

CAPÍTULO CUATRO:

UN PROCEDIMIENTO SEMÁNTICO DE DECISIÓN.

§8. Árboles semánticos para la lógica modal alética de proposiciones.

En este capítulo me propongo establecer un procedimiento semántico de decisión para los sistemas normales de lógica modal de proposiciones. El procedimiento se basa directamente en la *semántica de los mundos posibles*, por una parte, y el método de tablas o árboles semánticos de E.W. BETH y RAYMOND SMULLYAN, por otra.⁶¹

⁶¹ Cfr. E.W. BETH: "Semantic Entailment and Formal Derivability" en J. HINTIKKA (ed.): *The Philosophy of Mathematics*, pp.: 9-41, y RAYMOND SMULLYAN: *First-Order Logic*, respectivamente. M. FITTING ha aplicado también el método de tablas semánticas a la lógica modal en su libro *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*, con notables resultados de los que también me considero deudor. Tampoco puedo, ni debo, olvidar aquí el magisterio del profesor EMILIO DÍAZ ESTEVEZ ni su trabajo inédito "Reducciones finitas de árboles semánticos infinitos", al cual también debo lo esencial del procedimiento aquí expuesto.

Definición 8.1: Un árbol semántico es una secuencia de secuencias de expresiones del tipo β/n , donde β es una fórmula del lenguaje y n es un índice numérico (siendo $n > 0$), tal que se constituye a partir de una primera expresión $\alpha/1$ según las reglas de construcción que se establecerán debidamente. En rigor llamaré a esta secuencia de secuencias de expresiones que tiene a $\alpha/1$ como primera de todas ellas árbol S de α , o esquemáticamente $\mathcal{A}_S\alpha$.⁶²

Definición 8.2: Una fórmula cualquiera δ está asociada a un índice i en la secuencia $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}_S\alpha$ sii en $\mathcal{J}$ aparece la expresión δ/i .

Las reglas de formación del árbol semántico que van a ser establecidas a continuación son una aplicación formal

⁶² Opto por tratar los índices que acompañan a las fórmulas en el árbol como parte del metalenguaje y no del lenguaje objeto. Ambas opciones están presentes en la literatura sobre árboles modales. La primera, por ejemplo, se encuentra en COPELAND, B.J.: "Tense Trees: A Tree System for K_t ". La segunda, en cambio, puede encontrarse en FITTING, M.: "Tableau Methods of Proof for Modal Logics" y en DAVIDSON, JACKSON & PARGETTER: "Modal Trees for T and S5". Considero que el tratamiento de los índices como parte del metalenguaje es más elegante, además de reforzar el carácter *semántico* de los árboles modales.

del concepto de conjunto modelo para el análisis semántico de una fórmula modal. En síntesis, pueden describirse como la traslación al procedimiento de las tablas semánticas del conjunto de condiciones $\mathcal{E}$. En este sentido, es posible concebir el árbol semántico como una secuencia de enunciados metalingüísticos acerca de un conjunto Ω de conjuntos modelos que puede mostrarse efectivamente por el solo agrupamiento, según corresponda, de todas las fórmulas que aparecen en el árbol en el conjunto modelo que determine el índice al que cada fórmula está asociada,⁶³ siendo así que a partir de $\mathcal{A}_S\alpha$ es posible obtener en tal caso un S-modelo que satisfaga a α .

Definición 8.3: Una expresión de $\mathcal{A}_S\alpha$ está debidamente marcada o, simplemente, marcada sii aparece junto a ella uno de los siguientes signos: $\langle \neg \rangle$, $\langle \vee \rangle$, $\langle \wedge \rangle$, $\langle \leftrightarrow \rangle$, o uno o más índices numéricos -o bien uno o más parámetros- entre $\langle \rangle$.

Una de estas marcas junto a una expresión significa que ya ha sido aplicada a la misma alguna de las reglas de

⁶³ Con la salvedad de aquellos árboles que resulten *cerrados*, pues en ellos no podrán interpretarse los índices como conjuntos modelos *stricto sensu*, como se verá más adelante.

formación del árbol semántico, encabezadas por las siguientes:

- (R. $\vee$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{S}} \alpha$ es de la forma $(\beta \vee \gamma)/i$ entonces se obtienen dos secuencias diferentes $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tales que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} + \beta/i$ y $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} + \gamma/i$ y se marca la expresión con el signo $\langle \vee \rangle$.
- (R. $\wedge$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{S}} \alpha$ es de la forma $(\beta \wedge \gamma)/i$ entonces se añaden a la secuencia $\mathcal{S}$ tanto la expresión β/i como la expresión γ/i y se marca con el signo $\langle \wedge \rangle$.
- (R. $\rightarrow$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{S}} \alpha$ es de la forma $(\beta \rightarrow \gamma)/i$ entonces se obtienen dos secuencias diferentes $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tales que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} + \neg\beta/i$ y $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} + \gamma/i$ y se marca la expresión con el signo $\langle \rightarrow \rangle$.

Como se adelantara, es fácil observar la correspondencia directa que hay entre estas tres reglas y las condiciones (C. $\vee$), (C. $\wedge$) y (C. $\rightarrow$), respectivamente. Con el objeto de añadir nuevas reglas de formación del árbol semántico se pueden establecer nuevas condiciones; por ejemplo, a partir de las anteriores y la condición (C. $\neg$):

- (C. $\neg$): Si $\neg\alpha \in \mu$ entonces $\alpha \in \mu$.
- (C. $\neg\vee$): Si $\neg(\alpha\vee\beta) \in \mu$ entonces $\neg\alpha \in \mu$ y $\neg\beta \in \mu$.
- (C. $\neg\wedge$): Si $\neg(\alpha\wedge\beta) \in \mu$ entonces $\neg\alpha \in \mu$ ó $\neg\beta \in \mu$.
- (C. $\neg\rightarrow$): Si $\neg(\alpha\rightarrow\beta) \in \mu$ entonces $\alpha \in \mu$ y $\neg\beta \in \mu$.
- (C. $\neg\Diamond$): Si $\neg\Diamond\alpha \in \mu$ entonces $\Box\neg\alpha \in \mu$.
- (C. $\neg\Box$): Si $\neg\Box\alpha \in \mu$ entonces $\Diamond\neg\alpha \in \mu$.

Estas nuevas condiciones son fácilmente derivables apelando a las anotadas en el capítulo anterior. Derivo, como ejemplo, (C. $\neg\wedge$). Supóngase que $\neg(\alpha\wedge\beta) \in \mu$; entonces por (C. $\neg$) no se da el caso que $(\alpha\wedge\beta) \in \mu$. Luego por (C. $\wedge$) no es el caso que $\alpha \in \mu$ y $\beta \in \mu$; esto es: o bien no es el caso que $\alpha \in \mu$ o bien no lo es que $\beta \in \mu$ (o ambos), y apelando nuevamente a (C. $\neg$) se obtiene que $\neg\alpha \in \mu$ ó $\neg\beta \in \mu$. (C. $\neg\Diamond$) y (C. $\neg\Box$) se fundamentan intuitivamente.

De estas seis condiciones se siguen las reglas correspondientes:

- (R. $\neg$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{J} \neg \alpha$ es de la forma $\neg\beta/i$ entonces se añade a la secuencia $\mathcal{J}$ la expresión β/i y se marca con el signo $\langle \neg \rangle$.
- (R. $\neg\vee$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{J} \neg \alpha$ es de

la forma $\neg(\beta \vee \gamma)/i$ entonces se añaden a la secuencia $\mathcal{S}$ tanto la expresión $\neg\beta/i$ como la expresión $\neg\gamma/i$ y se marca con el signo $\langle \neg \rangle$.

(R. $\neg\wedge$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\neg(\beta \wedge \gamma)/i$ entonces se obtienen dos secuencias diferentes $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tales que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} + \neg\beta/i$ y $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} + \neg\gamma/i$ y se marca con el signo $\langle \neg \rangle$.

(R. $\neg\rightarrow$): Si la primera expresión no marcada de $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\neg(\beta \rightarrow \gamma)/i$ entonces se añaden a la secuencia $\mathcal{S}$ las expresiones β/i y $\neg\gamma/i$ y se marca con el signo $\langle \neg \rangle$.

(R. $\neg\Diamond$): Si la primera expresión no convenientemente marcada de $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\neg\Diamond\beta/i$ entonces se añade a la secuencia $\mathcal{S}$ la expresión $\Box\neg\beta/i$ y se marca con el signo $\langle \neg \rangle$.

(R. $\neg\Box$): Si la primera expresión no convenientemente marcada de $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_S \alpha$ es de la forma $\neg\Box\beta/i$ entonces se añade a la secuencia $\mathcal{S}$ la expresión $\Diamond\neg\beta/i$ y se marca con el signo $\langle \neg \rangle$.

Se puede prever que a estas nueve reglas de construcción del árbol semántico haya que añadir las correspondientes a las condiciones propias de la cuantificación y de los operadores modales aléticos. Las

primeras se verán en el capítulo siguiente puesto que, como queda dicho ya, la cuantificación en los contextos no puramente referenciales, que es el caso de los contextos modales, supone problemas específicos que han de tratarse a su vez específicamente. Por otra parte, las condiciones $(C.\Diamond)$ y $(C.\Box)$ darán lugar a tantas reglas de formación cuantas definiciones de la relación de alternatividad haya que manejar en relación con el S-modelo según el que se evalúe la fórmula que da lugar al árbol. La regla correspondiente a $(C.\Diamond)$ es común a todos los S-modelos de los sistemas normales de lógica modal:

$(R.\Diamond)$: Si la primera expresión de $\mathcal{S} \vdash \alpha$ no convenientemente marcada es de la forma $\Diamond\beta/i$ entonces se añade a la secuencia $\mathcal{S}$ la expresión β/j , donde j es el menor índice mayor que i no aparecido hasta el momento en la secuencia, y se marca con $\langle j \rangle$.

Las reglas correspondientes a $(C.\Box)$, en cambio, difieren en función del S-modelo elegido para revisar la fórmula.

Definición 8.4: Se dice que un índice j es relevante

para otro índice i en la secuencia $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}_{S\alpha}$ (abreviadamente, $i \sim j$) sii el índice j aparece en $\mathcal{J}$ al marcar una fórmula del tipo $\Diamond\beta$ asociada al índice i .

La noción de relevancia entre índices también podría denominarse de *K-relevancia* (lo que podría escribirse $i \sim_K j$, para dos índices cualesquiera i y j), por lo que cabe definir las nociones oportunas de relevancia para cada sistema normal T, B, S4 y S5:⁶⁴

- Definición 8.5: a) $\forall i, j \in \mathcal{J} \ i \sim_T j$ sii $i \sim j$ ó $i = j$.
 b) $\forall i, j \in \mathcal{J} \ i \sim_B j$ sii $i \sim j$ ó $j \sim i$.
 c) $\forall i, j \in \mathcal{J} \ i \sim_{S_4} j$ sii $i \sim j$ ó $\exists k \in \mathcal{J} \ i \sim k \sim j$.

⁶⁴ La noción de relevancia entre índices en el árbol semántico está evidentemente emparentada con la relación de alternatividad definida entre los miembros de una clase modelo. Las definiciones de T-relevancia, B-relevancia, etcétera son la forma de trasladar a los árboles lo que se dijo en el capítulo anterior sobre la relación de alternatividad y sus propiedades en los diversos sistemas modelos. En este sentido, cabe destacar la definición de S5-relevancia que no recoge ninguna restricción especial relacionada con la definición de relevancia entre índices, puesto que la relación de alternatividad en S5 es una relación de equivalencia: todos los índices que aparecen en la secuencia $\mathcal{J}$ son relevantes los unos para los otros. La definición de D-relevancia aparece en el capítulo siete, dedicado a la interpretación deóntica de los operadores de modalidad.

$$d) \forall i, j \in \mathcal{J} \quad i \sim_{S_5} j.$$

(R_S.□):⁶⁵ Si la primera expresión no debidamente marcada en $\mathcal{J} \vdash_{S_5} \alpha$ es de la forma $\Box \beta / i$ entonces se añaden a la secuencia $\mathcal{J}$ todas las expresiones $\beta / j_1, \dots, \beta / j_n$, estando $j_1, \dots, j_n$ por todos los índices que aparecen en la secuencia tales que $i \sim_{S_5} j_k$, para $1 \leq k \leq n$, y se marca con $\langle j_1, \dots, j_n \rangle$.

Es conveniente establecer un orden de aplicación de las reglas de formación del árbol cuando en una misma secuencia hay más de una fórmula no convenientemente marcada. Con este fin, las reglas anteriores pueden ser divididas en tres grupos diferentes:

1° Aquellas reglas que provocan la aparición de nuevos índices en el árbol: (R.◇).

2° Aquellas reglas que provocan la bifurcación del árbol: (R.∨), (R.→) y (R.¬∧).

⁶⁵ La *ese* subscrita está por cualquiera de los sistemas tratados K, T, etcétera. A partir de esta regla, por tanto, podrá hablarse de las reglas (R_K.□), (R_T.□) y así sucesivamente.

3° El resto de las reglas de formación del árbol semántico.

Dados una secuencia abierta $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$ y un conjunto de expresiones no convenientemente marcadas $\Gamma \subset \mathcal{J}_n$, las reglas de formación del árbol deben aplicarse a Γ en orden de prioridad inverso al establecido en su división por grupos anterior.

Definición 8.6: Se dice que una secuencia $\mathcal{J}_n$ es cerrada si aparecen en ella dos expresiones de la forma β/i y $\neg\beta/i$, donde la fórmula β es atómica, esto es: no ocurre en ella ninguno de los signos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ni operadores lógicos y, por tanto, no se le puede aplicar ya ninguna de las reglas de construcción. El cierre de una secuencia se simboliza mediante un aspa al final de la misma. Cuando todas las secuencias de un árbol son cerradas se dice que el árbol mismo es cerrado.

Evidentemente, cuando una secuencia $\mathcal{J}$ es cerrada, el índice i al que aparecen asociadas las fórmulas β y $\neg\beta$ no puede ser interpretado como un conjunto modelo, puesto que por la definición 6.2 si $\beta \in \mu_i$ entonces $\neg\beta \notin \mu_i$. Luego en una secuencia tal los índices no representan conjuntos modelos,

debiendo ser interpretada la secuencia como un intento fallido por construir un S-modelo que satisfaga la fórmula inicial.

§9. El teorema fundamental de los árboles semánticos.

Definición 9.1: Se dice que una expresión β/i perteneciente a una secuencia $\mathcal{J}$ depende de cualquier otra expresión α/j aparecida en la secuencia si β/i es α/j o aparece en $\mathcal{J}$ por la aplicación de una de las reglas de formación del árbol sobre una expresión $\gamma/h \in \mathcal{J}$ que dependa de α/j .

Teorema 9.1: Si α es S-satisfactible entonces hay al menos una secuencia $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$ tal que si, para un índice cualquiera i y una fórmula cualquiera β , $\beta/i \in \mathcal{J}_n$ depende de $\alpha/1$ entonces β es también S-satisfactible.

Demostración: El teorema se demuestra por inducción sobre el número de aplicaciones de las reglas de formación del árbol. Sea m dicho número y $m=0$. Entonces $\mathcal{J}_n = \{\alpha/1\}$ y por hipótesis α es S-satisfactible. Quede demostrado el teorema para cualquier $m>0$ y demuéstrese ahora que también vale para

$m+1$. La $m+1$ -ésima aplicación de las reglas de formación del árbol puede ser de una de las siguientes:

- (R. $\wedge$) sobre una expresión del tipo $(\gamma \wedge \delta)/i$. Luego se obtienen en la secuencia $\mathcal{J}_n$ las expresiones γ/i y δ/i . Como $(\gamma \wedge \delta)$ es S-satisfactible por la hipótesis de la inducción hay un μ_i que es consistente, pues ha de cumplir la condición (C. $\neg$), tal que $(\gamma \wedge \delta) \in \mu_i$, $\gamma \in \mu_i$ y $\delta \in \mu_i$; y por las definiciones 6.2 (de conjunto modelo) y 6.5 (de S-satisfactibilidad), γ y δ han de ser ambas S-satisfactibles.

- (R. $\vee$) sobre una expresión de la forma $(\gamma \vee \delta)/i$. Luego se obtienen dos secuencias diferentes a partir de $\mathcal{J}_n$ tales que la primera es $\mathcal{J}_n + \gamma/i$ y la segunda es $\mathcal{J}_n + \delta/i$. Por hipótesis de la inducción $(\gamma \vee \delta)$ es S-satisfactible, lo que significa que hay un conjunto modelo μ_i tal que o bien $\gamma \in \mu_i$ o bien $\delta \in \mu_i$; de modo que por la definición 6.2 (de conjunto modelo) y la definición 6.5 (de S-satisfactibilidad) al menos una de ambas fórmulas γ o δ es S-satisfactible.

- (R. $\rightarrow$) sobre una expresión de la forma $(\gamma \rightarrow \delta)/i$. Luego se obtienen dos secuencias diferentes a partir de $\mathcal{J}_n$ tales que la primera es $\mathcal{J}_n + \neg \gamma/i$ y la segunda es $\mathcal{J}_n + \delta/i$. Por hipótesis de la inducción $(\gamma \rightarrow \delta)$ es S-satisfactible, de donde se sigue que hay un conjunto modelo μ_i tal que

o bien $\neg\gamma \in \mu_i$ o bien $\delta \in \mu_i$; de modo que nuevamente por la definición 6.2 (de conjunto modelo) y la definición 6.5 (de S-satisfactibilidad) al menos una de ambas fórmulas $\neg\gamma$ o δ es S-satisfactible.⁶⁶

• (R. $\Diamond$) sobre una expresión del tipo $\Diamond\delta/i$. Luego se obtiene δ/j , siendo j un índice nuevo tal que $i \sim_S j$. Hay, por tanto, un μ_i y un μ_j tales que $\Diamond\delta \in \mu_i$ y $\delta \in \mu_j$ y $\mu_i \mathcal{R} \mu_j$, y por tanto, por las definiciones 6.2 y 6.5, δ es S-satisfactible.

• (R_S. $\Box$) sobre una expresión de la forma $\Box\delta/i$. Luego se obtiene la secuencia $\langle \alpha/1, \dots, \Box\delta/i, \delta/j_1, \dots, \delta/j_n \rangle$, donde $j_1, \dots, j_n \in \mathcal{J}_n$ y $i \sim_S j_1, \dots, i \sim_S j_n$. Hay, por lo tanto, unos $\mu_i, \mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}$ tales que $\Box\delta \in \mu_i, \delta \in \mu_{j_1}, \dots, \delta \in \mu_{j_n}$, con $\mu_i \mathcal{R} \mu_{j_1}, \dots, \mu_i \mathcal{R} \mu_{j_n}$ y nuevamente por las definiciones 6.2 y 6.5, δ es S-satisfactible.⁶⁷

Definición 9.2: Se llama secuencia asociada $\mathcal{F}_i$ a la secuencia $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$ a la n-tupla ordenada $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \rangle$ tal que $\mathcal{F}_0$ es el conjunto de todas las fórmulas elementales de

⁶⁶ La prueba para (R. $\neg\wedge$), (R. $\neg\vee$), (R. $\neg\rightarrow$), etcétera se desarrolla en términos idénticos.

⁶⁷ La prueba para (R. $\neg\Diamond$) y (R. $\neg\Box$) se desarrolla de la misma forma.

$\mathcal{F}_n$ (es decir, las fórmulas atómicas y atómicas negadas que aparecen en $\mathcal{F}_n$) y $\mathcal{F}_m$, con $0 < m \leq n$, el más pequeño conjunto de fórmulas de $\mathcal{F}_n$ tal que:

1. a) $\neg\neg\delta/i \in \mathcal{F}_m$ sii $\delta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.
 b) $\neg(\delta \wedge \eta)/i \in \mathcal{F}_m$ sii $\neg\delta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$ ó $\neg\eta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.
 c) $\neg(\delta \vee \eta)/i \in \mathcal{F}_m$ sii una de las dos fórmulas $\neg\delta/i$ ó $\neg\eta/i$ pertenece a $\mathcal{F}_{m-1}$ y la otra pertenece a $\mathcal{F}_j$ con $j \leq m-1$.
 d) $\neg(\delta \rightarrow \eta)/i \in \mathcal{F}_m$ sii una de las dos fórmulas δ/i ó $\neg\eta/i$ pertenece a $\mathcal{F}_{m-1}$ y la otra pertenece a $\mathcal{F}_j$ con $j \leq m-1$.
 e) $\neg\Box\delta/i \in \mathcal{F}_m$ sii $\Diamond\neg\delta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.
 f) $\neg\Diamond\delta/i \in \mathcal{F}_m$ sii $\Box\neg\delta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.
 g) $\neg\Lambda x\delta(x) \in \mathcal{F}_m$ sii $\vee x\neg\delta(x) \in \mathcal{F}_{m-1}$.
 h) $\neg\vee x\delta(x) \in \mathcal{F}_m$ sii $\Lambda x\neg\delta(x) \in \mathcal{F}_{m-1}$.
2. $\delta \vee \eta/i \in \mathcal{F}_m$ sii $\delta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$ ó $\eta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.
3. $\delta \wedge \eta/i \in \mathcal{F}_m$ sii una de las fórmulas δ/i ó η/i pertenece a $\mathcal{F}_{m-1}$ y la otra pertenece a $\mathcal{F}_j$ con $j \leq m-1$.
4. $\delta \rightarrow \eta/i \in \mathcal{F}_m$ sii $\neg\delta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$ ó $\eta/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.
5. $\Box\delta/i \in \mathcal{F}_m$ sii, siendo $\langle j, k, \dots, n \rangle$ la secuencia de todos los índices que aparecen en $\mathcal{F}_n$ tales que $i \sim_S j$, $i \sim_S k, \dots$, $i \sim_S n$, $\delta/j \in \mathcal{F}_{m-1}$, $\delta/k \in \mathcal{F}_{m-1}, \dots$, $\delta/n \in \mathcal{F}_{m-1}$.

6. $\nexists \delta/i \in \mathcal{F}_m$ sii hay un índice $j \in \mathcal{J}_n$ tal que $i \sim_S j$ y $\delta/j \in \mathcal{F}_{m-1}$.
7. $\wedge x \delta(x)/i \in \mathcal{F}_m$ sii, siendo $\langle a_k, \dots, a_n \rangle$ la secuencia de todos los parámetros que aparecen en $\mathcal{J}_n$ en cualesquiera fórmulas asociadas a cualquier índice j tal que $j \sim_S i$, $\delta(a_k)/i \in \mathcal{F}_{m-1}, \dots, \delta(a_n) \in \mathcal{F}_{m-1}$.
8. $\forall x \delta(x)/i \in \mathcal{F}_m$ sii aparece un parámetro a_k en la secuencia $\mathcal{J}_n$ tal que $\delta(a_k)/i \in \mathcal{F}_{m-1}$.

Lema 9.1: *Para toda fórmula α y toda secuencia $\mathcal{J}_n$ no cerrada de $\mathcal{A}_S$, hay un S-modelo que S-satisface simultáneamente a todas las fórmulas de $\mathcal{J}_n$.*

Demostración: Este lema se demuestra por inducción sobre el subíndice de los conjuntos de la secuencia asociada a $\mathcal{J}_n$. Se crea un S-modelo tal que para todas las fórmulas pertenecientes a la secuencia asociada $\mathcal{F}_0$ a la secuencia $\mathcal{J}_n$, si $\alpha/i \in \mathcal{F}_0$ entonces $\alpha \in \mu_i$, siendo $\Omega = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$, donde m representa al número de índices que aparecen en $\mathcal{J}_n$ y $1 \leq i \leq m$, observando la relación de alternatividad las cláusulas propias del S-modelo en cuestión. Efectivamente, por la definición 6.2 de conjunto modelo, un S-modelo como el anterior hace S-satisfactibles a todas las fórmulas

elementales de $\mathcal{F}_0$ puesto que no se viola en ningún caso la condición (C. $\neg$), lo que es obvio ya que la secuencia no es cerrada. Supóngase ahora que el lema es válido para todas las fórmulas pertenecientes a $\mathcal{F}_n$. Se demuestra entonces que también lo es para todas las fórmulas pertenecientes a $\mathcal{F}_{n+1}$ indagando todos los casos posibles. Sea β una fórmula cualquiera tal que $\beta/i \in \mathcal{F}_{n+1}$:

1. a) Sea $\beta: \neg\neg\delta$. Por hipótesis $\neg\neg\delta/i \in \mathcal{F}_{n+1}$ y por la definición 9.8(1a) $\delta/i \in \mathcal{F}_n$. Como por hipótesis de la inducción δ es S-satisfactible es que hay un S-modelo $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ y un conjunto modelo $\mu_1 \in \Omega$ tal que $\delta \in \mu_1$ (definición 6.5). Si β no fuera S-satisfactible entonces, por la definición 6.4, para todo $\mu_1 \in \Omega$, no $\mu_1 \succ \neg\neg\delta$, de donde $\mu_1 \succ \neg\delta$ y por tanto $\neg\delta \in \mu_1$, contra (C. $\neg$) y la hipótesis de la inducción.
- b) Sea $\beta: \neg(\delta \wedge \eta)$. Por hipótesis, $\neg(\delta \wedge \eta)/i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Por la definición 9.8(1b) $\neg\delta/i \in \mathcal{F}_n$ ó $\neg\eta/i \in \mathcal{F}_n$. De este modo, como por la hipótesis de la inducción toda fórmula indexada perteneciente a $\mathcal{F}_n$ es S-satisfactible, por la definición 6.5 hay un S-modelo $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ y un $\mu_1 \in \Omega$ tal que $\neg\delta \in \mu_1$ ó $\neg\eta \in \mu_1$. Supóngase que β no es S-satisfactible. Entonces por la definición 6.4 es que para todo conjunto modelo $\mu_1 \in \Omega$, no $\mu_1 \succ \neg(\delta \wedge \eta)$, de donde $\mu_1 \succ \delta \wedge \eta$; entonces $\mu_1 \succ \delta$ y

$\mu_i \succ \eta$ y por tanto $\delta \in \mu_i$ y $\eta \in \mu_i$, contraviniendo (C. $\neg$).

c) Sea $\beta: \neg(\delta \vee \eta)$. La prueba se desarrolla como en el caso anterior.

d) Sea $\beta: \neg(\delta \rightarrow \eta)$. Como en los casos anteriores.

e) Sea $\beta: \neg \Box \delta$. Por hipótesis $\neg \Box \delta / i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Por la definición 9.8(1e) $\Diamond \neg \delta / i \in \mathcal{F}_n$ y, por la hipótesis de la inducción, $\Diamond \neg \delta$ es S-satisfactible, lo que significa, atendiendo a la definición 6.5, que hay un S-modelo $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ y un $\mu_i \in \Omega$ tal que $\Diamond \neg \delta \in \mu_i$; luego por (C. $\Diamond$) en la definición 6.2 hay un $\mu_j \in \Omega$ tal que $\mu_i \mathcal{R} \mu_j$ y $\neg \delta \in \mu_j$. En el supuesto de que β no fuese S-satisfactible, por la definición 6.4 para todo $\mu_i \in \Omega$ no $\mu_i \succ \neg \Box \delta$; de aquí se sigue que $\mu_i \succ \Box \delta$ y de aquí que $\forall \mu_j \in \Omega \mu_i \mathcal{R} \mu_j \mu_j \succ \delta$; y por tanto $\delta \in \mu_i$. Pero como por hipótesis de la inducción $\neg \delta \in \mu_j$ se viola la condición (C. $\neg$) en la definición 6.2 de conjunto modelo.

f) Sea $\beta: \neg \Diamond \delta$. Como en el caso anterior, pero apelando a (C. $\Box$).

2. Sea $\beta: \delta \vee \eta$. Por hipótesis, $\delta \vee \eta / i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Por la definición 9.8(2) se tiene que $\delta / i \in \mathcal{F}_n$ ó $\eta / i \in \mathcal{F}_n$ y por hipótesis de la inducción o bien δ es S-satisfactible o bien lo es η . Luego, por la definición 6.5 hay un S-modelo $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ y un $\mu_i \in \Omega$

tal que $\delta \in \mu_1$ ó $\eta \in \mu_1$. Pero si β no fuera S-satisfactible entonces, por la definición 6.4, para todo $\mu_1 \in \Omega$, no $\mu_1 \succ \delta \vee \eta$; entonces $\mu_1 \succ \neg(\delta \vee \eta)$; luego $\mu_1 \succ \neg\delta \wedge \neg\eta$; de aquí que tanto $\mu_1 \succ \neg\delta$ como $\mu_1 \succ \neg\eta$; y por tanto $\neg\delta \in \mu_1$ y $\neg\eta \in \mu_1$, contrariando (C. $\neg$).

3. Sea $\beta: \delta \wedge \eta$. La demostración sigue el curso del caso anterior. Hay que tener en cuenta para el paso de la inducción que por la definición 9.8(3) sólo una de las dos subfórmulas de β pertenecerá a $\mathcal{F}_n$, perteneciendo la otra a $\mathcal{F}_k$; pero $k \leq n$, por lo que el paso de la inducción es correcto.

4. Sea $\beta: \delta \rightarrow \eta$. Como en los casos anteriores.

5. Sea $\beta: \Box \delta$. Por hipótesis, $\Box \delta / i \in \mathcal{F}_{n+1}$. De nuevo por la definición 9.8(5) se tiene que $\langle \delta / j, \delta / k, \dots, \delta / m \rangle \in \mathcal{F}_n$, donde $j, k, \dots, m \in \mathcal{I}_n$ y $i \sim_S j, i \sim_S k, \dots, i \sim_S m$. Por hipótesis de la inducción, todas las fórmulas pertenecientes a $\mathcal{F}_n$ son S-satisfactibles. Luego hay en virtud de la definición 6.5 un S-modelo $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ y unos $\mu_j, \mu_k, \dots, \mu_m \in \Omega$ tales que $\mu_1 \mathcal{R} \mu_j, \mu_1 \mathcal{R} \mu_k, \dots, \mu_1 \mathcal{R} \mu_m$ y $\delta \in \mu_j, \delta \in \mu_k, \dots, \delta \in \mu_m$. Si β no fuera S-satisfactible entonces, apelando a la definición 6.4, para todo $\mu_1 \in \Omega$, no $\mu_1 \succ \Box \delta$; luego $\mu_1 \succ \neg \Box \delta$, lo que significa que $\mu_1 \succ \Diamond \neg \delta$ y por tanto que $\exists \mu_j \in \Omega \mu_1 \mathcal{R} \mu_j \mu_j \succ \neg \delta$, de donde se obtiene que $\neg \delta \in \mu_j$, contra (C. $\neg$) y

lo establecido en la hipótesis de la inducción.

6. Sea $\beta: \Diamond \delta$. De aquí que $\Diamond \delta / i \in \mathcal{F}_{n+1}$. Por la definición 9.8(6) de secuencia asociada $\delta / j \in \mathcal{F}_n$, donde j es un índice tal que $j \in \mathcal{J}_n$ y $i \sim_S j$. Por hipótesis de la inducción δ es S-satisfactible. Luego por la definición 6.5 hay un S-modelo $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ y un $\mu_j \in \Omega$ tal que $\mu_i \mathcal{R} \mu_j$ y $\delta \in \mu_j$. En el supuesto de que β no fuese S-satisfactible entonces, por la definición 6.4, para todo $\mu_i \in \Omega$, no $\mu_i \succ \Diamond \delta$; es decir, $\mu_i \succ \neg \Diamond \delta$; luego $\mu_i \succ \Box \neg \delta$; de aquí que $\forall \mu_j \in \Omega$ $\mu_i \mathcal{R} \mu_j$ $\mu_j \succ \neg \delta$; y por tanto $\neg \delta \in \mu_i$, violándose una vez más la condición (C.7).

Lema 9.2: *Dada una fórmula S-satisfactible cualquiera α , hay al menos una secuencia $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$ tal que se puede mostrar un S-modelo que hace a todas las fórmulas de $\mathcal{J}_n$ simultáneamente S-satisfactibles.*

Demostración: Este segundo lema se demuestra por inducción sobre la longitud de una secuencia cualquiera $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}_S \alpha$. Sea $\text{long}(\mathcal{J}_n) = 1$. Por tanto $\mathcal{J}_n = \langle \alpha / i \rangle$. Como por hipótesis α es S-satisfactible queda demostrado el lema. Supóngase ahora que ha sido demostrado para $\text{long}(\mathcal{J}_n) = m$ y demuéstrese para $\text{long}(\mathcal{J}_n) = m+1$. Sea β / i la $m+1$ -ésima fórmula

de la secuencia $\mathcal{J}_n$. Por hipótesis de la inducción hay un S-modelo que S-satisface a todas las fórmulas de la secuencia $\mathcal{J}_n - \beta/i$. Si una vez añadida a la secuencia la última fórmula no hay ningún S-modelo que satisfaga a todas las fórmulas de la secuencia entonces para cualquier S-modelo se puede encontrar una fórmula en la secuencia $\mathcal{J}_n$ que no es S-satisfactible. Esta fórmula ha de ser β , lo que va contra lo establecido por el teorema 9.1, ya que β/i depende de α/i por sucesivas aplicaciones de las reglas de formación del árbol y debe haber alguna secuencia en la que β sea S-satisfactible. Por tanto, debe haber un S-modelo que satisfaga a todas las fórmulas de la secuencia $\mathcal{J}_n = \langle \alpha/i, \dots, \beta/i \rangle$.

El siguiente teorema es una *prueba mediata* de corrección y completitud. Lo llamo teorema fundamental de los árboles semánticos.⁶⁸

⁶⁸ Tanto el nombre como el teorema mismo los debo a DÍAZ ESTÉVEZ, E.: "Reducciones finitas de árboles semánticos infinitos". Más adelante, en el capítulo ocho, se utilizará este teorema para demostrar la completitud de los sistemas normales de lógica modal proposicional. Es en este sentido que lo considero una *prueba mediata*.

Teorema 9.2: $\mathcal{A}_S\alpha$ es cerrado sii α no es S-satisfactible.

Demostración: Este teorema se demuestra en dos partes:

1ª Si α fuese S-satisfactible entonces por el lema 9.2 habría una secuencia $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}_S\alpha$ cuyas fórmulas serían simultáneamente S-satisfactibles. Pero si $\mathcal{J}_n$ fuese cerrada sería, por definición de cierre, porque aparecieran en la secuencia una fórmula atómica y su negación, por lo que las fórmulas de $\mathcal{J}_n$ no serían simultáneamente S-satisfactibles. De donde si $\mathcal{J}_n$ es cerrada entonces α no es S-satisfactible.

2ª Si $\mathcal{A}_S\alpha$ no es cerrado es porque hay una secuencia $\mathcal{J}_n$ abierta. Por el lema 9.1 si $\mathcal{J}_n$ es abierta entonces es posible mostrar un S-modelo que S-satisface a todas las fórmulas de $\mathcal{J}_n$. Luego α es S-satisfactible. Y por contraposición si α no es S-satisfactible entonces $\mathcal{A}_S\alpha$ es cerrado.

Corolario 1: α es S-válida ($\models_S \alpha$) sii $\mathcal{A}_S\neg\alpha$ es cerrado.

Corolario 2: α es consecuencia lógica de un conjunto no vacío de fórmulas Γ en el sistema S ($\Gamma \models_S \alpha$) sii hay una fórmula γ que es la fórmula que se consigue al conjuntar

mediante el signo $\wedge$ todas las fórmulas de un subconjunto finito $\Gamma' \subset \Gamma$ tal que $\mathcal{A}_S \neg(\gamma \rightarrow \alpha)$ es cerrado.

§10. El procedimiento de los árboles semánticos aplicado a los sistemas normales de lógica modal proposicional.

En virtud del corolario 1 del teorema 9.2 queda claro que puede utilizarse el procedimiento de los árboles semánticos como una prueba semántica de S-validez simplemente construyendo el árbol de la negación de la fórmula que se quiere demostrar S-válida y comprobando que cada una de las secuencias que lo constituyen es cerrada. Siguiendo esta línea se puede fácilmente mostrar que los diferentes S-modelos aquí tratados son los equivalentes semánticos de los sistemas axiomáticos normales de lógica modal; es decir: que toda fórmula demostrable en un sistema dado S es S-válida. Las siguientes son las pruebas de T-validez de los dos axiomas que caracterizan al sistema T de FEYS:⁶⁹

⁶⁹ Cfr. FEYS, R.: *Modal Logics*, p.: 123. Los D-modelos serán tratados en un capítulo aparte por su interés para la teoría de las normas.

[T] $\Box\alpha \rightarrow \alpha$

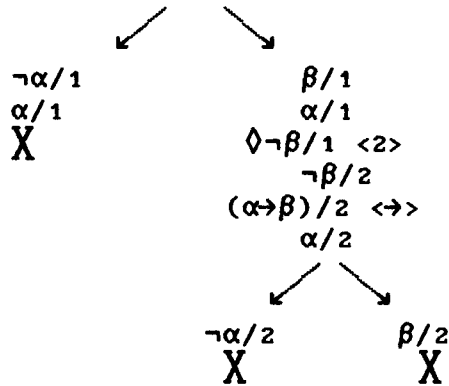
$$\begin{array}{c}
 \neg(\Box\alpha \rightarrow \alpha)/1 \langle \neg \rangle \\
 \Box\alpha/1 \langle 1 \rangle \\
 \neg\alpha/1 \\
 \alpha/1 \\
 \text{X}
 \end{array}$$

[T] o *axioma de la necesidad* es, consecuentemente al árbol desarrollado arriba y a lo expuesto, T-válido, ya que la única secuencia del árbol es cerrada, lo que significa que la fórmula $\neg(\Box\alpha \rightarrow \alpha)$ no tiene ningún T-modelo que la satisfaga.⁷⁰

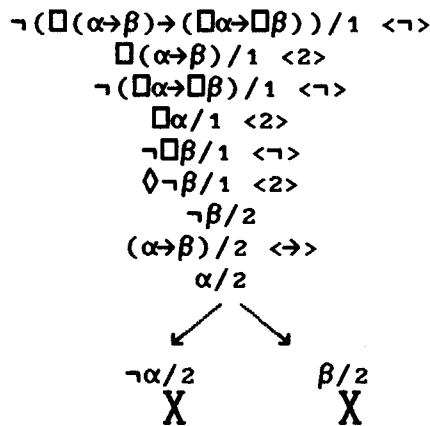
[K] $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

$$\begin{array}{c}
 \neg(\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta))/1 \langle \neg \rangle \\
 \Box(\alpha \rightarrow \beta)/1 \langle 1, 2 \rangle \\
 \neg(\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)/1 \langle \neg \rangle \\
 (\alpha \rightarrow \beta)/1 \langle \rightarrow \rangle \\
 \Box\alpha/1 \langle 1, 2 \rangle \\
 \neg\Box\beta/1 \langle \neg \rangle
 \end{array}$$

⁷⁰ El axioma de la necesidad no sólo es T-válido, sino también B-válido, S4-válido y S5-válido, como se puede comprobar con facilidad. La verdad es que toda fórmula T-válida es B-válida o S4-válida y toda fórmula B-válida o S4-válida es S5-válida, a su vez, sin que se dé tal relación en el sentido contrario. De los sistemas normales de lógica modal, S5 es, evidentemente, el más fuerte, pudiéndose probar la inclusión del resto de los sistemas normales de lógica modal de proposiciones en este último mediante el procedimiento de los árboles semánticos.



Este segundo axioma del sistema T expuesto por FEYS es, evidentemente, el axioma característico del sistema K, el cual, por su simplicidad, sólo es interesante en la medida en que el resto de los sistemas denominados normales son una extensión suya. El árbol para [K], aplicando $(R_K.\Box)$ en lugar de $(R_T.\Box)$, sería el siguiente:



El siguiente es el árbol T de la negación del axioma característico de S4:

[S4] $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$

$$\begin{array}{l}
 \neg(\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha)/1 \langle \neg \rangle \\
 \Box\alpha/1 \langle 1, 2 \rangle \\
 \neg\Box\Box\alpha/1 \langle \neg \rangle \\
 \Diamond\Diamond\neg\alpha/1 \langle 2 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/2 \langle 3 \rangle \\
 \neg\alpha/3 \\
 \alpha/1 \\
 \alpha/2
 \end{array}$$

El árbol se acaba sin que se produzca cierre alguno si se emplea la regla $(R_T.\Box)$, lo que significa que [S4] no es T-válido desde el momento en que se puede establecer a partir de la secuencia abierta un modelo que T-satisface su negación. Sin embargo, se puede ampliar el árbol utilizando la regla $(R_{S4}.\Box)$ en lugar de $(R_T.\Box)$, esto es: marcando la segunda expresión del árbol también con $\langle 3 \rangle$, puesto que si $1 \sim 2$ y $2 \sim 3$ entonces, por la definición 8.5(c), $1 \sim_{S4} 3$, con lo que $\mathcal{A}_{S4} \neg[S4]$ queda del siguiente modo:

$$\begin{array}{l}
 \neg(\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha)/1 \langle \neg \rangle \\
 \Box\alpha/1 \langle 1, 2, 3 \rangle \\
 \neg\Box\Box\alpha/1 \langle \neg \rangle \\
 \Diamond\Diamond\neg\alpha/1 \langle 2 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/2 \langle 3 \rangle \\
 \neg\alpha/3 \\
 \alpha/1 \\
 \alpha/2 \\
 \alpha/3 \\
 X
 \end{array}$$

Otro tanto pasa con $\mathcal{A}_T[B]$, la negación del axioma característico del sistema B:

$$[B] \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha$$

$$\begin{array}{l} \neg(\alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha) / 1 <\neg> \\ \alpha / 1 \\ \neg \Box \Diamond \alpha / 1 <\neg> \\ \Diamond \Box \neg \alpha / 1 <2> \\ \Box \neg \alpha / 2 <2> \\ \neg \alpha / 2 \end{array}$$

$\mathcal{A}_T[B]$ se acaba sin cerrarse, por lo que puede mostrarse un modelo que T-satisface a la negación del axioma característico del sistema B. En realidad no sólo se trata en el caso anterior de $\mathcal{A}_T[B]$, sino que también es $\mathcal{A}_{S4}[B]$, por lo que [B] no es tampoco S4-válida. Lo mismo ocurre si se desarrolla $\mathcal{A}_B[S4]$, por lo que los sistemas S4 y B son independientes entre sí:

$$\begin{array}{l} \neg(\Box \alpha \rightarrow \Box \Box \alpha) / 1 <\neg> \\ \Box \alpha / 1 <1> \\ \neg \Box \Box \alpha / 1 <\neg> \\ \Diamond \Box \neg \alpha / 1 <2> \\ \Diamond \neg \alpha / 2 <3> \\ \neg \alpha / 3 \\ \alpha / 1 \end{array}$$

El siguiente árbol, aplicando $(R_B, \Box)$, sí es una prueba de que $\models_B[B]$:

$$\begin{array}{c}
\neg(\alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha) / 1 \quad \langle \neg \rangle \\
\alpha / 1 \\
\neg \Box \Diamond \alpha / 1 \quad \langle \neg \rangle \\
\Diamond \Box \neg \alpha / 1 \quad \langle 2 \rangle \\
\Box \neg \alpha / 2 \quad \langle 1 \rangle \\
\neg \alpha / 1 \\
X
\end{array}$$

Efectivamente, por la definición 8.5(b), como $1 \sim 2$ entonces $2 \sim 1$ y la expresión $\Box \neg \alpha / 2$ se marca con $\langle 1 \rangle$, dando lugar al cierre.

La S5-validez del axioma característico de S5 se demuestra con el cierre de $\mathcal{A}_{S5} \neg[S5]$, la negación de su axioma característico:

[S5] $\Diamond \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha$

$$\begin{array}{c}
\neg(\Diamond \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha) / 1 \quad \langle \neg \rangle \\
\Diamond \alpha / 1 \quad \langle 2 \rangle \\
\neg \Box \Diamond \alpha / 1 \quad \langle \neg \rangle \\
\alpha / 2 \\
\Diamond \Box \neg \alpha / 1 \quad \langle 3 \rangle \\
\Box \neg \alpha / 3 \quad \langle 1, 2 \rangle \\
\neg \alpha / 1 \\
\neg \alpha / 2 \\
X
\end{array}$$

Un árbol T (o S4 o B), en cambio, no se hubiera cerrado:

$$\begin{array}{c}
\neg(\Diamond \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha) / 1 \quad \langle \neg \rangle \\
\Diamond \alpha / 1 \quad \langle 2 \rangle \\
\neg \Box \Diamond \alpha / 1 \quad \langle \neg \rangle
\end{array}$$

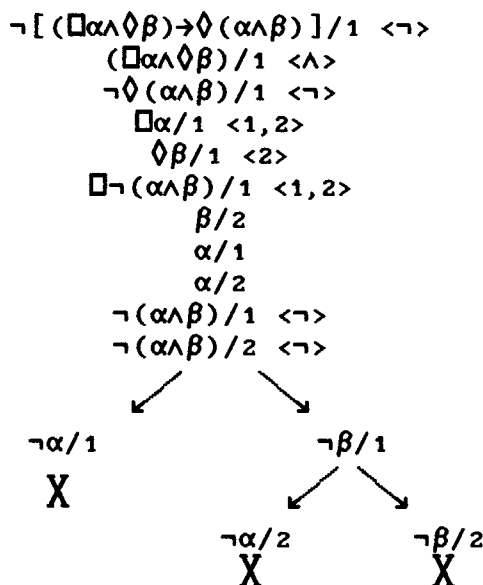
$$\begin{array}{c}
 \alpha/2 \\
 \Diamond \Box \neg \alpha/1 <3> \\
 \Box \neg \alpha/3 <3> \\
 \neg \alpha/3
 \end{array}$$

El sistema S5 es independiente de los demás sistemas normales de lógica modal de proposiciones, pero no así al revés, dándose el caso que [K], [T], [S4] y [B] son teoremas de S5, lo que resulta evidente si se comprueba que todo árbol T, S4 y B es a su vez un árbol S5.

§11. El uso de los árboles semánticos como tablas semánticas.

El procedimiento de los árboles semánticos no sólo permite demostrar la S-validez de aquellas fórmulas que son teoremas de cualquiera de los sistemas lógicos tratados, sino que también es efectivo para otros menesteres tales como obtener un modelo para las fórmulas que son S-satisfactibles o decidir si una fórmula es consecuencia lógica de otra u otras en un determinado sistema. En este último caso el procedimiento es simple si se apela al corolario 2 del teorema 9.2. Sea, por ejemplo, la siguiente demostración de consecuencia lógica mediante el procedimiento de los árboles semánticos:

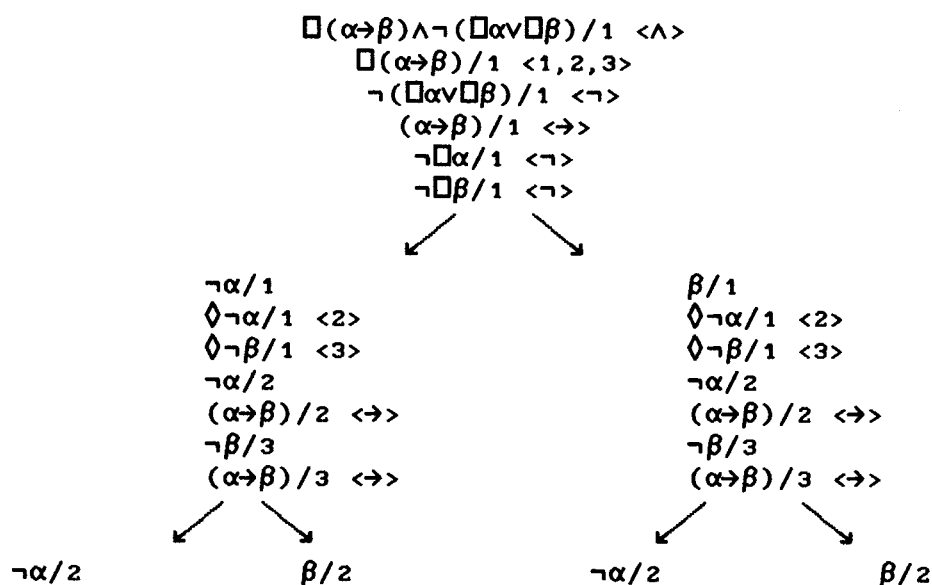
$$\Box\alpha, \Diamond\beta \vdash_T \Diamond(\alpha\wedge\beta)$$

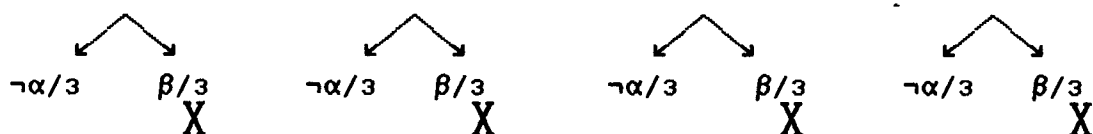


El uso de los árboles semánticos como tablas para obtener modelos de fórmulas S-satisfactibles se fundamenta en la demostración del lema 9.2. Se ha dicho que cuando un árbol tiene todas sus ramas cerradas la fórmula inicial no es S-satisfactible y, por tanto, su negación es universalmente válida. Pero si alguna de las secuencias que componen el árbol no se cierra entonces, merced a lo establecido por el lema 9.1, puede encontrarse un modelo efectivo que S-satisface a la fórmula inicial del siguiente modo: a partir de una de las secuencias abiertas se adjudica cada fórmula que aparezca en la misma a un conjunto modelo

μ_1 , μ_2 , etcétera, según el índice al que se encuentre asociada en el árbol y se marca con un 1 en la tabla (si el signo principal de la fórmula es $\neg$ entonces se coloca en la tabla la fórmula sin la negación, la cual, por la condición (C. $\neg$) en la definición 6.2, no pertenece al mismo conjunto modelo y se marca con un 0 en la tabla); la definición de índices relevantes provee la relación de alternatividad entre conjuntos modelos.

Con estos elementos es fácil establecer un modelo de cualquier fórmula satisfactible en cualquiera de los sistemas normales de lógica modal de proposiciones. Sea, por ejemplo, $\mathcal{A}_T \Box(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg(\Box\alpha \vee \Box\beta)$.

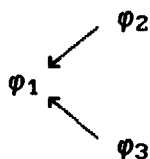




De las ocho secuencias que componen este árbol, cuatro son abiertas; lo que supone que se pueden dar cuatro T-modelos diferentes de la fórmula inicial. Basta con confeccionar cuatro tablas de las que doy una a título de ejemplo:

T	α	β	$(\alpha \rightarrow \beta)$	$\Box \alpha$	$\Box \beta$	$\Diamond \neg \alpha$	$\Diamond \neg \beta$	$(\Box \alpha \vee \Box \beta)$	$\Box (\alpha \rightarrow \beta)$	Σ
μ_1	0	-	1	0	0	1	1	0	1	1
μ_2	0	-	1	-	-	-	-	-	-	-
μ_3	0	0	1	-	-	-	-	-	-	-

Esta tabla corresponde a la primera secuencia abierta por la izquierda en el árbol. Se trata de un T-modelo de la fórmula $\Sigma: \Box(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg(\Box \alpha \vee \Box \beta)$ en el que $\Omega = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle$ y la relación $\mathcal{R}$ posee la propiedad reflexiva, de modo que se puede establecer el siguiente y simple gráfico que explicita la relación de relevancia entre índices en el árbol, estando φ_n por el conjunto de las fórmulas de la secuencia asociadas al índice n :



§12. Árboles semánticos infinitos por causa de la iteración de operadores de modalidad.

Los árboles semánticos son, como se ha visto, secuencias de fórmulas indexadas que se obtienen a partir de una fórmula inicial cualquiera. En esencia, se trata de un procedimiento analítico que *disuelve* en sus componentes básicos una fórmula del lenguaje, pudiéndose prever el desarrollo de la secuencia por la mera forma de la fórmula inicial, ya que es factible diseñar árboles semánticos característicos de tipos diferentes de fórmulas si se las agrupa siguiendo criterios puramente estructurales. Esta observación, por otra parte obvia, tiene interés para el estudio de aquellas secuencias que, en virtud de la aplicación de las reglas de formación (R. $\Box$) y (R. $\Diamond$) se desarrollan infinitamente sin que se dé un cierre efectivo de todas sus ramas o queden todas las expresiones que las componen debidamente marcadas; lo cual significa que se puede encontrar algún tipo de fórmula cuyo árbol ni se

cierra ni se termina, por lo que se hace imposible decidir, apelando al procedimiento descrito, si la fórmula inicial es S-satisfactible o no lo es, así como mostrar un S-modelo efectivo en el caso de que lo fuera.

El método de los árboles semánticos pretende ser decisorio. De hecho, tal y como queda expuesto, es un procedimiento efectivo de decisión para algunos sistemas normales de lógica modal de proposiciones como, por ejemplo, para el sistema modal T, pero falla por lo que respecta a los sistemas S4 y S5, ya que para ambos cabe la posibilidad de encontrar árboles modales que se desarrollan hasta el infinito en el sentido apuntado más arriba. Obsérvese, por ejemplo, $\mathcal{A}_{S4} \neg(\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha)$:⁷¹

$$\begin{array}{l}
 \neg(\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha) / 1 \langle \neg \rangle \\
 \Box\Diamond\alpha / 1 \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle \\
 \neg\Diamond\Box\alpha / 1 \langle \neg \rangle \\
 \Diamond\alpha / 1 \langle 2 \rangle \\
 \Box\Diamond\neg\alpha / 1 \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle \\
 \alpha / 2 \\
 \Diamond\alpha / 2 \langle 3 \rangle
 \end{array}$$

⁷¹ Esta fórmula es usada también como ejemplo por HUGHES & CRESSWELL para ilustrar su regla de las cadenas repetidoras, con el que el aquí expuesto, sugerido por el profesor ALFREDO BURRIEZA, tiene un indudable débito. Cfr. HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.J.: *Introducción a la lógica modal*, pp.: 98-101.

$$\begin{array}{c}
\Diamond \neg \alpha / 1 < 4 > \\
\Diamond \neg \alpha / 2 \\
\alpha / 3 \\
\Diamond \alpha / 3 \\
\Diamond \neg \alpha / 3 \\
\neg \alpha / 4 \\
\Diamond \alpha / 4 \\
\Diamond \neg \alpha / 4 \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots
\end{array}$$

La existencia de secuencias infinitas en S4 y S5 se debe a la proliferación de índices generada por la iteración de operadores modales y a la particular naturaleza de la relación de alternatividad, que es transitiva en ambos sistemas. En general puede mostrarse que si en una secuencia cualquiera $\mathcal{J}$ de un árbol S4 o S5 aparece una fórmula tal que uno o más operadores de posibilidad caen bajo el alcance de uno o más operadores de necesidad o bien $\mathcal{J}$ es cerrada o bien no se termina, desarrollándose indefinidamente.

Efectivamente, las segunda y cuarta fórmulas indexadas de la secuencia anterior son del tipo descrito. De hecho, si se observa la secuencia con detenimiento, son ellas las responsables de que el árbol se prolongue hasta el infinito. Generalizando la estructura de esta secuencia se observa el

La estructura de un árbol S5 infinito es similar aunque algo más compleja puesto que todas las expresiones cuyo signo principal sea el operador $\Box$ han de marcarse con la totalidad de los índices aparecidos en la secuencia.

Lo importante aquí es apreciar que en una secuencia sin fin de este tipo más tarde o más temprano acaban reproduciéndose estructuras anteriormente aparecidas. En el caso anterior, las fórmulas asociadas a los índices m y n son las mismas y, por el desarrollo del árbol, puede preverse que a partir del punto donde ha quedado abandonado se volverá a reproducir una secuencia idéntica de fórmulas asociadas a otro índice aún por aparecer. Estas observaciones llevan a la conclusión de que, interpretados los índices como mundos posibles, si μ_n es una alternativa a μ_m y lo componen exactamente los mismos enunciados que a éste entonces μ_m y μ_n son el mismo mundo posible; o dicho de otro modo, los conjuntos modelos μ_m y μ_n son iguales, puesto que los componen los mismos elementos, lo que hace que la relación R que mantienen pueda reinterpretarse matemáticamente como una relación de igualdad: $\mu_m = \mu_n$. Tal apreciación permite definir una nueva e importante noción referente a los índices que aparecen en una secuencia arbórea:

Definición 12.1: Se dice que un índice j es congruente con otro índice i en la secuencia $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}_{S\alpha}$ (abreviadamente, $i \approx j$) sii $i \sim j$ y para toda fórmula $\gamma \in \mathcal{J}$ asociada a j , γ también está asociada a i .

El concepto de congruencia va a permitir obtener un procedimiento para evitar el decurso infinito de la secuencia mediante la siguiente restricción a las reglas (Rs4.□) y (Rs5.□):⁷³

Restricción: Si $i \approx j$ en la secuencia $\mathcal{J}$ y para toda fórmula $\gamma \in \mathcal{J}$, $\gamma/i \in \mathcal{J}$ y $\gamma/j \in \mathcal{J}$ entonces se escribe el signo $\dagger$

⁷³ DAVIDSON, JACKSON & PARGETTER proponen en su artículo "Modal Trees for T and S5" una regla especial para S5 que evita el decurso hasta el infinito de los árboles para este sistema. Esta regla es, traducida a la terminología empleada por mí, la siguiente:

(Rs5.◇): Si la primera expresión de $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}_{S\alpha}$ no convenientemente marcada es de la forma $\Diamond \beta/i$ entonces se añade a la secuencia $\mathcal{J}$ la expresión β/j , donde j es el menor índice mayor que i no aparecido hasta el momento en la secuencia, excepto en el caso de que ya hubiera en $\mathcal{J}$ una expresión del tipo β/k en cuyo caso $j=k$, y se marca con $\langle j \rangle$.

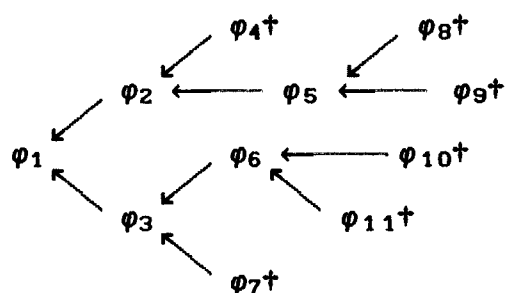
En este sentido cfr. también BURRIEZA, A. & LEÓN, J.C.: "Modal Trees: Correction to a Decision Procedure for S5 (and T)", página 386.

tras cada fórmula $\gamma/j \in \mathcal{S}$ y se la considera marcada a efectos exclusivamente de la propia secuencia $\mathcal{S}$.

De modo que el árbol anterior se desarrollaría de la siguiente guisa:

$$\begin{array}{l}
 \neg(\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha)/1 \langle \neg \rangle \\
 \Box\Diamond\alpha/1 \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rangle \\
 \neg\Diamond\Box\alpha/1 \langle \neg \rangle \\
 \Diamond\alpha/1 \langle 2 \rangle \\
 \Box\Diamond\neg\alpha/1 \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/1 \langle 3 \rangle \\
 \alpha/2 \\
 \Diamond\alpha/2 \langle 4 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/2 \langle 5 \rangle \\
 \neg\alpha/3 \\
 \Diamond\alpha/3 \langle 6 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/3 \langle 7 \rangle \\
 \alpha/4 \dagger \\
 \Diamond\alpha/4 \dagger \\
 \Diamond\neg\alpha/4 \dagger \\
 \neg\alpha/5 \\
 \Diamond\alpha/5 \langle 8 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/5 \langle 9 \rangle \\
 \alpha/6 \\
 \Diamond\alpha/6 \langle 10 \rangle \\
 \Diamond\neg\alpha/6 \langle 11 \rangle \\
 \neg\alpha/7 \dagger \\
 \Diamond\alpha/7 \dagger \\
 \Diamond\neg\alpha/7 \dagger \\
 \alpha/8 \dagger \\
 \Diamond\alpha/8 \dagger \\
 \Diamond\neg\alpha/8 \dagger \\
 \neg\alpha/9 \dagger \\
 \Diamond\alpha/9 \dagger \\
 \Diamond\neg\alpha/9 \dagger \\
 \alpha/10 \dagger \\
 \Diamond\alpha/10 \dagger \\
 \Diamond\neg\alpha/10 \dagger \\
 \neg\alpha/11 \dagger \\
 \Diamond\alpha/11 \dagger \\
 \Diamond\neg\alpha/11 \dagger
 \end{array}$$

El árbol se termina en seguida sin ningún problema y es fácil construir a partir de él un modelo que S4-satisface a la fórmula $\neg(\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha)$. En éste se consideran únicamente cinco mundos posibles: μ_1 , μ_2 , μ_3 , μ_5 y μ_6 , de forma que el siguiente diagrama representa la relación de alternatividad entre ellos a través de la relación de relevancia entre los índices de la secuencia:

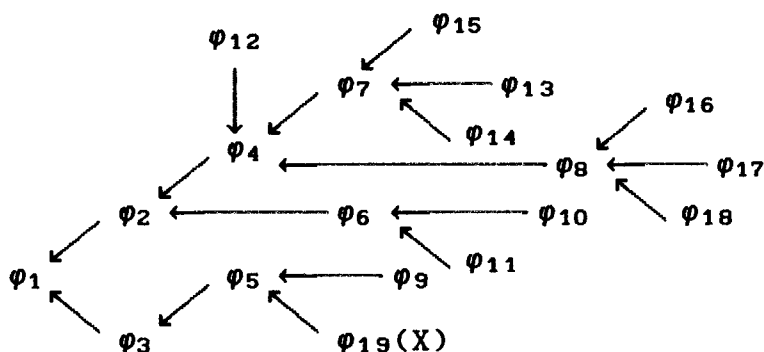


La tabla que sigue, unida al diagrama anterior, provee un S4-modelo para la fórmula $\neg(\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha)$, interpretados los conjuntos φ_1 , φ_2 , etc. como conjuntos modelos:⁷⁴

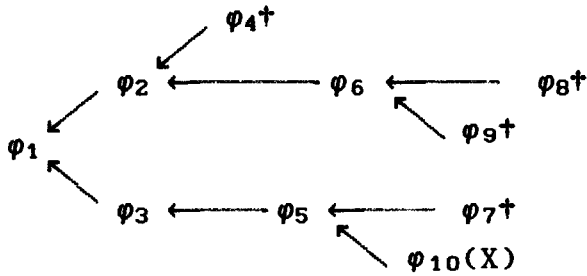
⁷⁴ Los conjuntos de fórmulas seguidos por el signo † no se tienen en cuenta para la confección del modelo que satisface a la fórmula inicial, aunque los coloco en el diagrama para una mejor comprensión del desarrollo del árbol semántico anterior.

S4	α	$\Box\alpha$	$\Diamond\alpha$	$\Box\Diamond\alpha$	$\Diamond\Box\alpha$	$\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha$
μ_1	-	0	1	1	0	0
μ_2	1	0	1	-	-	-
μ_3	0	0	1	-	-	-
μ_5	0	0	1	-	-	-
μ_6	1	0	1	-	-	-

Este procedimiento es útil también para evitar árboles excesivamente complejos en determinadas pruebas de S-validez. Así por ejemplo, en el caso de $\mathcal{A}_{S4} \neg (\Box\Diamond\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha)$, donde es el caso que $\models_{S4} \Box\Diamond\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$, se obtiene el siguiente diagrama de la relación de relevancia si no se aplica la restricción:



En cambio, aplicando la restricción, el diagrama (y, por supuesto, $\mathcal{A}_{S4} \neg (\Box\Diamond\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha)$) se vuelve más simple:



En este caso, los dos diagramas expuestos no pueden considerarse como una representación de la relación de alternatividad puesto que los conjuntos de fórmulas φ_1 , φ_2 , etc. no pueden ser interpretados como conjuntos modelos, al ser el árbol cerrado, lo que se simboliza en los diagramas anteriores mediante el aspa entre paréntesis que aparece justamente al lado del conjunto de fórmulas inconsistente. Aun así, cada diagrama ilustra perfectamente la estructura de las secuencias arbóreas a las que me he referido, al menos a los efectos pertinentes.