

CAPÍTULO SEIS:

ÁRBOLES SEMÁNTICOS PARA LÓGICA MODAL CUANTIFICACIONAL.

§16. Árboles semánticos para lógica modal con cuantificadores.

Una vez desarrollado el método de las funciones de individuación y resueltos los problemas que plantea la cuantificación en contextos modales ya es posible ampliar las reglas de construcción del árbol expuestas en el capítulo anterior de forma que el método entonces descrito pueda ser empleado en un lenguaje con cuantificadores e identidad. El método no podrá ser un procedimiento efectivo de decisión, pero aporta un semialgoritmo que permite obtener modelos y conclusiones de validez para la mayoría de las fórmulas de la lógica modal con cuantificadores.

Para un lenguaje de este tipo que mantenga los presupuestos existenciales de la cuantificación, las reglas de construcción del árbol correspondientes a las condiciones (C.V) y (C.Λ) son las siguientes:

(R.V): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\forall x \beta(x)/i$ entonces se añade a $\mathcal{S}$ la expresión $\beta(a_k)/i$, donde a_k es un parámetro nuevo aún no aparecido en la secuencia, y se marca con el signo $\langle a_k \rangle$.

(R.Λ): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\Lambda x \beta(x)/i$ entonces se añaden a la secuencia $\mathcal{S}$ las expresiones $\beta(a_1)/i$, $\beta(a_2)/i, \dots \beta(a_n)/i$, estando $a_1, a_2, \dots, a_n$ por todos los parámetros aparecidos en la secuencia, o la expresión $\beta(a_1)/i$ si no hubiera aparecido ninguno, y se marca con el signo $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

En (R.V) el requisito de que el parámetro a_k sea nuevo garantiza el cumplimiento de la cláusula de la indicación rígida en el sentido de que no permite que en μ_i haya ninguna variable individual que no tenga referente en $\mathcal{D}(\mu_i)$.

(R.Λ), sin embargo, no cumple con esta cláusula ya que podría darse el caso de que uno de los términos a_m , con $m \leq n$, no tuviese referente ni en $\mathcal{D}(\mu_i)$ ni en ningún otro dominio $\mathcal{D}(\mu_j)$, siendo $\mu_i \mathcal{R} \mu_j$. Se trata de una regla poco general, tan

sólo válida en el caso de que haya un único dominio $\mathcal{D}(\mu_i)$ o de que para cualesquiera μ_i y μ_j , $\mathcal{D}(\mu_i) = \mathcal{D}(\mu_j)$. Sin embargo, es posible modificarla a fin de que sirva también para los casos en que no se dé esta homogeneidad de dominios:

(R. $\wedge^*$): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{J} \prec \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\wedge x \beta(x)/i$ entonces se añaden a la secuencia $\mathcal{J}$ las expresiones $\beta(a_k)/i, \dots, \beta(a_n)/i$, donde $a_k, \dots, a_n$ son todos los parámetros aparecidos en la secuencia a partir de cualquier expresión $\forall y \delta(y)/j$ tal que $j \sim_S i$ (o la expresión $\beta(a_m)/i$, donde a_m es un parámetro nuevo en $\mathcal{J}$, si no hubiera aparecido ninguno tal), y se marca con el signo $\langle a_k, \dots, a_n \rangle$.

A estas reglas hay que añadir algunas otras, análogamente a lo hecho para la lógica modal de proposiciones. Estas serán las correspondientes a las condiciones (C.=), (C. $\neg \wedge$) y (C. $\neg \vee$):

(R.=): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{J} \prec \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $(a_n = a_k)/i$ entonces se sustituyen en $\mathcal{J}$ todas las apariciones del parámetro de mayor subíndice de la

igualdad en fórmulas asociadas a cualquier índice j tal que $i \sim j$ por el parámetro de menor subíndice y se marca con el signo $\Leftrightarrow$.⁹⁷

(R. $\neg\wedge$): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\neg \wedge x \beta(x)/i$ entonces se añade a $\mathcal{J}$ la expresión $\vee x \neg \beta(x)/i$ y se marca con el signo $\neg$.

(R. $\neg\vee$): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\neg \vee x \beta(x)/i$ entonces se añade a $\mathcal{J}$ la expresión $\wedge x \neg \beta(x)/i$ y se marca con el signo $\neg$.

Junto con estas reglas habría que modificar la definición 8.6 de cierre de una secuencia:

Definición 16.1: Se dice que una secuencia $\mathcal{J}_n$ es cerrada sii aparecen en ella o bien dos expresiones de la forma β/i y $\neg \beta/i$, donde la fórmula β es atómica, o bien una expresión del tipo $\neg(a=a)$, donde a es un parámetro

⁹⁷ Normalmente no se utilizarán parámetros con subíndices en la construcción del árbol, sino las letras minúsculas a , b , c , etcétera, por lo que el criterio de sustitución puede ser alfabético, por ejemplo.

cualquiera de la secuencia.

Con esto queda descrito en líneas generales el método de los árboles para su aplicación a los sistemas normales de lógica modal de predicados de primer orden.

§17. El teorema fundamental de los árboles semánticos para lógica modal de predicados.

A los sistemas de lógica modal de predicados de primer orden correspondientes a los sistemas K, T, B, S4 y S5 los llamaré, respectivamente, K^* , T^* , B^* , $S4^*$ y $S5^*$. Un sistema S y su correspondiente sistema S^* se diferencian exclusivamente por lo que se refiere a la base axiomática en que se fundamentan, de forma que S^* añade a los axiomas de S los propios de la lógica de predicados de primer orden.

Definición 17.1: Un S-modelo es de dominio fijo sii para todo $\mu, \lambda \in \Omega$, si $\mu R \lambda$ entonces $\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{D}(\lambda)$. Un S-modelo es de dominio variable sii no es de dominio fijo.

Según la definición anterior, en los sistemas modelos de dominio fijo se da la igualdad entre las *poblaciones* de

los diferentes mundos posibles alternativos a otro cualquiera y la de este último, lo que garantiza el reconocimiento de cada individuo en cada mundo posible. Se ha visto, en cambio, que el fallo del principio (GE) en los lenguajes intensionales está emparentado con la dificultad de establecer criterios de homogeneidad entre las poblaciones de los diferentes mundos posibles, lo que significa que no siempre es factible trabajar con sistemas modelos de dominio fijo.

Una diferencia interesante entre S-modelos de dominio variable y S-modelos de dominio fijo la establece la S-validez de la *Fórmula Barcan*:

$$[FB] \quad \wedge x \Box \alpha(x) \rightarrow \Box \wedge x \alpha(x).$$

[FB] es un teorema solamente en las llamadas *lógicas simétricas*, esto es: en B^* y en $S5^*$. En los demás sistemas mencionados antes, [FB] no es un teorema, a menos que se la añada como axioma. Al respecto, puede demostrarse el siguiente teorema:

Teorema 17.1: $\models_S [FB]$ para todo S-modelo de dominio fijo.

Demostración: Supóngase un S-modelo cualquiera de dominio fijo y supóngase que para todo conjunto modelo $\mu \in \Omega$, no $\mu \models \bigwedge x \Box \alpha(x) \rightarrow \Box \bigwedge x \alpha(x)$; entonces $\mu \models \neg [\bigwedge x \Box \alpha(x) \rightarrow \Box \bigwedge x \alpha(x)]$ y de aquí que $\mu \models \bigwedge x \Box \alpha(x)$ y $\mu \models \neg \Box \bigwedge x \alpha(x)$; por lo tanto $\mu \models \Box \alpha(a)$ para todo $a \in \mathcal{D}(\mu)$ y también $\mu \models \neg \bigvee x \neg \alpha(x)$; entonces $\lambda \models \alpha(a)$ y $\lambda \models \bigvee x \neg \alpha(x)$, de donde $\lambda \models \neg \alpha(a)$ para algún $a \in \mathcal{D}(\lambda)$; esto es, $\alpha(a) \in \lambda$ y $\neg \alpha(a) \in \lambda$, contra (C. $\neg$). Luego, para todo $\mu \in \Omega$, $\mu \models \bigwedge x \Box \alpha(x) \rightarrow \Box \bigwedge x \alpha(x)$ y por tanto $\bigwedge x \Box \alpha(x) \rightarrow \Box \bigwedge x \alpha(x) \in \mu$.

Añadida a aquellos sistemas en los que no es un teorema, [FB] provoca la conversión de sus respectivos S-modelos en S-modelos de dominio fijo. Se pueden considerar, por tanto, los S-modelos de dominio fijo como un caso especial de los S-modelos de dominio variable. Estos últimos pueden ser de dos tipos diferentes.

En primer lugar están los S-modelos de dominio variable en los que se cumple el siguiente requisito de inclusión o requisito de dominios anidados:

$$\forall \mu, \lambda \in \Omega, \mu \mathcal{R} \lambda \rightarrow \mathcal{D}(\mu) \subseteq \mathcal{D}(\lambda).$$

Con este requisito se obtienen S-modelos de dominios variables anidados del tipo de los que usan HUGHES &

CRESSWELL.⁹⁸ Son S-modelos en los que la fórmula

$$[FB^*] \quad \Box \wedge x \alpha(x) \rightarrow \wedge x \Box \alpha(x)$$

es S-válida, pero no lo es [FB], excepto en el caso límite en el que $\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{D}(\lambda)$, caso que se produce, por ejemplo, cuando la relación de alternatividad cumple la cláusula de simetría.

Teorema 17.2: *No para todo S-modelo de dominios variables anidados es el caso que $\models_S [FB]$.*

Demostración: El siguiente S-modelo de dominios variables anidados es un contraejemplo de [FB]:

$$\Omega = \{\mu, \lambda \mid \mu R \lambda\}$$

$$\mathcal{D}(\mu) = \{a\}$$

$$\mathcal{D}(\lambda) = \{a, b\}$$

	$\alpha(a)$	$\alpha(b)$	$\wedge x \alpha(x)$	$\Box \alpha(a)$	$\wedge x \Box \alpha(x)$	$\Box \wedge x \alpha(x)$
μ	1	-	-	1	1	0
λ	1	0	0	-	-	-

⁹⁸ HUGHES, G.E & CRESSWELL, M.J.: *Introducción a la lógica modal*, pp.: 147ss.

En segundo lugar se tienen aquellos S-modelos en los que no se da el requisito de inclusión, de modo que puede ser que, para cualesquiera dos mundos posibles con diferentes poblaciones μ y λ tales que $\mu R \lambda$, se dé el caso de que $a \in \mathcal{D}(\mu)$ y $a \notin \mathcal{D}(\lambda)$. En un caso tal no se trata de que las extensiones predicativas cambien de un mundo a otro respecto del individuo a , sino de que en λ la extensión predicativa de un predicado cualquiera P con respecto a la constante individual a es el conjunto vacío, por lo que no puede darse que $\lambda \models Pa$. El problema aquí es decidir si el enunciado Pa tiene algún valor de verdad a pesar de que no existe el individuo a en el mundo posible actual. KRIPKE⁹⁹ ha propuesto una semántica con estas características en la que el enunciado Pa sí tendría un valor de verdad en λ independientemente de que $a \in \mathcal{D}(\lambda)$ o $a \notin \mathcal{D}(\lambda)$. La semántica de KRIPKE da lugar a sistemas de lógica modal *libre*, donde tan sólo son teoremas aquellos enunciados que están cerrados con respecto a la cuantificación universal.¹⁰⁰ En la semántica de KRIPKE [FB] no es ni siquiera $S5^*$ -válida, por lo que no se

⁹⁹ KRIPKE, S.: "Semantical Considerations on Modal Logic", *Acta Philosophica Fennica*, 16 (1963), pp.: 83-94.

¹⁰⁰ Cfr. al respecto HUGHES & CRESSWELL: *Introducción a la lógica modal*, pp.: 153-156.

la puede considerar aquí como modelo para el sistema $S5^*$, donde se ha dicho que sí es un teorema [FB].¹⁰¹

Basta considerar, por tanto, S-modelos de dominios variables anidados para los sistemas normales de lógica modal de predicados de primer orden. En este sentido, y con objeto de incluir el requisito de dominios variables anidados en la semántica, es conveniente redefinir la noción de S-modelo que se dio en §6:

Definición 17.2: Un S^* -modelo es una quintupla ordenada $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ, f \rangle$, donde Ω , $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ y $\succ$ son como en la definición 6.4 y $f \in \Phi$ es una función tal que para cualesquiera dos conjuntos modelos $\mu_i, \mu_j \in \Omega$, si $\mu_i \mathcal{R} \mu_j$ entonces $f(x, \mathcal{D}(\mu_i)) \in \mathcal{D}(\mu_j)$, para una variable cualquiera x .

Definición 17.3: Una fórmula α es S^* -satisfactible sii hay un S^* -modelo y un $\mu \in \Omega$ tal que $\alpha \in \mu$. Una fórmula α es S^* -válida sii para todo S^* -modelo y todo $\mu \in \Omega$, $\alpha \in \mu$.

A partir de estas nuevas definiciones de los

¹⁰¹ Ibidem.

principales conceptos de la semántica se hace necesaria la reformulación de los teoremas del capítulo cuatro y la ampliación de sus demostraciones del siguiente modo.

Teorema 17.3: Si α es S^* -satisfactible entonces hay al menos una secuencia $\mathcal{I}_n \models_S \alpha$ tal que si, para un índice cualquiera i y una fórmula cualquiera β , $\beta/i \in \mathcal{I}_n$ depende de α/i entonces β es también S^* -satisfactible.

Demostración: Como la demostración del teorema 9.1, pero revisando los siguientes casos adicionales:

- (R. $\wedge^*$) sobre una expresión de la forma $\wedge x \delta(x)/i$. Luego se obtiene la secuencia $\langle \delta(a_k)/i, \dots, \delta(a_n)/i \rangle$, donde $\langle a_k, \dots, a_n \rangle$ son todos los parámetros aparecidos en la secuencia $\mathcal{I}$ en cualesquiera fórmulas asociadas a cualquier índice j tal que $j \sim_{S^*} i$. Por tanto, hay al menos unos $\mu_i, \mu_j \in \Omega$ tales que $\mu_j \mathcal{R} \mu_i$ y para todo parámetro a_m si $a_m \in \mathcal{D}(\mu_j)$ entonces $a_m \in \mathcal{D}(\mu_i)$ y $\delta(a_k) \in \mu_i, \dots, \delta(a_n) \in \mu_i$ y por las definiciones 6.2 y 17.3, $\delta(a_k), \dots, \delta(a_n)$ son S^* -satisfactibles.
- (R.V) sobre una expresión de la forma $\vee x \delta(x)/i$. Luego se obtiene la expresión $\delta(a_n)/i$, donde a_n es un parámetro nuevo. Por hipótesis de la inducción hay un μ_i tal que $\vee x \delta(x) \in \mu_i$ y $\delta(a_n) \in \mu_i$ y por las definiciones

6.2 y 17.3, $\delta(a_n)$ es S^* -satisfactible.

Lema 17.1: Para toda fórmula α y toda secuencia $\mathcal{F}_n$ no cerrada de $\mathcal{A}_S\alpha$, hay un S^* -modelo que S^* -satisface simultáneamente a todas las fórmulas de $\mathcal{F}_n$.

Demostración: Como el lema 9.1, pero añadiendo los siguientes casos:

1. g) Sea $\beta: \neg \Lambda x \delta(x)$. Por hipótesis, $\neg \Lambda x \delta(x)/i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Por la definición 9.8(1g), $\forall x \neg \delta(x)/i \in \mathcal{F}_n$. Por hipótesis de la inducción $\forall x \neg \delta(x)$ es S^* -satisfactible, por lo que hay un $\mu_i \in \Omega$ tal que $\forall x \neg \delta(x) \in \mu_i$ y, para algún $a_n \in \mathcal{D}(\mu_i)$, $\neg \delta(a_n) \in \mu_i$. Si β no fuera S^* -satisfactible entonces, por la definiciones 6.2 y 17.3, para cualquier conjunto modelo $\mu_i \in \Omega$ no $\mu_i \succ \neg \Lambda x \delta(x)$, de donde $\mu_i \succ \neg \neg \Lambda x \delta(x)$; entonces $\mu_i \succ \Lambda x \delta(x)$ y de aquí que $\mu_i \succ \delta(a_n)$ para todo $a_n \in \mathcal{D}(\mu_i)$; y por tanto $\delta(a_n) \in \mu_i$, violándose la condición (C. $\neg$).

h) Sea $\beta: \neg \forall x \delta(x)$. Como en el caso anterior.

7. Sea $\beta: \Lambda x \delta(x)$. Por hipótesis, $\Lambda x \delta(x)/i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Luego por la definición 9.8(7), $\delta(a_n)/i \in \mathcal{F}_n, \dots, \delta(a_m)/i \in \mathcal{F}_n$, donde $a_n, \dots, a_m$ son los parámetros que aparecen en las fórmulas asociadas a todo índice j tal que $j \sim_{S^*} i$. Por hipótesis de la inducción, por tanto, hay al

menos unos $\mu_i, \mu_j \in \Omega$ tales que $\mu_j \mathcal{R} \mu_i$ y para todo parámetro a_k si $a_k \in \mathcal{D}(\mu_j)$ entonces $a_k \in \mathcal{D}(\mu_i)$ y $\delta(a_n) \in \mu_i, \dots, \delta(a_m) \in \mu_i$. Si β no fuera S^* -satisfactible entonces por la definiciones 6.2 y 17.3 es que, para cualquier $\mu_i \in \Omega$, no $\mu_i \succ \bigwedge x \delta(x)$; luego $\mu_i \succ \neg \bigwedge x \delta(x)$, es decir, $\mu_i \succ \bigvee x \neg \delta(x)$; de aquí se sigue que $\mu_i \succ \neg \delta(a_n)$ para algún $a_n \in \mathcal{D}(\mu_i)$; de donde $\neg \delta(a_n) \in \mu_i$, contrariamente a lo derivado de hipótesis de la inducción.

8. Sea $\beta: \bigvee x \delta(x)$. Por hipótesis $\bigvee x \delta(x) / i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Por la definición 9.8(8) $\delta(a_k) / i \in \mathcal{F}_n$. Por la hipótesis de la inducción $\delta(a_k)$ es S^* -satisfactible, por lo que ha de haber un $\mu_i \in \Omega$ tal que $\delta(a_k) \in \mu_i$. Si β no fuera S^* -satisfactible entonces, para cualquier $\mu_i \in \Omega$, no $\mu_i \succ \bigvee x \delta(x)$; por tanto $\mu_i \succ \neg \bigvee x \delta(x)$; luego $\mu_i \succ \bigwedge x \neg \delta(x)$, de donde se sigue que $\mu_i \succ \neg \delta(a_k)$ para todo $a_k \in \mathcal{D}(\mu_i)$, y por tanto $\neg \delta(a_k) \in \mu_i$, contraviniendo (C. $\neg$)

Lema 17.2: Dada una fórmula S^* -satisfactible cualquiera α , hay al menos una secuencia $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$ tal que se puede mostrar un S^* -modelo que hace a todas las fórmulas de $\mathcal{I}_n$ simultáneamente S^* -satisfactibles.

Demostración: Como la del lema 9.2 pero apelando al

teorema 17.3.

Teorema 17.4: $\mathcal{A}_{S^*}\alpha$ es cerrado sii α no es S^* -satisfactible.

Demostración: Este teorema se demuestra como el teorema 9.2, pero apelando a los lemas 17.1 y 17.2

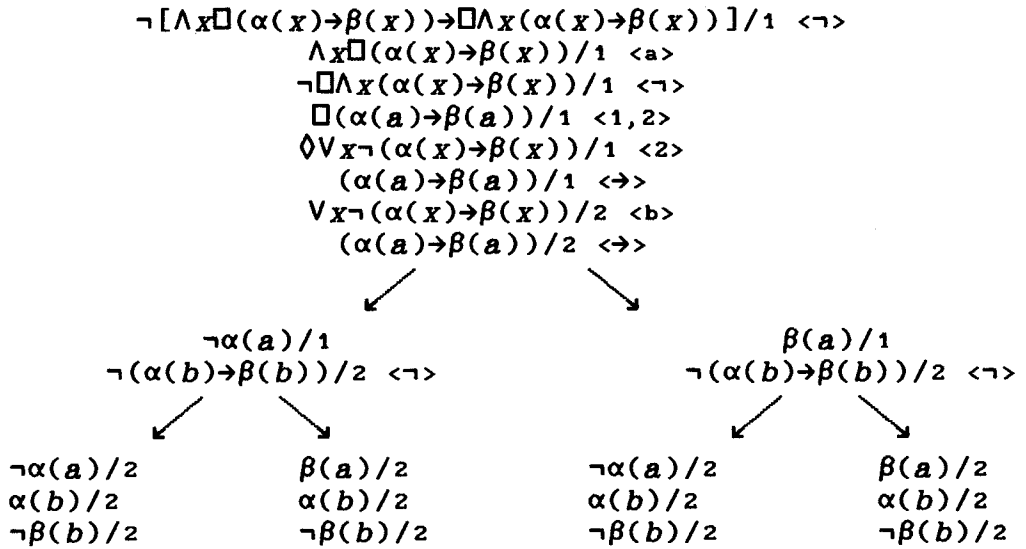
Corolario 1: α es S^* -válida ($\models_{S^*} \alpha$) sii $\mathcal{A}_{S^*}\neg\alpha$ es cerrado.

Corolario 2: α es consecuencia lógica de un conjunto no vacío de fórmulas Γ en el sistema S^* ($\Gamma \models_{S^*} \alpha$) sii hay una fórmula γ que es la fórmula que se consigue al conjuntar mediante el signo $\wedge$ todas las fórmulas de un subconjunto $\Gamma' \subset \Gamma$ tal que $\mathcal{A}_{S^*}\neg(\gamma \rightarrow \alpha)$ es cerrado.

§18. Algunos resultados.

Con todo este aparato se hace posible aplicar el procedimiento a los sistemas de lógica modal de predicados de primer orden correspondientes a los sistemas K^* , T^* , B^* , $S4^*$ y $S5^*$. Valga como ejemplo el árbol de la siguiente fórmula, que es una versión de la negación de la Fórmula

Barcan:



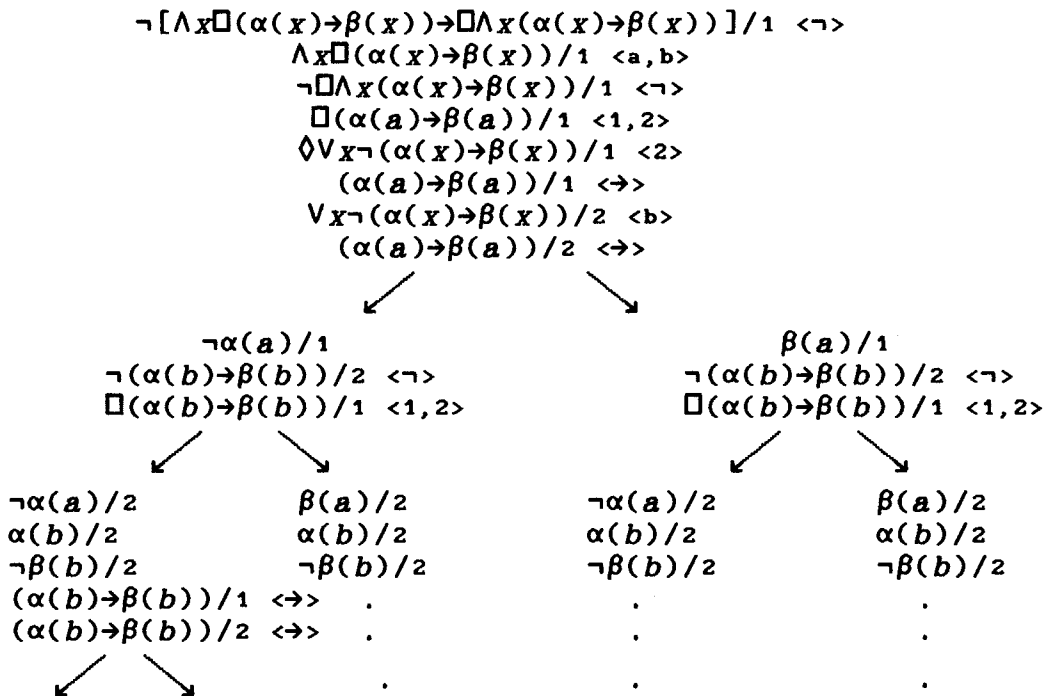
El árbol se termina sin haberse cerrado. Esto quiere decir que hay al menos un contraejemplo (cuatro en este caso) de [FB]. Obsérvese que en la construcción del árbol el parámetro b que aparece al marcar una fórmula asociada al índice 2 no marca a la fórmula $\wedge x \Box(\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$ asociada al índice 1, por lo que se ha asumido al construirlo que no $2 \sim_1$ (en definitiva, que μ_1 no es alternativo a μ_2); esto es, que la relación de alternatividad no cumple la cláusula de simetría. [FB] no es, efectivamente, ni K^* -válida ni T^* -válida ni $S4^*$ -válida. El siguiente es un modelo falsificador de la fórmula $\wedge x \Box(\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow \Box \wedge x(\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$:

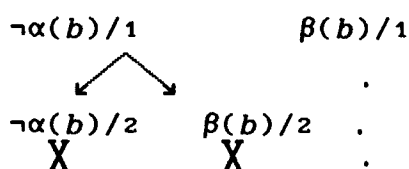
$\Omega = \{\mu_1, \mu_2\}$ tal que $\mu_1 \mathcal{R} \mu_1$, $\mu_2 \mathcal{R} \mu_2$, $\mu_1 \mathcal{R} \mu_2$.

$\mathcal{D}(\mu_1) = \{a\}$, $\mathcal{D}(\mu_2) = \{a, b\}$ y $f(x, \mathcal{D}(\mu_1)) = a$ y $f(x, \mathcal{D}(\mu_2)) = a$.

$S4^*$	$\alpha(a)$	$\alpha(b)$	$\beta(a)$	$\beta(b)$	$(\alpha(a) \rightarrow \beta(a))$	$(\alpha(b) \rightarrow \beta(b))$
μ_1	0	-	-	-	1	-
μ_2	0	1	-	0	1	0

Sin embargo, si se añade la cláusula de simetría se comprueba que la Fórmula Barcan es tanto B^* -válida como $S5^*$ -válida:





En este segundo árbol, al darse el caso de que $\mu_2 \mathcal{R} \mu_1$, el término b tiene la misma referencia en $\mathcal{D}(\mu_1)$ que la que tiene en $\mathcal{D}(\mu_2)$ y por tanto aparece en los enunciados de ambos conjuntos modelos. Se puede comprobar entonces que, aunque se ha descartado la presuposición de que en μ_1 y en μ_2 existan los mismos individuos, no se ha suprimido la presuposición de que en ambos mundos posibles existan individuos. En los dos árboles, la expresión $\Lambda x \Box(\alpha(x) \rightarrow \beta(x))/1$ ha sido marcada con un parámetro que hasta entonces no había aparecido en la secuencia. En realidad, en ese momento aún no había aparecido ningún parámetro en el árbol. Esto representa una violación de la cláusula de existencia y por tanto de la condición (C. Λ_0) del capítulo anterior, pero no de la cláusula de la indicación rígida que, a pesar de que parece más restrictiva, permite obtener conclusiones que en un sistema sin presuposiciones existenciales no son posibles. Por tanto diré, no que la semántica de los mundos posibles está exenta de presuposiciones de existencia, sino, siguiendo a J.

HINTIKKA, que no tiene presuposiciones de particularidad.¹⁰²

§19. Árboles semánticos infinitos por causa de la iteración de operadores cuantificacionales.

Se pueden encontrar también secuencias infinitas por la aparición ininterrumpida de parámetros en el árbol al aplicar las reglas propias de los cuantificadores. Por ejemplo, la secuencia sin modalidades siguiente:

$$\begin{aligned}
 &\Lambda x \forall y (\neg \alpha(x, x) \wedge \alpha(x, y)) / 1 \langle a, b, c, \dots \rangle \\
 &\quad \forall y (\neg \alpha(a, a) \wedge \alpha(a, y)) / 1 \langle b \rangle \\
 &\quad \quad (\neg \alpha(a, a) \wedge \alpha(a, b)) / 1 \langle \wedge \rangle \\
 &\quad \quad \forall y (\neg \alpha(b, b) \wedge \alpha(b, y)) / 1 \langle c \rangle \\
 &\quad \quad \quad \neg \alpha(a, a) / 1 \\
 &\quad \quad \quad \alpha(a, b) / 1 \\
 &\quad \quad \quad (\neg \alpha(b, b) \wedge \alpha(b, c)) / 1 \langle \wedge \rangle \\
 &\quad \quad \quad \forall y (\neg \alpha(c, c) \wedge \alpha(c, y)) / 1 \langle d \rangle \\
 &\quad \quad \quad \quad \neg \alpha(b, b) / 1 \\
 &\quad \quad \quad \quad \alpha(b, c) / 1 \\
 &\quad \quad \quad \quad \cdot \\
 &\quad \quad \quad \quad \cdot \\
 &\quad \quad \quad \quad \cdot
 \end{aligned}$$

¹⁰² J. HINTIKKA demuestra también que, en un sentido definido, los sistemas con presuposiciones de existencia son un subsistema de aquellos que prescinden de ellas. El sistema aquí expuesto está a medio camino entre ambos. Para la demostración cfr. HINTIKKA, J.: "Existential Presuppositions and their Elimination" en *Models for Modalities*, páginas 34-37.

Por lo general, de toda fórmula satisfactible en la que se dé un cuantificador existencial bajo el alcance de otro universal se obtendrá un árbol infinito, de forma similar a lo que ocurría cuando en un árbol aparecía una fórmula modalizada en la que un operador de posibilidad caía bajo el alcance de uno de necesidad. Como puede preverse, por tanto, la causa de que el árbol anterior no se termine es análoga a la que se estudió en el párrafo precedente y la solución que aportaré responde, por ello, a criterios parecidos a los de entonces.¹⁰³ Si en el caso anterior era necesario restringir la aparición de nuevos índices en el árbol para evitar su decurso infinito, en el caso de los árboles que no acaban por la proliferación de parámetros hay que restringir

¹⁰³ Hay que tener en cuenta que la lógica de predicados de primer orden no es decidible y que por eso mismo el método de los árboles semánticos no puede aportar un modelo efectivo para todas las fórmulas satisfactibles. En concreto, la existencia de fórmulas que son satisfactibles solamente en dominios infinitos comporta ya la imposibilidad de evitar la aparición de secuencias arbóreas infinitas. Sin embargo, como es el caso de la fórmula cuyo árbol se desarrolla más arriba, se puede encontrar mediante este método un modelo que satisfaga a las que lo sean en dominios finitos, a pesar de tener su prefijo cuantificacional dispuesto del modo ya indicado.

las reglas propias de la cuantificación.¹⁰⁴

Definición 20.1: Se entiende por signo de provisionalidad un par de barras verticales a derecha e izquierda de una expresión $\delta/i \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$. Si δ/i aparece con n barras verticales a derecha e izquierda, con $n \geq 1$, se dirá que δ/i tiene n signos de provisionalidad o, simplemente, que δ/i es n -provisional.

Definición 20.2: Si $\gamma/i, \delta/j \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$ y δ/j es provisional, se dice que la expresión γ/i origina la provisionalidad de δ/j sii δ/j depende de γ/i en $\mathcal{F}_n$, γ/i tiene un signo de provisionalidad menos que δ/j y para cualquier expresión $\eta/k \in \mathcal{F}_n$ de la cual dependa δ/j y tenga un signo de provisionalidad menos que δ/j , γ/i depende de η/k .

Definición 20.3: Un cierre provisional es aquél que se produce sii en la secuencia $\mathcal{F}$ ocurre un par de fórmulas de las que una es la negación de la otra y al menos una de las

¹⁰⁴ El método que sigue para evitar determinado tipo de árboles infinitos se denomina de árboles provisionales y ha sido desarrollado para lógica de predicados de primer orden por DÍAZ ESTÉVEZ en el artículo inédito "Reducciones finitas de árboles semánticos infinitos".

dos es provisional. En el caso de que en la secuencia $\mathcal{J}$ se dé un cierre provisional, se tacha la fórmula provisional con cuya aparición se origina el cierre de la secuencia, así como todas las fórmulas con igual número de signos de provisionalidad de las que dependa y la marca que da lugar a dicha fórmula provisional.

(R.V^{*}): Si la primera expresión no convenientemente marcada de la secuencia $\mathcal{J} \langle a_k \rangle$ es de la forma $Vx\beta(x)/i$, entonces se añade a $\mathcal{J}$ la expresión $\beta(a_k)/i$, donde a_k es el parámetro de menor subíndice no tachado como marca de $Vx\beta(x)/i$, de modo que:

a) si a_k ya ha aparecido en $\mathcal{J}$, la expresión $\beta(a_k)/i$ se escribe con un signo más de provisionalidad que los que tenga $Vx\beta(x)/i$ y se marca con el signo $|a_k|$;

b) si a_k aún no ha aparecido en $\mathcal{J}$, la expresión $\beta(a_k)/i$ se escribe con los mismos signos de provisionalidad que tenga $Vx\beta(x)/i$ y se marca con el signo $\langle a_k \rangle$.

Con la restricción anterior, el árbol propuesto más arriba se termina del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
& \wedge x \vee y (\neg \alpha(x, x) \wedge \alpha(x, y)) / 1 \langle a, b \rangle \\
& \vee y (\neg \alpha(a, a) \wedge \alpha(a, y)) / 1 \nmid \langle a \rangle \nmid \langle b \rangle \\
& \quad \nmid (\neg \alpha(a, a) \wedge \alpha(a, a)) / 1 \nmid \langle \wedge \rangle \\
& \quad \quad \nmid \neg \alpha(a, a) / 1 \nmid \\
& \quad \quad \nmid \alpha(a, a) / 1 \nmid \\
& \quad (\neg \alpha(a, a) \wedge \alpha(a, b)) / 1 \langle \wedge \rangle \\
& \vee y (\neg \alpha(b, b) \wedge \alpha(b, y)) / 1 \mid \langle a \rangle \mid \\
& \quad \neg \alpha(a, a) / 1 \\
& \quad \alpha(a, b) / 1 \\
& \mid (\neg \alpha(b, b) \wedge \alpha(b, a)) / 1 \mid \langle \wedge \rangle \\
& \quad \mid \neg \alpha(b, b) / 1 \mid \\
& \quad \mid \alpha(b, a) / 1 \mid
\end{aligned}$$

El árbol proporciona un S^* -modelo para la fórmula inicial con un único conjunto modelo μ_1 -lo que es evidente puesto que no hay ninguna ocurrencia de operadores modales en la fórmula- y un dominio $\mathcal{D}(\mu_1) = \{a, b\}$:

	$\alpha(a, a)$	$\alpha(a, b)$	$\alpha(b, a)$	$\alpha(b, b)$
μ_1	0	1	1	0

El siguiente es un caso similar pero con una fórmula modal al inicio del árbol:

$$\begin{aligned}
& \neg [\Box \vee x \alpha(x) \rightarrow \vee x \Box \alpha(x)] / 1 \langle \neg \rangle \\
& \quad \Box \vee x \alpha(x) / 1 \langle 1, 2, 3, \dots \rangle \\
& \quad \neg \vee x \Box \alpha(x) / 1 \langle \neg \rangle \\
& \quad \quad \vee x \alpha(x) / 1 \langle a \rangle \\
& \quad \wedge x \Diamond \neg \alpha(x) / 1 \langle a, b, c, \dots \rangle \\
& \quad \quad \alpha(a) / 1 \\
& \quad \quad \Diamond \neg \alpha(a) / 1 \langle 2 \rangle \\
& \quad \quad \neg \alpha(a) / 2
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \forall x \alpha(x)/2 \langle b \rangle \\
 \alpha(b)/2 \\
 \Diamond \neg \alpha(b)/1 \langle 3 \rangle \\
 \neg \alpha(b)/3 \\
 \forall x \alpha(x)/3 \langle c \rangle \\
 \alpha(c)/3 \\
 . \\
 . \\
 .
 \end{array}$$

El árbol infinito anterior no pararía aunque se aplicase el método de los índices congruentes porque se trata no de un árbol $S4^*$ o $S5^*$ sino de un árbol T^* . En realidad son los parámetros que van apareciendo indefinidamente en el árbol los que provocan que éste no pare. Pero si le aplicamos la restricción de la provisionalidad se obtiene la secuencia siguiente:

$$\begin{array}{l}
 \neg [\Box \forall x \alpha(x) \rightarrow \forall x \Box \alpha(x)]/1 \langle \neg \rangle \\
 \Box \forall x \alpha(x)/1 \langle 1, 2, 3 \rangle \\
 \neg \forall x \Box \alpha(x)/1 \langle \neg \rangle \\
 \forall x \alpha(x)/1 \langle a \rangle \\
 \wedge x \Diamond \neg \alpha(x)/1 \langle a, b \rangle \\
 \alpha(a)/1 \\
 \Diamond \neg \alpha(a)/1 \langle 2 \rangle \\
 \neg \alpha(a)/2 \\
 \forall x \alpha(x)/2 \nmid \langle a \rangle \nmid \langle b \rangle \\
 \nmid \alpha(a)/2 \nmid \\
 \alpha(b)/2 \\
 \Diamond \neg \alpha(b)/1 \langle 3 \rangle \\
 \neg \alpha(b)/3 \\
 \forall x \alpha(x)/3 \mid \langle a \rangle \mid \\
 \mid \alpha(a)/3 \mid
 \end{array}$$

En este caso tenemos que la secuencia anterior se corresponde con $A_T^* \neg [\Box \forall x \alpha(x) \rightarrow \forall x \Box \alpha(x)]$ y que aporta un modelo

que T^* -satisface a la fórmula inicial:

$$\Omega = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} \quad \mathcal{D}(\mu_1) = \{a\} \quad \mathcal{D}(\mu_2) = \{a, b\} \quad \mathcal{D}(\mu_3) = \{a, b\}$$

T^*	$\alpha(a)$	$\alpha(b)$
μ_1	1	-
μ_2	0	1
μ_3	1	0

El siguiente es el esquema propio de la relación de relevancia entre índices:

