

CAPÍTULO TRES:

CONJUNTOS MODELOS.

§6. La noción de conjunto modelo.

Definición 6.1: El conjunto $\mathcal{F}$ de las fórmulas bien formadas (abreviadamente fbfs.) es el más pequeño conjunto de secuencias de signos del lenguaje⁴⁹ que cumple las siguientes condiciones:

A) $\mathcal{A}$ es una fbf.

B) Si t y s son términos⁵⁰ y Q una letra predicativa entonces:

a) $t=s$ es una fbf.

b) $Qt_1t_2\dots t_n$ es una fbf.

C) Si α y β son fbfs. entonces:

⁴⁹ En el capítulo anterior se dio una definición más informal de fórmula, exponiéndose entonces una lista de signos que son los que aquí se asume como signos del lenguaje con la sola adición del signo $\mathcal{A}$.

⁵⁰ Un término es una variable individual o una constante individual.

- a) $\neg\alpha$ es una fbf.
- b) $\alpha\wedge\beta$ es una fbf.
- c) $\alpha\vee\beta$ es una fbf.
- d) $\alpha\Rightarrow\beta$ es una fbf.

D) Si $\alpha(x)$ es una fbf. entonces:

- a) $\Lambda x\alpha(x)$ es una fbf.
- b) $\forall x\alpha(x)$ es una fbf.

E) Toda fbf. precedida por un operador modal es también una fbf.

F) Nada más es una fbf.

Definición 6.2: Un conjunto modelo (que será designado por una de las letras minúsculas del alfabeto griego λ, μ, ν , susceptibles de llevar subíndice) es un conjunto no vacío de fórmulas sin variables libres⁵¹ que satisface las siguientes condiciones:

- (C. $\mathcal{A}$): Para todo $\mu \in \Omega$, $\mathcal{A}\mu$.
- (C. $\neg$): Si $\alpha \in \mu$ entonces $\neg\alpha \notin \mu$.
- (C. $\vee$): Si $(\alpha\vee\beta) \in \mu$ entonces $\alpha \in \mu$ o $\beta \in \mu$.
- (C. $\wedge$): Si $(\alpha\wedge\beta) \in \mu$ entonces $\alpha \in \mu$ y $\beta \in \mu$.

⁵¹ En lo sucesivo se usará el término sentencia como sinónimo de fórmula sin variables libres.

- (C. $\rightarrow$): Si $(\alpha \rightarrow \beta) \in \mu$ entonces $\neg \alpha \in \mu$ o $\beta \in \mu$.
- (C. $=$): Si $\alpha(a) \in \mu$ y $(a=b) \in \mu$ entonces $\alpha(b) \in \mu$.
- (C.V): Si $\forall x \alpha(x) \in \mu$ entonces $\alpha(b) \in \mu$ para al menos una constante individual $b \in \mathcal{D}(\mu)$.
- (C. $\wedge$): Si $\wedge x \alpha(x) \in \mu$ entonces $\alpha(b) \in \mu$ para toda constante individual $b \in \mathcal{D}(\mu)$.
- (C. $\Diamond$): Si $\Diamond \alpha \in \mu$ entonces hay al menos un $\lambda \in \mu$ tal que $\mu \lambda$ y $\alpha \in \lambda$.
- (C. $\Box$): Si $\Box \alpha \in \mu$ y si $\lambda \in \mu$ y $\mu \lambda$ entonces $\alpha \in \lambda$.

Definición 6.3: Una clase modelo Ω es un conjunto no vacío de conjuntos modelos.

Definición 6.4: Un sistema modelo (S-modelo) es una cuádrupla ordenada $\langle \Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \succ \rangle$ ⁵² donde Ω es una clase modelo, $\mathcal{R}$

⁵² JAAKKO HINTIKKA, a quien debo los conceptos y la terminología usados, define un sistema modelo como un par ordenado $\langle \Omega, \mathcal{R} \rangle$. Yo he optado por añadir a la definición, con la idea de hacerla más versátil, un dominio $\mathcal{D}$, que no es relevante para la lógica modal de proposiciones pero que sí será un elemento importante para la lógica modal de predicados, y la relación $\succ$ -evidentemente emparentada con el conjunto $\mathcal{E}$ de las condiciones que aparecen en la definición de conjunto modelo-, en el mismo sentido en que S. KRIPKE define sus *estructuras modelos*, pero sin restringir a un conjunto modelo cualquiera el primero de los elementos de la tripla ordenada. De este modo queda abierta la posibilidad de la adición o modificación de tales

es una relación llamada de alternatividad que se establece entre los conjuntos modelos pertenecientes a Ω de modo que $\mathcal{R} \subseteq \Omega^2$, $\mathcal{D}$ es una función definida en Ω tal que, para cada conjunto modelo $\mu \in \Omega$, $\mathcal{D}(\mu)$ es el conjunto de las constantes individuales que aparecen en las fórmulas de μ y $\succ$ es una relación que se establece entre los elementos de Ω y del conjunto $\mathcal{F}$ de las fbfs. tal que:

$$\mu \vdash \alpha \text{ sii } \alpha \in \mu;$$

$$\mu \vdash \neg \alpha \text{ sii no } \mu \vdash \alpha;$$

$$\mu \vdash \neg(a=a) \text{ sii } \mu \vdash \perp;$$

$$\mu \vdash \alpha \wedge \beta \text{ sii } \mu \vdash \alpha \text{ y } \mu \vdash \beta;$$

$$\mu \vdash \alpha \vee \beta \text{ sii } \mu \vdash \alpha \text{ ó } \mu \vdash \beta;$$

$$\mu \vdash \alpha \rightarrow \beta \text{ sii } \mu \vdash \neg \alpha \text{ ó } \mu \vdash \beta;$$

$$\mu \vdash (a=b) \text{ sii } \mu \vdash \alpha(a) \leftrightarrow \alpha(b);^{53}$$

$$\mu \vdash \forall x \alpha(x) \text{ sii } \mu \vdash \alpha(b) \text{ para algún } b \in \mathcal{D}(\mu);$$

condiciones, lo que permitirá extender sin problemas esta teoría semántica a otros ámbitos intensionales, como el epistémico, el deóntico o el temporal, o incluso a otras concepciones no clásicas de los signos constantes lógicos. Cfr. HINTIKKA, J.: *Models for Modalities*, página 61, KRIPKE, S.: "Semantical analysis of modal logic I: Normal modal propositional calculi", páginas 68ss. así como "Semantical analysis of modal logic II: Non-normal modal propositional calculi", pp.: 206-220 y también FITTING, M.: "Tableau Methods of Proof for Modal Logics", página 238.

⁵³ La fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una abreviatura de $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

$\mu \vdash \Lambda x \alpha(x)$ sii $\mu \vdash \alpha(b)$ para todo $b \in \mathcal{D}(\mu)$;

$\mu \vdash \Diamond \alpha$ sii $\exists \lambda \in \Omega$ $\mu \mathcal{R} \lambda$ y $\lambda \vdash \alpha$;

$\mu \vdash \Box \alpha$ sii $\forall \lambda \in \Omega$ $\mu \mathcal{R} \lambda$, $\lambda \vdash \alpha$.

No debe confundirse un S-modelo con un modelo que satisface una fórmula. En general, un S-modelo no es una interpretación, sino un marco general para las interpretaciones semánticas de los enunciados modales. Dicho de otro modo, un S-modelo es un sistema de conjuntos modelos relacionados entre sí y son precisamente los conjuntos modelos (en tanto que pertenecientes a una clase modelo) los que *determinan* un modelo para un enunciado concreto; el S-modelo *provee* de interpretaciones pero no es él mismo una interpretación. Si así no fuera, sería fácil despojar de toda relevancia lógica a los operadores modales. Por ejemplo, si se dijera siguiendo la definición de S-validez que el enunciado

$$(12) \quad \Box \forall x \alpha(x)$$

es válido sii para toda interpretación $\exists \mathcal{I} \forall x \alpha(x)_{\mathcal{I}} = 1$, se estaría tratando el operador modal de necesidad en el mismo sentido en el que se dice que el enunciado modalizado es válido. Esto significa que (12) sería lo mismo que

(12') $\models Vx\alpha(x);$

y en verdad para ese viaje no se necesitaban tales alforjas.⁵⁴

Definición 6.5: Una fórmula α es S-satisfactible sii para algún S-modelo hay un $\mu \in \Omega$ tal que $\alpha \in \mu$.

Definición 6.6: Una fórmula α es S-válida (abreviadamente $\models_S \alpha$) sii para todo S-modelo y para todo conjunto modelo $\mu \in \Omega$, $\alpha \in \mu$.

⁵⁴ Creo que de algún modo RUDOLF CARNAP comete este error en *Meaning and Necessity*. Allí propone interpretar la necesidad lógica en función de su concepto de *L-verdad* y dice: «39-1. Para cualquier sentencia '...', 'N(...)' es verdadera si y sólo si '...' es L-verdadera» (página 174). Pero si se tiene en cuenta que al comienzo del libro (página 8) definió el concepto L-verdadero diciendo que «L-verdadero se utiliza como un *explicatum* de lo que Leibniz llamó verdad necesaria y Kant verdad analítica», lo que traslada luego (página 10) a la teoría de modelos mediante la siguiente definición: «Una sentencia G_i es L-verdadera (en S_1) $\equiv_{df}$ G_i vale en toda descripción de estado (en S_1)» -que es lo mismo que decir que G_i es satisfactible por cualquier modelo (siempre en S_1)-, entonces se comprueba que efectivamente para CARNAP la necesidad lógica y el concepto de analiticidad o universal validez son lo mismo, con lo que el operador de necesidad N y el signo $\models$ se confunden.

Definición 6.7: Una fórmula α es consecuencia lógica de un conjunto no vacío de fórmulas Γ en el sistema S (abreviadamente $\Gamma \vdash_S \alpha$) si hay una fórmula γ que es la fórmula que se consigue al conjuntar mediante el signo $\wedge$ todas las fórmulas de un subconjunto finito $\Gamma' \subset \Gamma$ tal que $\vdash_S \gamma \rightarrow \alpha$.

Con el aparato semántico descrito es fácil dar cuenta de los sistemas axiomáticos más importantes de la lógica modal. En concreto, de los denominados sistemas normales de lógica modal, por cuyos sistemas modelos se interesa principalmente este trabajo puesto que permiten una aproximación global a problemas relacionados con la teoría de la referencia, la teoría de las normas y la epistemología.

Sea un conjunto de axiomas cualquiera para la lógica de proposiciones similar al de la base axiomática de los *Principia Mathematica* {PM} y los siguientes axiomas y reglas de inferencia:

[K]: $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

[D]: $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$

[T]: $\Box\alpha \rightarrow \alpha$

[B]: $\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$

- [S4]: $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$
- [S5]: $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$
- (MP): $\vdash\alpha, \vdash\alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash\beta$
- (N): $\vdash\alpha \Rightarrow \vdash\Box\alpha$
- (E): $\vdash\alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \vdash\Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta$

KRIPKE denomina *sistema normal de lógica modal* a todo aquél que sea una extensión del sistema cuya base axiomática es la siguiente:

$$\{PM\} + [K] + [T] + (MP) + (N).^{55}$$

En general se puede decir que un sistema normal de lógica modal es toda extensión del sistema K que sea cerrada respecto de la regla (N) de necesariedad. Esto deja a un lado el sistema estándar de lógica deóntica D, cuya base axiomática se define por:

⁵⁵ Cfr. KRIPKE, S.: "Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi", pp.: 67-69 y "Semantical Analysis of Modal Logic II: Non-Normal Modal Propositional Calculi", pp.: 207-209.

{PM}+[K]+[D]+(MP)+(E),⁵⁶

pero no a los denominados sistemas básicos de lógica deóntica, cuyo principal exponente es el sistema KD, que sí son cerrados respecto de (N).⁵⁷

Volviendo a la semántica descrita, determinados cambios en la definición de la relación diádica $\mathcal{R}$, por ejemplo, aportarían diferentes sistemas modelos de acuerdo con los principales sistemas axiomáticos normales. Con $\mathcal{R}$ reflexiva se obtiene un S-modelo que conviene al sistema T propuesto por FEYS en 1937 (así como al sistema M de VON WRIGHT,

⁵⁶ En el capítulo siete se trata con más detalle el sistema estándar de lógica deóntica.

⁵⁷ La semántica de los sistemas normales es especialmente atractiva para el estudio de los problemas de referencialidad en lenguajes intensionales. Por otra parte, estos sistemas incluyen aquellos axiomas y teoremas más interesantes para una primera aproximación a la lógica deóntica y a la lógica epistémica desde una perspectiva filosófica. En efecto, los axiomas [K]+[D] dan lugar, como se ha dicho, a lo que se denomina *sistemas básicos de lógica deóntica*, en tanto que si se los complementa con [S4] o con [S5] -esto es, si se toma como base axiomática [K]+[D]+[S4] o bien [K]+[D]+[S5]- se obtienen diversas lógicas de la creencia. Del mismo modo, [K]+[T] fundamentan los sistemas de lógica modal alética y con [S4] o con [B] (o [S5] en su lugar) proveen de sistemas para la lógica epistémica o del conocimiento.

equivalente a T como demostró en 1953 SOBOCIŃSKI).⁵⁸ Igualmente, si $\mathcal{R}$ es reflexiva y transitiva se obtiene un S-modelo semántico del sistema axiomático propuesto por LEWIS en 1932 que conocemos como S4, y si es reflexiva y simétrica se tiene el sistema B (o *Sistema Brouweriano*) propuesto por KRIPKE en 1963. Del mismo modo, si $\mathcal{R}$ es euclidiana (o, paralelamente, reflexiva, simétrica y transitiva) se tiene el equivalente semántico de S5 de LEWIS, etcétera. El siguiente cuadro ofrece la definición de la relación de alternatividad para algunos de los sistemas modales normales más importantes:

⁵⁸ Cfr. R. FEYS: "Les logiques nouvelles des modalités"; G.H. VON WRIGHT: *An Essay in Modal Logic*; B. SOBOCIŃSKI: "Note on a modal system of Feys-Von Wright".

Sistema.	Propiedad.	Cláusulas que cumple la relación.
K	—	—
KD	Serialidad	$\forall \lambda \exists \mu (\lambda \mathcal{R} \mu)$
T	Reflexividad	$\forall \mu (\mu \mathcal{R} \mu)$
B	Reflexividad Simetría	$\forall \mu (\mu \mathcal{R} \mu)$ $\forall \lambda \mu (\lambda \mathcal{R} \mu \rightarrow \mu \mathcal{R} \lambda)$
S4	Reflexividad Transitividad	$\forall \mu (\mu \mathcal{R} \mu)$ $\forall \lambda \mu \nu (\lambda \mathcal{R} \mu \ \& \ \mu \mathcal{R} \nu \rightarrow \lambda \mathcal{R} \nu)$
S5	Euclidianidad	$\forall \lambda \mu \nu (\lambda \mathcal{R} \mu \ \& \ \lambda \mathcal{R} \nu \rightarrow \mu \mathcal{R} \nu)$

Cada uno de los S-modelos semánticos que surgen de definir en un sentido o en otro la relación de alternatividad como en el cuadro anterior puede recibir el nombre, respectivamente, de K-modelo, T-modelo (o M-modelo), D-modelo, y así sucesivamente.⁵⁹

⁵⁹ Se puede pensar de forma análoga en los S-modelos correspondientes a otros sistemas axiomáticos de lógica

§7. Algunos resultados con conjuntos modelos y mundos posibles.

Teorema 7.1, (Lema de Hintikka): *Todo conjunto modelo μ es simultáneamente S-satisfactible.*

Demostración: El teorema es evidente por la definiciones de conjunto modelo y S-satisfactibilidad. Sea $\langle \Omega, \mathcal{R}, D, \succ \rangle$ un S-modelo cualquiera tal que $\mu \in \Omega$. Luego para todo $\alpha \in \mu$, α es S-satisfactible por la definición 6.5.

Definición 7.1: Un conjunto Γ finito de fórmulas es semánticamente consistente sii es simultáneamente S-satisfactible.

modal modificando Ω mediante la introducción de cambios, bien en la definición de $\mathcal{R}$, bien en el conjunto $\mathcal{E}$. Así, por ejemplo, J. HINTIKKA ofrece en *Models for Modalities*, pp.: 60-61, las siguientes condiciones como las propias de un sistema semántico equivalente a M:

- (C.M^{*}): Si $\exists \alpha \in \mu \in \Omega$ entonces hay en Ω al menos un conjunto modelo λ alternativo a μ tal que $\alpha \in \lambda$.
 (C.N): Si $\forall \alpha \in \mu$ entonces $\alpha \in \mu$.
 (C.N⁺): Si $\forall \alpha \in \mu \in \Omega$ y si $\lambda \in \Omega$ y λ es alternativo a μ entonces $\alpha \in \lambda$.
-

Definición 7.2: Un conjunto máximamente consistente en sentido semántico $\mathcal{M}$ es un conjunto de fórmulas semánticamente consistente y ejemplificado (es decir, para toda fbf. de la forma $\forall x\delta(x)$, si $\forall x\delta(x) \in \mathcal{M}$ entonces hay al menos una constante individual b tal que $\delta(b) \in \mathcal{M}$) tal que ninguna extensión propia de $\mathcal{M}$ es semánticamente consistente.⁶⁰

Definición 7.3: Un conjunto veritativo $\mathcal{V}$ es un conjunto de sentencias tal que para cualesquiera sentencias α y β :

- a) $\perp \notin \mathcal{V}$;
- b) $\alpha \in \mathcal{V}$ sii $\neg\alpha \notin \mathcal{V}$;
- c) $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{V}$ sii $\alpha \in \mathcal{V}$ o $\beta \in \mathcal{V}$;
- d) $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{V}$ sii $\alpha \in \mathcal{V}$ y $\beta \in \mathcal{V}$;
- e) $(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{V}$ sii $\neg\alpha \in \mathcal{V}$ o $\beta \in \mathcal{V}$;
- f) $\forall x\alpha(x) \in \mathcal{V}$ sii hay al menos una constante individual b tal que $\alpha(b) \in \mathcal{V}$;
- g) $\Lambda x\alpha(x) \in \mathcal{V}$ sii para toda constante individual

⁶⁰ Por una extensión propia de $\mathcal{M}$ se entiende la adición de una fórmula cualquiera γ tal que $\gamma \notin \mathcal{M}$. Se puede observar que todo mundo posible, tal y como fue definido en el capítulo anterior, es el *descriptum* de un conjunto de sentencias máximamente consistente en sentido semántico.

$b, \alpha(b) \in \mathcal{V}$;

h) $\Diamond \alpha \in \mathcal{V}$ sii, para algún conjunto veritativo $\mathcal{V}'$ tal que $\{\Diamond \delta \mid \delta \in \mathcal{V}'\} \subseteq \mathcal{V}, \alpha \in \mathcal{V}'$;

i) $\Box \alpha \in \mathcal{V}$ sii, para todo conjunto veritativo $\mathcal{V}'$ tal que $\{\delta \mid \Box \delta \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{V}', \alpha \in \mathcal{V}'$.

Lema 7.1: *Para todo conjunto modelo μ hay un conjunto veritativo $\mathcal{V}$ tal que $\mu \subseteq \mathcal{V}$.*

Demostración: Extendiendo el conjunto modelo μ a un conjunto veritativo.

Sean $A = \langle \alpha_1, \dots \rangle$ la secuencia de todas las fórmulas de $\mathcal{F}$ con una y sólo una variable libre, $P = \langle a_1, \dots \rangle$ la secuencia de todos los parámetros que no ocurren en μ y $B = \langle \beta_1, \dots \rangle$ la secuencia de todas las sentencias del lenguaje.

Sea $\mathcal{V}_w = \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 \cup \dots$, donde $\mathcal{V}_0 = \mu$ y $\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{V}_n \cup \{\forall x \delta(x) \rightarrow \delta(b/x)\}$, siendo δ la n -ésima fórmula de A y b el primer parámetro de P que no está ni en $\mathcal{V}_n$ ni en δ .

Sea $\mathcal{V}^w = \mathcal{V}^0 \cup \mathcal{V}^1 \cup \dots$, donde $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}_w$ y $\mathcal{V}^{n+1} = \mathcal{V}^n \cup \{\beta_n\}$ si no $\mathcal{V}^n \models_S \neg \beta_n$ o bien $\mathcal{V}^{n+1} = \mathcal{V}^n$ en caso contrario, siendo β_n la n -ésima sentencia de B .

Se obtiene de este modo un conjunto $\mathcal{V}^w$ del que se puede probar:

1° $\mathcal{V}^w$ es simultáneamente S -satisfactible. En efecto, $\mathcal{V}_0$

es simultáneamente S-satisfactible por el teorema 7.1. Ahora bien, si $\mathcal{V}_n$ es simultáneamente S-satisfactible entonces $\mathcal{V}_{n+1}$ también lo es. Supóngase que $\mathcal{V}_{n+1}$ no es simultáneamente S-satisfactible. Entonces, como por hipótesis $\mathcal{V}_n$ sí lo es, es que $\mathcal{V}_n \models_S \neg(\forall x \delta(x) \rightarrow \delta(b/x))$. Por tanto, $\mathcal{V}_n \models_S \forall x \delta(x)$ y $\mathcal{V}_n \models_S \neg \delta(b/x)$. Pero, como b es un parámetro nuevo con respecto a $\mathcal{V}_n$ y δ , entonces se tiene que $\mathcal{V}_n \models_S \wedge x \neg \delta(x)$ y de aquí que $\mathcal{V}_n \models_S \neg \forall x \delta(x)$, lo que hace que $\mathcal{V}_n$ no sea simultáneamente S-satisfactible, contra la hipótesis. De todo esto se sigue que $\mathcal{V}_w$ es simultáneamente S-satisfactible y por tanto lo es $\mathcal{V}^0$, por definición. Basta entonces con demostrar que si $\mathcal{V}^n$ es simultáneamente S-satisfactible también lo es $\mathcal{V}^{n+1}$, lo que es evidente por el propio proceso de construcción.

2° $\mathcal{V}^w$ es un conjunto veritativo. En efecto:

- a) $\mathcal{A} \notin \mathcal{V}^w$, puesto que $\mathcal{V}^w$ es simultáneamente S-satisfactible.
- b) $\alpha \in \mathcal{V}^w$ sii $\neg \alpha \notin \mathcal{V}^w$, puesto que, en el supuesto de que $\alpha \in \mathcal{V}^w$ entonces, si también $\neg \alpha \in \mathcal{V}^w$ entonces $\mathcal{V}^w$ no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a la hipótesis, y en el supuesto de que $\neg \alpha \notin \mathcal{V}^w$ entonces, por el criterio de construcción de $\mathcal{V}^w$, $\alpha \in \mathcal{V}^w$.

c) $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{V}^w$ sii $\alpha \in \mathcal{V}^w$ o $\beta \in \mathcal{V}^w$, puesto que en el supuesto de que $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{V}^w$, si $\alpha \notin \mathcal{V}^w$ y $\beta \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg \alpha \in \mathcal{V}^w$ y $\neg \beta \in \mathcal{V}^w$; luego $\mathcal{V}^w \models_S \neg \beta$. Pero es evidente que $(\alpha \vee \beta), \neg \alpha \models_S \beta$ y por tanto $\mathcal{V}^w$ no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo ya demostrado. Y en el supuesto de que $\alpha \in \mathcal{V}^w$ o $\beta \in \mathcal{V}^w$, si $(\alpha \vee \beta) \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{V}^w$ y por tanto $\mathcal{V}^w \models_S \neg(\alpha \vee \beta)$; pero $\alpha \models_S (\alpha \vee \beta)$ y nuevamente $\mathcal{V}^w$ no sería simultáneamente S-satisfactible.

d) $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{V}^w$ sii $\alpha \in \mathcal{V}^w$ y $\beta \in \mathcal{V}^w$, puesto que en el supuesto de que $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{V}^w$, si $\alpha \notin \mathcal{V}^w$ o $\beta \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg \alpha \in \mathcal{V}^w$ o $\neg \beta \in \mathcal{V}^w$; luego $\mathcal{V}^w \models_S \neg \beta$ o $\mathcal{V}^w \models_S \neg \alpha$, aunque es evidente que $(\alpha \wedge \beta) \models_S \alpha$ y $(\alpha \wedge \beta) \models_S \beta$, por lo que $\mathcal{V}^w$ no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo ya demostrado. Y en el supuesto de que $\alpha \in \mathcal{V}^w$ y $\beta \in \mathcal{V}^w$, si $(\alpha \wedge \beta) \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{V}^w$ y por tanto $\mathcal{V}^w \models_S \neg(\alpha \wedge \beta)$; pero $\alpha, \beta \models_S (\alpha \wedge \beta)$ y nuevamente $\mathcal{V}^w$ no sería simultáneamente S-satisfactible.

e) $(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{V}^w$ sii $\neg \alpha \in \mathcal{V}^w$ o $\beta \in \mathcal{V}^w$, puesto que en el supuesto de que $(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{V}^w$, si $\neg \alpha \notin \mathcal{V}^w$ y $\beta \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\alpha \in \mathcal{V}^w$ y $\neg \beta \in \mathcal{V}^w$; luego $\mathcal{V}^w \models_S \neg \beta$. Pero es evidente que $(\alpha \rightarrow \beta), \alpha \models_S \beta$ y por tanto $\mathcal{V}^w$ no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo que ya ha sido demostrado. Y en el supuesto de que $\neg \alpha \in \mathcal{V}^w$ o

$\beta \in \mathcal{V}^w$, si $(\alpha \rightarrow \beta) \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{V}^w$ y por tanto $\mathcal{V}^w \models_S \neg(\alpha \rightarrow \beta)$; pero $\neg\alpha \models_S (\neg\alpha \vee \beta)$, o lo que es lo mismo $\mathcal{V}^w \models_S (\alpha \rightarrow \beta)$ y nuevamente $\mathcal{V}^w$ no sería simultáneamente S-satisfactible.

f) $\forall x \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$ sii hay al menos una constante individual b tal que $\alpha(b) \in \mathcal{V}^w$, puesto que en el caso de que $\forall x \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$, por el criterio de construcción debe haber al menos una fórmula del tipo $\forall x \alpha(x) \rightarrow \alpha(b) \in \mathcal{V}^w$, y por tanto $\mathcal{V}^w \models_S \alpha(b)$; y en el caso de que $\alpha(b) \in \mathcal{V}^w$, si $\forall x \alpha(x) \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg \forall x \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$ y, por tanto, $\wedge x \neg \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$, de donde $\mathcal{V}^w \models_S \neg \alpha(b)$, y $\mathcal{V}^w$ no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo establecido.

g) $\wedge x \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$ sii para toda constante individual, $\alpha(b) \in \mathcal{V}^w$, puesto que en el caso de que $\wedge x \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$ entonces $\mathcal{V}^w \models_S \alpha(b)$; y en el caso de que $\alpha(b) \in \mathcal{V}^w$, si $\wedge x \alpha(x) \notin \mathcal{V}^w$ entonces $\neg \wedge x \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$ y, por tanto, $\vee x \neg \alpha(x) \in \mathcal{V}^w$, de donde $\mathcal{V}^w \models_S \neg \alpha(b)$ por el propio criterio de construcción, y $\mathcal{V}^w$ no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo establecido.

h) $\Diamond \alpha \in \mathcal{V}^w$ sii, para algún conjunto veritativo $\mathcal{V}$ tal que $\{\Diamond \delta \mid \delta \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{V}^w$, $\alpha \in \mathcal{V}$, puesto que en el caso de que $\Diamond \alpha \in \mathcal{V}^w$, si, para todo conjunto veritativo $\mathcal{V}$ como el

caracterizado, $\alpha \notin \mathcal{V}$ entonces $\neg\alpha \in \mathcal{V}^w$. Por tanto, $\mathcal{V}^w \models_S \neg\alpha$, lo que significa, por la definición 6.6 que para todo conjunto $\mu \in \Omega$ $\neg\alpha \in \mu$. Luego $\mathcal{V}^w \models_S \Box\neg\alpha$ y de aquí que $\mathcal{V}^w \models_S \neg\Diamond\alpha$, no siendo $\mathcal{V}^w$ S-satisfactible. Por otra parte, si hay un conjunto veritativo $\mathcal{V}$ del tipo descrito con respecto a $\mathcal{V}^w$ tal que $\alpha \in \mathcal{V}$ entonces $\Diamond\alpha \in \mathcal{V}^w$.

i) $\Box\alpha \in \mathcal{V}^w$ sii, para todo conjunto veritativo $\mathcal{V}$ tal que $\{\delta \mid \Box\delta \in \mathcal{V}^w\} \subseteq \mathcal{V}$, $\alpha \in \mathcal{V}$, puesto que si $\Box\alpha \in \mathcal{V}^w$ entonces, por la propia caracterización del conjunto veritativo $\mathcal{V}$, $\alpha \in \mathcal{V}$. Por otro lado, si para todo conjunto veritativo $\mathcal{V}$ del tipo descrito $\alpha \in \mathcal{V}$ entonces $\mathcal{V}^w \models_S \alpha$ y, por la definición 6.6, $\mathcal{V}^w \models_S \Box\alpha$ y por tanto $\Box\alpha \in \mathcal{V}^w$.

Corolario: *Todo conjunto veritativo $\mathcal{V}^w$ es un conjunto máximamente consistente en sentido semántico $\mathcal{M}$.*

Lema 7.2, (Lema de Lindenbaum): *Todo conjunto modelo μ es un subconjunto de algún conjunto máximamente consistente en sentido semántico $\mathcal{M}$.*

Demostración: La demostración es directa a partir del lema 7.1 y su corolario.

Teorema 7.2, (Teorema de compacidad): *Dado un conjunto (finito o infinito) de fórmulas Γ , si para todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subset \Gamma$, Γ_0 es simultáneamente S-satisfactible entonces Γ es simultáneamente S-satisfactible.*

Demostración: Sea Γ_0 un subconjunto finito cualquiera de Γ . Como por hipótesis Γ_0 es simultáneamente S-satisfactible entonces, por el teorema 7.1, Γ_0 puede ser extendido a un conjunto modelo. Por tanto, por el lema 7.2, hay un conjunto máximamente consistente en sentido semántico $\mathcal{M}$, obtenido por el mismo procedimiento por el que se obtiene el conjunto $\mathcal{V}^w$ más arriba con la salvedad de que en este caso $A = \langle \alpha_1, \dots \rangle$ es la secuencia de todas las fórmulas de Γ con una y sólo una variable libre, $P = \langle a_1, \dots \rangle$ la secuencia de todos los parámetros que no ocurren en Γ_0 y $B = \langle \langle \gamma_1, \dots \rangle, \beta_1, \dots \rangle$ la secuencia de todas las sentencias del lenguaje cuyo primer elemento es la secuencia de todas las sentencias de Γ , tal que $\Gamma_0 \subset \Gamma \subseteq \mathcal{M}$, por lo que Γ es al menos consistente en sentido semántico y por lo tanto, atendiendo a la definición 7.1, Γ es simultáneamente S-satisfactible.