

CAPÍTULO UNO:

BREVE RESEÑA HISTÓRICA ACERCA DE LA LÓGICA MODAL.

§1. Las modalidades en la antigüedad y en la Edad Media.

El término "modalidad" significa la forma o modo en que algo es. En el contexto lógico hace referencia a la forma de ser un enunciado, dicho así, en un sentido amplio. Pero lo que en última instancia viene a significar la modalidad en lógica, como se verá más adelante, es que la evaluación de los enunciados modales ha de realizarse no sólo en función de su acción descriptiva de la realidad, en tanto que se adecuen a ella, sino también en función de una especie de *autorreferencia* que se da por el hecho de que los operadores modales indican -de un modo que habrá de ser determinado- la relación que el enunciado modalizado, esto es, el enunciado que cae bajo el alcance de un operador modal, mantiene con otros enunciados de la teoría.

La precedente definición de modalidad es, hasta cierto punto, confusa, probablemente porque al exponerla tal cual

se hayan dado por supuestos muchos de los problemas de índole filosófica que se encuentran involucrados desde antiguo en el estudio de los modos. Sin embargo, sirve ahora porque de ella se siguen dos aspectos importantes para entender la naturaleza lógica de las modalidades; a saber: que los enunciados modales no son enunciados puramente referenciales ya que no se limitan a describir una realidad sino que al mismo tiempo dicen desde una perspectiva lógica cómo es esa descripción¹ y que una semántica para la lógica de los enunciados modales exige establecer relaciones de dependencia entre el valor de la función de verdad correspondiente a cada enunciado y el valor de la función de verdad que corresponde a otros enunciados pertenecientes al mismo sistema. De igual modo, adelanta mi actitud a la hora de considerar formalmente los conceptos modales, pues queda claro que opto por tratarlos como operadores en el mismo sentido en que la cuantificación es tratada en la lógica de predicados de primer orden.²

¹ Esta definición de la modalidad parece que dejara a un lado las modalidades llamadas *de re* para tener en cuenta sólo las modalidades *de dicto*. En efecto, algo de esto hay si se puede, como así es mi parecer, reducir las modalidades *de re* a las *de dicto*.

² Esta puntualización tiene más que ver con la filosofía de

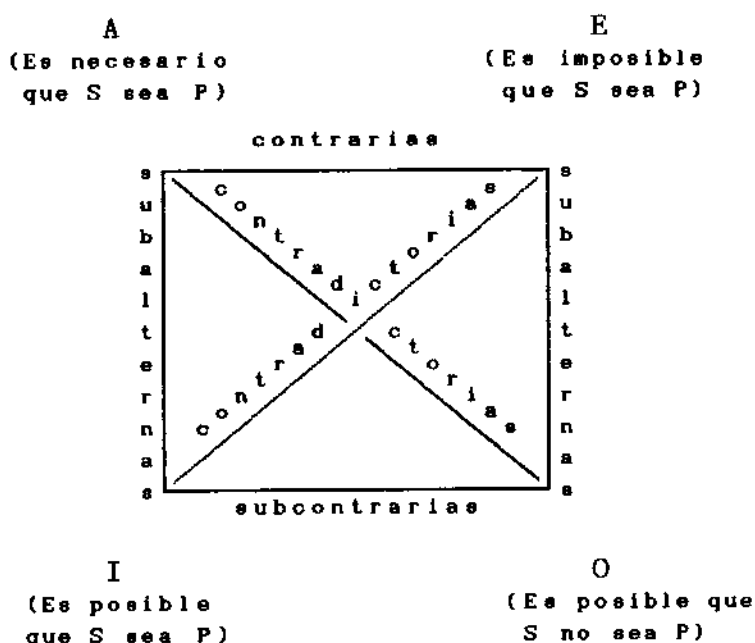
Sin embargo, es conveniente hacer algunas acotaciones históricas al significado y el uso lógico de las modalidades antes de tratar los aspectos más importantes que aportan al análisis lógico de los lenguajes naturales.

La lógica modal es una parte menos conocida de la obra lógica de ARISTÓTELES, probablemente porque sus comentaristas dedicaron un mayor esfuerzo a describir los mecanismos de la silogística asertórica. En los *Analíticos*, obra cumbre de la lógica en la antigüedad clásica, empero, se apuntan también las formas del silogismo modal, que más tarde, en la Edad Media, a tenor sin duda de las discusiones teológicas y metafísicas, serán más estudiadas y comentadas de lo que lo fueron en los siglos precedentes y, curiosamente, también en los posteriores, casi hasta la aparición de los trabajos de LEWIS sobre la implicación estricta.

ARISTÓTELES distingue hasta cuatro *modos* de

la lógica -por ejemplo, algunos de los asuntos que en esta tesis se discuten en relación a las posturas *referencialistas* de QUINE- que con la lógica misma.

enunciación: lo necesario (τὸ ἀναγκαῖον), lo imposible (τὸ ἀδυνατόν), lo posible (τὸ δυνατόν) y lo contingente (τὸ ἐνδεχόμενον), que dan lugar a otras tantas clases de proposiciones modales.³ El siguiente es el cuadro de oposiciones modales que propone ARISTÓTELES:⁴



³ Cfr. ARISTÓTELES: *Περὶ ἑρμηνείας*, capítulos XII y XIII, 21a34-23a25. En esta obra, que ALEJANDRO DE AFRODISIA colocó en su edición inmediatamente antes de los *Analíticos*, ARISTÓTELES estudia la oposición entre los enunciados asertóricos y los modales y realiza también una iluminadora discusión acerca de los futuros contingentes en relación con las modalidades y el principio de tercio excluso.

⁴ Ibidem. Cfr. también KNEALE, W. & KNEALE, M.: *The Development of Logic*, II, 7.

Este análisis, realizado en el *Περὶ ἑρμηνείας*, le permite estudiar la conversión de las proposiciones modales entre sí. De esta forma se ponen los fundamentos para tratar lógicamente en pie de igualdad las proposiciones modales y las proposiciones asertóricas, lo que lleva a cabo ARISTÓTELES en su obra lógica principal, los *Primeros analíticos*.⁵ Tras dedicar varias páginas a las figuras del silogismo asertórico, ARISTÓTELES continúa con los silogismos modales en análogos términos y los expone siguiendo esquemas similares a los usados para los silogismos asertóricos.⁶ Se dividen allí los silogismos modales en ocho grupos según que las premisas sean necesarias, asertóricas o posibles, manteniendo las figuras del silogismo asertórico en cada grupo, de modo que se obtiene el siguiente cuadro:⁷

⁵ Cfr. ARISTÓTELES: *Ἀναλυτικὰ πρότερα*, A, III, 25a27-25b26.

⁶ *Ἀναλυτικὰ πρότερα*, A, VIII-XXII, 29b29-40b16.

⁷ Cfr. BOCHENSKI, I.M.: *Historia de la lógica formal*, §15, D, página 98. En el cuadro, las mayúsculas indican el modo de la proposición: necesaria (N), asertórica (A), posible (P).

Grupo	1	2	3	4	5	6	7	8
Premisa Mayor	N	N	A	P	P	A	P	N
Premisa Menor	N	A	N	P	A	P	N	P

En cada grupo, el modo de la conclusión depende tanto del modo de las premisas como de su cantidad (esto es, si son universales o particulares) y su signo (negativas o afirmativas), no cumpliéndose una de las más importantes reglas del silogismo asertórico: que la conclusión sigue siempre a la premisa más débil, puesto que un silogismo del grupo 2 y del modo *Barbara* puede tener una conclusión necesaria, como pone de relieve BOCHEŃSKI.⁸

Normalmente se entiende que la silogística de ARISTÓTELES tiene más relación con la moderna lógica de clases que con la lógica de enunciados. Esto se hace extensible al tratamiento lógico de las modalidades que el filósofo llevó a cabo. Raramente, por ejemplo, cuando ARISTÓTELES utiliza el término το ἀναγκαῖον se está refiriendo a la necesidad lógica; se trata más bien de la

⁸ Loc. cit., página 99.

necesidad ontológica o física.⁹ Si hace referencia a la necesidad lógica el término *ἀνάγκη* cuando lo usa para introducir la conclusión del silogismo, pero entonces ha de entenderse que significa "se sigue necesariamente de las premisas" o algo similar, siempre en un contexto ajeno al de la lógica modal. Su discípulo TEOFRASTO, en cambio, aunque siguió al maestro en todo lo referente a la doctrina del silogismo asertórico, consideró el modo haciendo referencia a la proposición toda y no sólo a la relación entre los términos,¹⁰ discrepando de ARISTÓTELES en lo referente al

⁹ Esta apreciación tiene cierta relación con la posterior distinción realizada por los lógicos medievales entre modalidades de *re* y modalidades de *dicto*, distinción a la que dedicaré más adelante algunas líneas.

¹⁰ En *The Development of Logic* los KNEALE piensan que ARISTÓTELES asumió de un modo no explícito en su discusión de la conversión entre las proposiciones modales que «el operador modal modifica toda la frase en la que ocurre y no solamente una palabra o una expresión dentro de la frase». Pero más adelante añaden: «ARISTÓTELES fue llevado, por tanto, a comprender que en una frase declarativa modal el operador modal constituye el predicado principal de la frase y es, por decirlo así, exterior y no interior al resto de la frase. Mantiene esta posición acerca de "es contingente" en los *Primeros Analíticos* (25b19-25) de modo que parece ser su opinión madura aunque, como veremos, se aleje de ella algunas veces». Precisamente porque no sólo se aleja de esta opinión a menudo, sino que la construcción de los silogismos modales que propone contradice esta tesis de los KNEALE, creo que la concepción de las modalidades en ARISTÓTELES es más cercana, utilizando la terminología medieval anunciada, a las modalidades de *re* que a las de *dicto*. Cfr. KNEALE, W.

sistema de oposiciones y conversiones e, incluso, a los modos de la conclusión en algunos de los grupos referidos.¹¹

También desarrolló una teoría lógica modal de las proposiciones la Stoa, y aunque no es fácil determinar hasta qué punto esta afirmación no es una extrapolación de los actuales conceptos a los antiguos, ya que la filosofía estoica, en general, y la lógica, en particular, han llegado fragmentaria e indirectamente hasta hoy, se sabe, sin embargo, que trabajaron sobre cuestiones relacionadas con los modos de verdad de las proposiciones, como lo hicieran también los megáricos, de quienes la lógica estoica fue

& KNEALE, M.: *The Development of Logic*, II, 7.

¹¹ Las teorías de TEOFRASTO sobre el silogismo modal están expuestas por ALEJANDRO DE AFRODISIA en su *In Aristotelis Analyticorum Priorum Librum I Commentarium*. Allí se simplifica notablemente la teoría aristotélica del silogismo modal a costa de hacer el sistema de TEOFRASTO incoherente, como indica BOCHENSKI en su libro *La logique de Théophraste*. Parece que TEOFRASTO mantuvo el principio de que la conclusión siempre sigue a la premisa más débil, pero aceptando silogismos en que esto no ocurre así, como quedó señalado más arriba. Seguramente, como indican los KNEALE en su libro, TEOFRASTO aceptó esta regla en un sentido débil cuando se aplicaba al silogismo modal, pero se dejó engañar por ejemplos plausibles del maestro y la ambigüedad del uso de "necesariamente" en la conclusión, una vez que TEOFRASTO opta por modalidades que afectan a toda la proposición y no a alguno de sus términos. Cfr. KNEALE, W. & KNEALE, M.: *The Development of Logic*, II, 9.

heredera. Así, por ejemplo, DIODORO CRONO definió los modos de las proposiciones apelando al carácter temporal de la verdad, de forma que se puede elaborar con tales definiciones un cuadro de oposición semejante al aristotélico presentado más arriba.¹² Estas son, haciendo uso de una variable temporal al reexponerlas, las siguientes:

1. $\lceil p \text{ es posible en } [un \text{ tiempo}] t' \rceil$ por $\lceil (p \text{ en } t') \vee \exists t(t' < t \ \& \ p \text{ en } t) \rceil$.
2. $\lceil p \text{ es imposible en } t' \rceil$ por $\lceil \sim(p \text{ en } t') \ \& \ \forall t(t' < t \rightarrow \sim(p \text{ en } t)) \rceil$.
3. $\lceil p \text{ es necesaria en } t' \rceil$ por $\lceil p \text{ en } t' \ \& \ \forall t(t' < t \rightarrow p \text{ en } t) \rceil$.
4. $\lceil p \text{ es no necesaria en } t' \rceil$ por $\lceil \sim(p \text{ en } t') \vee \exists t(t' < t \ \& \ \sim(p \text{ en } t)) \rceil$.

FILÓN DE MEGARA y CRISIPO DE ALEJANDRÍA dedicaron también parte de su obra lógica, según se conoce por

¹² Las fuentes para las definiciones diodóricas de las modalidades son CICERÓN: *De fato*, 17 y, especialmente, BOECIO: *De interpretatione*, I, 234/22-235/11. Al respecto, cfr. MATES, B.: *Lógica de los estoicos*, páginas 68ss., BOCHENSKI, I.M.: *Historia de la lógica formal*, §19, F, páginas 125-126 y KNEALE, W. & KNEALE, M.: *The Development of Logic*, III, 2.

CICERÓN, al análisis de los modos de verdad. Ambos mantuvieron que una proposición es posible sólo en el caso de que pueda ser verdadera en virtud de su naturaleza interna. Pero, como sugiere BENSON MATES, también las circunstancias externas que hacen verdadera a una proposición determinan su posibilidad, si no impiden que sea verdadera, o su necesidad, si tales circunstancias externas impiden que sea falsa.¹³ Esta misma concepción es aplicable a la lógica estoica, en general, aunque con alguna complicación más.¹⁴

El análisis anterior, junto con la relación entre modalidad y temporalidad establecida por el megárico DIODORO CRONO, supone, a mi entender, el desarrollo antiguo de la lógica modal más próximo a las actuales técnicas de interpretación lógica y uno no puede dejar de sentir una profunda admiración por la perspicacia de estos autores. A

¹³ CICERÓN: *De fato*, 12. MATES sigue un pasaje de DIÓGENES LAERCIO quien atribuye a CRISIPO esta interpretación de la necesidad y la posibilidad. Cfr. DIÓGENES LAERCIO: *Vida de filósofos ilustres*, VII, 75. Cfr. también BOECIO: *De interpretatione*, I, 234/22-235/11.

¹⁴ Cfr. KNEALE, W. & KNEALE, M.: *The Development of Logic*, III, 2.

pesar de todo, la lógica de proposiciones desarrollada por estoicos y megáricos no dio mayores frutos en el período medieval, a causa, sin duda, del desconocimiento de su obra por parte de los comentaristas. Realmente, el auge de los estudios lógicos en la Edad Media se debió principalmente a los muchos comentarios que se hicieron sobre el *órganon* aristotélico, la única fuente de la ciencia lógica durante varios siglos. La obra de un hombre a caballo entre la antigüedad y el nuevo orden político y cultural de Europa, el latino BOECIO, es extremadamente importante en tal sentido, puesto que fue este autor quien introdujo en el occidente medieval los primeros comentarios sobre la obra lógica de ARISTÓTELES. A través de sus traducciones latinas de las *Categoriae* y del *De interpretatione* llegaron a los filósofos medievales los únicos textos aristotélicos que realmente estuvieron a su alcance.¹⁵ Sus comentarios a las diferentes obras del filósofo fueron estudiados en la Edad Media y sirvieron de base para la mayoría de los tratados de lógica. Así, en el tratado *De syllogismo hypothetico*, BOECIO

¹⁵ Parece ser que BOECIO tradujo también los *Primeros Analíticos*, los *Tópicos* y el *De sophisticis elenchis*, aunque estos textos no parece que circularan en igual medida que los anteriormente mencionados. Cfr. KNEALE, W. & KNEALE, M.: *The Development of Logic*, capítulo IV.

no sólo trata los silogismos hipotéticos, como ya hiciera anteriormente con los categóricos, sino que también, muy influido por la lógica proposicional de los estoicos, expone su teoría sobre las proposiciones modales (*cum modo*). En ella establece dos grupos de tres proposiciones cada uno y expone diversos teoremas al respecto, relacionados con la oposición y la conversión de las proposiciones modales. Además, como se ha visto, en su comentario al *Περὶ ἑρμηνείας* revisó también las teorías de otras escuelas, como es el caso de la estoica y la megárica.

Aunque quizás lo más interesante para conocer el tratamiento que los filósofos medievales dieron a la lógica modal sea revisar el *Opusculum de propositionibus modalibus* de TOMÁS DE AQUINO, donde el santo trata las diferencias entre las proposiciones de *inesse* y las modales, relacionándolas con la división de los juicios hecha por el de Stagira, creo que merece la pena tratar antes la más famosa discusión medieval sobre cuestiones de lógica modal, protagonizada seguramente por ANSELMO DE CANTERBURY y su argumento en favor de la existencia de Dios. En el *Liber Apologeticus contra Gaunilonem respondentem pro insipiente*, en el que respondía a las críticas hechas por el abate Gaunilón al argumento expuesto en el *Proslogium*, ANSELMO

recurre al carácter necesario que acompaña a la idea de Dios para evitar la comparación con la fabulosa isla perdida de que habla el monje de Marmoutier. Razona diciendo que si Dios es *posible* -es decir: si la idea de un ser totalmente perfecto y necesario es posible- entonces Dios existe y negarlo sería incurrir en contradicción, haciendo depender toda la fuerza de su argumentación de los conceptos de necesidad y posibilidad.¹⁶

La distinción entre modalidades *de re* y modalidades *de dicto* es, sin lugar a dudas, el logro más importante de los lógicos medievales en este terreno. ARISTÓTELES había tratado en su obra las modalidades siempre como modalidades *de re* (acerca del objeto), pudiéndose interpretar raramente

¹⁶ Este argumento se podría formalizar en el lenguaje objeto, que será descrito más adelante, del siguiente modo:

$$\Diamond \Box \alpha \rightarrow \alpha.$$

Como se verá con posterioridad, esta fórmula es un teorema del sistema S5 de LEWIS. ANSELMO niega contra Gaunilón que el Ser necesario sea meramente posible (contingente), lo que se podría formalizar así:

$$\Box \alpha \wedge \Diamond (\alpha \vee \neg \alpha).$$

Este enunciado no es absurdo, sino que tiene un modelo; precisamente cuando $v(\alpha, \mu_1) = 1$. Es decir, que el enunciado del *insipiens* es verdadero precisamente cuando Dios existe, de donde se sigue lo contradictorio de negar su existencia, si se admite su posibilidad. Cfr. *Obras completas de San Anselmo*, editorial católica, B.A.C., Madrid, 1952, páginas 407-437.

que en algún texto el filósofo trate acerca de las modalidades de *dicto* (acerca de la proposición). Fue por lo tanto un acontecimiento importante en la lógica medieval, dedicada casi exclusivamente al comentario del *órganon* aristotélico, la aparición de esta distinción, que, como queda reseñado, estaba latente en las posiciones de TEOFRASTO frente a la teoría aristotélica del silogismo modal. A este respecto es muy interesante la obra de TOMÁS DE AQUINO antes reseñada y, en concreto, el siguiente texto:¹⁷

«De las sentencias modales, unas son acerca del *dictum*; otras, acerca de la cosa. Las sentencias modales acerca del *dictum* son aquellas en las que el *dictum* entero es sujeto y el modo predicado [...]. Una sentencia modal acerca de la cosa se da cuando se

¹⁷ TOMÁS DE AQUINO: *Opusculum de propositionibus modalibus*, 5-16. Sigo la traducción que aparece en la edición española del libro de BOCHENSKI, páginas 195-196. Cfr. también PEDRO ABELARDO: *Dialectica*, p. 206; WILLIAM OF SHYRESWOOD: *Introductiones in logicam*, 40, 10ss.; PEDRO HISPANO: *Summulae logicae*, 1.28 y WILLIAM OCKHAM: *Summa totius logicae*, I 7, 11-13; 82ss. Aunque la terminología no es la misma en los autores más antiguos (ABELARDO habla de *expositio de sensu* y *expositio de rebus* o también de *expositio per compositionem* y *expositio per divisionem* y SHYRESWOOD de *modi secundum constructionem* y *secundum rem*), todos están haciendo referencia a la misma distinción entre modalidades de *dicto* y modalidades de *re*.

coloca el modo dentro del *dictum* [...]. Y se ha de saber que todas las sentencias modales acerca del *dictum* son singulares, porque en ellas el modo se propone de este o aquel proceso como de un singular. La sentencia modal acerca de la cosa se concibe, en cambio, como universal, particular, singular o indefinida, según el sujeto del *dictum*, como en las sentencias asertóricas [...]. Se ha de saber también que se llama afirmativa o negativa a una sentencia modal según la afirmación o negación del modo y no según la afirmación o negación del *dictum*».

TOMÁS DE AQUINO distingue por tanto entre dos tipos diferentes de sentencias modales según el lugar que ocupe la palabra que introduce el modo en la frase. Antes, había definido el modo como «una determinación de la cosa», pero con la precaución de establecer tres clases distintas: el modo que determina al sujeto de la sentencia, el que determina al predicado y un tercero que determina a la composición del predicado con el sujeto. Este último es el que da lugar a las sentencias modales propiamente dichas, puesto que los otros dos dan lugar a sentencias de *inesse*. Esta misma concepción se encuentra también en ALBERTO MAGNO¹⁸

¹⁸ ALBERTO MAGNO: *Librum I Priorum Analyticorum*.

y la mayoría de los autores de la época. Así, en el PSEUDO-ESCOTO se pueden encontrar dos sistemas de silogística modal, uno de sentencias modales en sentido compuesto (*de dicto*) y otro en sentido dividido (*de re*).¹⁹ WILLIAM OCKHAM va aún más allá y propone un sistema silogístico mixto en el que las sentencias modales puedan ser tanto *de re* como *de dicto*, con lo que amplía cuantiosamente el ya grande número de formas propias del silogismo modal.²⁰

¹⁹ Los comentarios anónimos *In universam logicam quaestiones*, conocidos como el PSEUDO-ESCOTO por haber sido atribuidos primeramente a DUNS ESCOTO, añaden una novedad interesante a la concepción medieval de la modalidad. Según el autor de esta obra, además de los cuatro modos habituales también son modos de la frase "verdadero" y "falso", modos que nombra TOMÁS DE AQUINO en un texto algo anterior al aducido más arriba, aunque para rechazarlos, diciendo: «Ahora bien, los modos que determinan la composición son seis: "verdadero", "falso", "necesario", "posible", "imposible" y "contingente". Sin embargo, "verdadero" y "falso" no añaden nada a la significación de la sentencia asertórica [...]. Con los otros cuatro modos no sucede esto, [...] por lo cual vamos a dejar de lado "verdadero" y "falso" y vamos a considerar los otros cuatro». (Cfr. TOMÁS DE AQUINO: *Opusculum de propositionibus modalibus*, 5-16). Pero no se detiene ahí el PSEUDO-ESCOTO, sino que añade a los anteriores los modos subjetivos "por sí", "dudoso", "sabido", "creído", "conocido", "aparente", "querido" y "preferido", prefigurando un concepto de las modalidades que no se ha repetido hasta el siglo XX. Cfr. *In librum I Priorum Analyticorum Aristotelis Quaestiones*, 25, 5ss., en DUNS ESCOTO: *Opera Omnia*.

²⁰ Cf. WILLIAM OCKHAM: *Summa totius logicae*, parte III.

§2. Las modalidades en la lógica matemática. Los sistemas de Lewis y la semántica de los mundos posibles.

Este amplio interés por la lógica modal en la Edad Media no tiene, sin embargo, contrapartida en los siglos posteriores. Es difícil encontrar autores que traten las modalidades en un sentido lógico. La obra lógica más representativa desde el Renacimiento hasta el siglo XIX, la *Lógica de Port Royal*,²¹ que sirvió como modelo al resto de las obras sobre lógica aparecidas con posterioridad y que se consideró durante dos siglos como el manual oficial de lógica clásica, no trata para nada el silogismo modal, ciñéndose por su contenido a las materias que ARISTÓTELES trató en las *Categorías*, *Sobre la interpretación* y los siete primeros capítulos del libro uno de los *Primeros Analíticos*.

También OCKHAM, como el PSEUDO-ESCOTO y quizás influido por éste, habla de *modos subjetivos*, incluyéndolos en algunos de sus silogismos.

²¹ NICOLE, P. & ARNAULT, A.: *Logique ou l'art de penser*, obra mejor conocida por la *Logique du Port Royal* y editada por vez primera en 1662.

Una ruptura tan tajante en ciertos aspectos con el saber y la ciencia desarrollados en la Edad Media explica que los grandes pensadores del XVII, el XVIII y gran parte del XIX, como dice BOCHENSKI, fueran, por lo que a la lógica respecta, sencillamente unos ignorantes, con la excepción de LEIBNIZ, a quien muchos consideran el padre de la actual lógica matemática. Sin embargo, la obra lógica de LEIBNIZ permaneció desconocida en su mayor parte hasta el final del siglo XIX, por lo que no influyó decisivamente en el desarrollo posterior de esta ciencia.

Sí lo hicieron, en cambio, PEANO y FREGE -este último con cierto retraso pero grandemente a través de RUSSELL-, autores que no trataron la modalidad en sus obras puesto que estaban más interesados por el lenguaje de la aritmética y de las matemáticas en general. Hay, sin embargo, un lógico que, indirectamente, introduce la modalidad en su sistema dos años antes del *Begriffsschrift* de FREGE. HUGH MACCOLL publicó en el año 1877 en las actas de la sociedad londinense de matemáticas un trabajo sobre lógica de enunciados (que en muchos aspectos se adelantó a los trabajos de FREGE) en el que, al definir el concepto de

inconsistencia, apela a la noción de posibilidad.²² Más tarde,²³ esto daría lugar a consideraciones más amplias sobre una lógica modal de las que sin duda obtuvo algún provecho C.I. LEWIS, quien es el verdadero fundador de la moderna lógica de las modalidades.²⁴

El principal interés de LEWIS cuando inició sus investigaciones sobre las modalidades era evitar las denominadas *paradojas de la implicación material* que, a su juicio, entorpecían los brillantes resultados obtenidos por el sistema de RUSSELL. El concepto de implicación material ya había sido expresamente rechazado (o al menos deslindado en la propia notación) en la obra de MACCOLL.²⁵ Pero MACCOLL

²² MACCOLL, H.: "The calculus of equivalent statements and integration limits" en *Proceedings of the London Mathematics Society*, 9 (1877/78), pp. 9-20 y 177-186.

²³ MACCOLL H.: *Symbolic Logic and its Applications*, de 1906.

²⁴ Cfr. LEWIS, C.I.: *A Survey of Symbolic Logic*, página 292, donde el autor reconoce su deuda con MACCOLL, y página 293, donde da una definición de consistencia en función del operador de imposibilidad de forma similar a lo que hiciera éste.

²⁵ En *Symbolic Logic and Its Applications*, MACCOLL niega que una implicación del tipo -y aquí sigo la notación que le atribuyen HUGHES & CRESSWELL en *Introducción a la lógica modal*- $(A:B)$ sea equivalente a la disyunción $(A'+B)$. Introduce dos símbolos ϵ y η (por "necesario" e "imposible", respectivamente) tales que $(A:B) = (A'+B)^{\epsilon} = (A \cdot B')^{\eta}$. De modo

no contaba con el poderoso instrumento que supuso el establecimiento de un sistema axiomático para la lógica en *Principia Mathematica*. LEWIS, en cambio, sí y ya desde 1912 mostró su inconformidad con la noción de implicación material allí usada. Las paradojas de la implicación ponían al descubierto, según LEWIS, la artificialidad de dicha noción, por lo que se propuso en varios artículos el desarrollo de una lógica axiomática en la que la implicación tuviese otro sentido, más fuerte y más natural a la vez, que aquél de la obra de RUSSELL. LEWIS no pretendía construir un sistema lógico sobre la base del rechazo de las tesis $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ y $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$, sino sobre otro concepto diferente de implicación del que no pudieran derivarse dichos teoremas, esto es: sobre el concepto de implicación estricta.

Con *A Survey of Symbolic Logic* C.I. LEWIS desarrolló una teoría lógica de la implicación estricta que desembocó en la formalización del sistema de las modalidades clásicas. Más tarde, en colaboración con C.H. LANGFORD, escribió un segundo libro escuetamente titulado *Symbolic Logic* en el que

que se tiene que un enunciado del tipo «A implica B» es equivalente a «Es necesario que no A o que B» y a «Es imposible que A y que no B».

se utiliza un lenguaje con variables proposicionales p , q , r , etcétera y como símbolos primitivos los signos $\sim$ para la negación, $\cdot$ para la conjunción y $\Diamond$ para la posibilidad, definiéndose a partir de ellos el signo $\rightarrow$ de modo que

$$(p \rightarrow q) =_{\text{def.}} \sim \Diamond (p \cdot \sim q).$$

El núcleo de la obra lo constituye el sistema lógico de *A Survey of Symbolic Logic*, a partir del cual se desarrollan dos sistemas más, menos fuertes que el primero. Ambos sistemas se conocen como S1 y S2, en tanto que el sistema primitivo de *A Survey of Symbolic Logic* es conocido como S3, apareciendo en un apéndice de la obra junto a otros dos sistemas (S4 y S5) obtenidos a partir de las observaciones de O. BECKER acerca de la reducción de las modalidades de *A Survey of Symbolic Logic*.²⁶ Las siguientes son las bases

²⁶ Cfr. BECKER, O.: "Zur Logik der Modalitäten". BECKER propuso dos principios de reducción para evitar la proliferación indefinida de modalidades en el sistema de LEWIS y aunque éste siempre abogó en favor de los sistemas sin los principios de reducción, sin embargo los introdujo en *Symbolic Logic* como los axiomas que más adelante se denominan [S4.1] y [S4.2]. Más tarde, J.C. MCKINSEY y W.T. PARRY darían algunas pruebas sobre las reducciones de las modalidades en los sistemas de LEWIS. Cfr. MCKINSEY J.C.: "A Reduction in the Number of Postulates for C.I. Lewis' System of Strict Implication" y "Proof that there are Infinitely

axiomáticas de los sistemas de LEWIS.

SISTEMA S1:

AXIOMAS²⁷

- [S1.1]: $(p \cdot q) \rightarrow (q \cdot p)$
 [S1.2]: $(p \cdot q) \rightarrow p$
 [S1.3]: $p \rightarrow (p \cdot p)$
 [S1.4]: $((p \cdot q) \cdot r) \rightarrow (p \cdot (q \cdot r))$
 [S1.5]: $p \rightarrow \sim \sim p$
 [S1.6]: $((p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
 [S1.7]: $(p \cdot (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

Many Modalities in Lewis' System S2", así como PARRY, W.T.: "The Postulates for 'Strict Implication'" y "Modalities in the Survey System of Strict Implication".

²⁷ Los siguientes axiomas están numerados de forma convencional, no como los numerara LEWIS en *Symbolic Logic* (B1-B7). Aparecen también allí otros dos axiomas de los que el primero es el que más adelante de denomina [S2.1] y el segundo el extraño axioma

$$B9: (\exists p, q)(\sim(p \rightarrow q) \cdot \sim(p \rightarrow \sim q))$$

que LEWIS incluyó probablemente para evitar una interpretación del signo $\rightarrow$ que lo asimilara a la implicación material en la regla de *Modus Ponens*. Por otra parte, el axioma [S1.5] no es independiente del resto de la base axiomática, como demostrara MCKINSEY en su artículo "A Reduction in the Number of Postulates for C.I. Lewis' System of Strict Implication", por lo que se puede prescindir de él.

REGLAS

- (Adj.): $\vdash \alpha, \vdash \beta \rightarrow \vdash (\alpha \cdot \beta)$
- (MP): $\vdash \alpha, \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \vdash \beta$
- (SU): $\vdash \alpha(p) \rightarrow \vdash \alpha(q/p)$, donde p y q son dos fbfs. cualesquiera y q sustituye uniformemente todas las apariciones de p en α .
- (TI): Si $\vdash \alpha$ y β difiere de α solamente en que donde en α aparece la fbf. γ en β aparece la fbf. δ y si $\vdash (\gamma \rightarrow \delta) \cdot (\delta \rightarrow \gamma)$ entonces $\vdash \beta$

S1 contiene el sistema de *Principia Mathematica* de modo que no era necesario adoptarlo como base. Por el contrario, LEWIS pretendió de esta forma confeccionar un sistema lógico más potente que el de *Principia Mathematica* y a la vez más riguroso por lo que al concepto de implicación se refería. Las bases axiomáticas para los restantes sistemas de LEWIS se obtienen a partir de S1 añadiéndole, en cada caso, uno de los siguientes axiomas:²⁸

$$[S2.1]: \quad \Diamond(p \cdot q) \rightarrow \Diamond p$$

²⁸ De todos los sistemas de LEWIS, S5 es el más fuerte puesto que contiene a los demás. En realidad, se puede demostrar fácilmente que $S1 \subset S2 \subset S3 \subset S4 \subset S5$.

$$[S3.1]: \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim \Diamond q \rightarrow \sim \Diamond p)$$

$$[S4.1]: \quad \sim \Diamond \sim p \rightarrow \sim \Diamond \sim \Diamond \sim p$$

$$[S5.1]: \quad \Diamond p \rightarrow \sim \Diamond \sim \Diamond p$$

La interpretación del signo $\rightarrow$ como la necesidad de la implicación material se debe al propio LEWIS, quien pensaba que $p \rightarrow q$ se satisface en el sistema cuando $p \supset q$ es una tautología. Pero esta interpretación, que se contradice incluso con el mismo desarrollo axiomático de LEWIS, no ofrecía el resultado que él mismo pretendía, sino que era algo asumido por los lógicos desde FREGE: la necesidad lógica entendida como validez lógica. Sería el tratamiento que GÖDEL hiciera en 1932 de un sistema equiparable a S4 el que daría la verdadera dimensión de lo que hoy se entiende por un sistema de lógica modal.²⁹ GÖDEL propuso el sistema S4 sobre una base axiomática de *Principia Mathematica* más los axiomas:

$$1. \quad \Box p \supset p$$

$$2. \quad \Box p \supset (\Box (p \supset q) \supset \Box q)$$

²⁹ Cfr. GÖDEL, K.: "Una interpretación del cálculo conectivo intuicionista" en *Obras completas*, Alianza Editorial, Madrid, 1981, pp.: 115-116.

3. $\Box p \rightarrow \Box \Box p$

y la regla (N): $\vdash \alpha \rightarrow \vdash \Box \alpha$. GÖDEL no utilizó el operador $\Box$ (que en los sistemas de LEWIS puede definirse como $\sim \Diamond \sim$), sino la letra B por *Beweisbar* (demostrable). Con todo, presentó S4 de una forma simple y elegante que se ha adoptado con posterioridad frente a la base axiomática de LEWIS. Indirectamente, también relaciona las modalidades con lo que podríamos llamar *lógica epistémica*. Con posterioridad, VON WRIGHT propondría explícitamente interpretar el operador $\Box$ como "se sabe que", inaugurando una corriente dentro de la lógica modal muy importante por sus consecuencias lógicas y filosóficas.³⁰

En sus comienzos, por tanto, la lógica modal moderna estuvo marcada por los diferentes tratamientos axiomáticos que partían de los sistemas desarrollados por LEWIS y LANGFORD. El estudio semántico de las modalidades, en

³⁰ Cfr. VON WRIGHT, G.H.: *An Essay in Modal Logic*, publicado en 1951. Allí propone la consideración de diversos tipos de modalidad: la alética (de la necesidad), la epistémica (del conocimiento), la deóntica (de la obligación) y la existencial (la clásica cuantificación sobre un dominio). Del mismo año es su artículo "Deontic Logic", que inaugura la moderna lógica deóntica.

cambio, no se desarrollaría hasta algunas décadas después, cuando los fundamentos de la teoría de modelos estuvieron suficientemente consolidados. En este sentido, la obra de R. CARNAP *Meaning and Necessity*, en la que el filósofo centroeuropeo desarrolla una teoría conjunta de la necesidad física y la necesidad lógica, marcó un hito importante.³¹ En esta obra se encuentra el origen de la denominada *semántica de los mundos posibles*, desarrollada en sus aspectos de teoría de modelos por el lógico S. KRIPKE, quien sin duda se inspira en las reflexiones de filosofía de la lógica tejidas por CARNAP en torno al concepto *state of affairs*. En síntesis, para KRIPKE un modelo para una fórmula bien formada α es una función $\Phi(P,H)$ cuyos argumentos son el conjunto de las subfórmulas atómicas de α , P , y un mundo o conjunto modelo cualquiera H , tal que $H \in K$, asociada a una estructura modelo $\langle G,K,R \rangle$, donde G es un conjunto modelo cualquiera, K un conjunto de conjuntos modelos y R una relación llamada de alternatividad. El rango de la función Φ es el conjunto $\{V,F\}$.³²

³¹ La primera edición es de 1947 y la segunda y definitiva del año 1956.

³² Cfr. KRIPKE, S.: "Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi" y "Semantical Analysis

A partir de aquí, la semántica de los mundos posibles fundada en las estructuras modelos kripkeanas ha conformado los fundamentos de la actual investigación semántica de multitud de lógicas no clásicas. En este sentido, importante ha sido también el tratamiento que de la semántica de los mundos posibles hiciera JAAKKO HINTIKKA referido a la lógica epistémica y a la lógica doxástica (o de la creencia) en su libro *Knowledge and Belief*. El concepto de conjunto modelo, emparentado con los trabajos de E.W. BETT sobre la decisión en lógica clásica de predicados, ha abierto nuevas perspectivas para el desarrollo semántico de las lógicas modales, en general. Sin duda, una parte importante de la literatura filosófica referida a cuestiones de metodología y teoría de la referencia y del significado ha avocado el tratamiento de la semántica de las modalidades por lo que la interpretación de éstas aporta al ámbito de la metodología y la epistemología.

of Modal Logic II: Non-Normal Modal Propositional Calculi". También es interesante confrontar algunos aspectos de su libro *Naming and Necessity* con el de CARNAP, aunque se trata de una obra posterior.
