrow\alpha)/1$
3. $\neg\Box\alpha/1$
4. $\Diamond\neg\alpha/1$
5. $\neg\alpha/2$
6. $(\neg\alpha\rightarrow\alpha)/1$
7. $(\neg\alpha\rightarrow\alpha)/2$
8. $\neg\neg\alpha/2$
9. $\alpha/2$
10. $\mathcal{A}$
11. $\alpha/2$
12. $\mathcal{A}$

El siguiente es otro ejemplo, esta vez en lógica de predicados de primer orden. Sea la CD^* -demostración

$\vdash_T \Box\Lambda x\alpha(x)\rightarrow\Lambda x\Box\alpha(x):$

1. $\neg[\Box\Lambda x\alpha(x)\rightarrow\Lambda x\Box\alpha(x)]/1$
2. $\Box\Lambda x\alpha(x)/1$
3. $\neg\Lambda x\Box\alpha(x)/1$
4. $\forall x\Diamond\neg\alpha(x)/1$
5. $\Diamond\neg\alpha(a)/1$
6. $\neg\alpha(a)/2$
7. $\Lambda x\alpha(x)/1$
8. $\Lambda x\alpha(x)/2$
9. $\alpha(a)/2$
10. $\mathcal{A}$

En cambio, la CD^* -secuencia correspondiente a $\vdash_T [FB]$ no

es cerrada por las mismas causas que $\mathcal{A}_T \neg[\text{FB}]$ no se cerraba tampoco:

1. $\neg[\wedge x \Box \alpha(x) \rightarrow \Box \wedge x \alpha(x)] / 1$
2. $\wedge x \Box \alpha(x) / 1$
3. $\neg \Box \wedge x \alpha(x) / 1$
4. $\Diamond \forall x \neg \alpha(x) / 1$
5. $\forall x \neg \alpha(x) / 2$
6. $\neg \alpha(a) / 2$
7. $\Box \alpha(b) / 1$
8. $\alpha(b) / 2$

Todas las CD^* -expresiones de $\Sigma \neg[\text{FB}]$ han sido usadas sin que aparezca $\mathcal{A}$. Por tanto, la CD^* -secuencia anterior es una prueba contra la demostrabilidad de $[\text{FB}]$ en el sistema T.

Una de las virtudes de este cálculo CD^* es la facilidad que concede a la hora de obtener determinados resultados metateóricos como en el caso de las pruebas de corrección y de completitud.

Teorema 24.1: $\mathcal{A}_{S\alpha}$ es cerrado sii hay una CD^* -secuencia $\Sigma\alpha$ que es cerrada.

Demostración: Es evidente por la misma definición del cálculo CD^* (definición 23.10) y de CD^* -secuencia de una sentencia (definición 23.7), así como por la definición de cierre de un árbol semántico (definición 8.6).

Del teorema anterior se sigue el siguiente corolario por la definición 23.8:

Corolario: $\mathcal{A}_S \alpha$ cerrado sii $\vdash_S \neg \alpha$.

Mediante este corolario y el teorema fundamental de los árboles semánticos se obtiene fácilmente la demostración del siguiente teorema:

Teorema 24.2: $\vdash_S \alpha$ sii $\models_S \alpha$.

Demostración: Por el corolario del teorema 24.1 se tiene que $\vdash_S \alpha$ sii $\mathcal{A}_S \neg \alpha$ es cerrado. A la vez, por el corolario 1 del teorema 9.2 se sabe que $\mathcal{A}_S \neg \alpha$ es cerrado sii $\models_S \alpha$. Luego $\vdash_S \alpha$ sii $\models_S \alpha$. Q.E.D.

De este modo, mediante una prueba basada en el teorema fundamental de los árboles semánticos, mucho más económica

que las pruebas tipo HENKIN, se logra demostrar la corrección y la completitud de los diferentes sistemas normales de lógica modal estudiados.